

55 Manuel Coveñas Naquiche

MATEMÁTICA



MATEMÁTICA ⑤

EDICIÓN 1997

5 Manuel Coveñas Naquiche
MATEMÁTICA



Presentación

*"Caminante no hay camino,
se hace camino al andar"*

Estas copias, en las que el *vate* Antonio Mairibudo expresa poéticamente una gran verdad de la sabiduría popular, cobran plena vigencia en la actividad de profesional de Manuel COVEÑAS NAQUICHE, con justicia "el Isaac Asimov de las matemáticas peruanas" por su prolífica producción bibliográfica «en el área didáctica» en esta no fácil ciencia formal.

En efecto, Manolo, como le gusta que le digan sus amigos, se abrió camino como un extraordinario docente, por sus virtudes didácticas, júnatas en él, y por su sencillez; ahora, sigue caminando, haciendo camino, en el difícil arte de crear libros... ¡no se duerme en sus laureles!, por eso, sigue mejorando sus textos escolares, gracias a su experiencia pedagógica y a los consejos de uno de los elementos fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje: ¡EL MAESTRO DE AULA!, con quien está en permanente contacto.

Con ocasión de esta segunda edición «ampliada y corregida de sus textos de **MATEMÁTICAS**, para cada uno de los grados de Educación Secundaria, nos presenta una nueva estructura de los mismos:

- ☛ Una exposición teórica sencilla, accesible al alumno, de cada uno de los temas tratados, que se ve clarificada con...
- ☛ Ejemplos resueltos en orden de dificultad progresiva y con...
- ☛ Talleres para cada capítulo, a desarrollarse en clase, mejor «a nivel grupal», motivando así la participación activa de los educandos.

No contento con esto, añade:

- ☛ Ejercicios de reforzamiento en dos niveles, según el grado de dificultad y,
- ☛ Propuesta de Olimpiadas Matemáticas, con su respectivo desarrollo, que globalizan los conocimientos impartidos en cada unidad temática.

Como pueden apreciar amigas/as lectoras/as, estos textos se convierten en un material de invaluable valor pedagógico, porque, facilitan el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, saber que permite optimizar la capacidad lógico-deductiva del ser humano.

Prof. Lucio R. Blanco A.

INDICE

1. TRIGONOMETRÍA	13
1.1 Ángulo Trigonométrico	
1.1.1 Ángulos Coterminales o Colinales	
2. SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES	23
2.1 Sistemas de Medidas Angulares	
2.1.1 Sistema Sexagesimal (S)	
2.1.2 Sistema Centesimal (C)	
2.1.3 Sistema Radial (R)	
2.1.4 Relación entre el Radián y el Grado Sexagesimal	
2.1.5 Conversión de Radianes a Grados Sexagesimales	
2.1.6 Relación entre los Tres Sistemas de Medidas Angulares	
2.1.7 Relación entre los Sistemas Sexagesimal y Centesimal	
2.2 Longitud de Arco	
2.2.1 Sector Circular	
3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO	45
3.1 Criterios Preliminares	
3.1.1 Razones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo	
3.1.2 Razones Trigonométricas Recíprocas	
3.1.3 Razones Trigonométricas de Ángulos Complementarios (Co-Razones Complementarias)	
3.1.4 Razones Trigonométricas de Ángulos Especiales o Notables	
4. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	143
4.1 Identidades Trigonométricas	
4.1.1 Identidades Fundamentales	
5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD	181
5.1 Razones Trigonométricas de un Ángulo de Cualquier Magnitud	
5.1.1 Ángulo en Posición Normal	
5.1.2 Ángulos Coterminales	
5.1.3 Razones Trigonométricas de un Ángulo en Posición Normal	

6 ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA 201

6.1 Estudio de las Funciones Trigonómicas en la Circunferencia Trigonómicas

- 6.1.1 Circunferencia Trigonómica
- 6.1.2 Elementos de la Circunferencia
- 6.1.3 Propiedades Convencionales
- 6.1.4 Líneas Trigonómicas
- 6.1.5 Razones Trigonómicas de 0° y 360°
- 6.1.6 Razones Trigonómicas de 90°
- 6.1.7 Razones Trigonómicas de 180°
- 6.1.8 Razones Trigonómicas de 270°
- 6.1.9 Razones Trigonómicas de un Ángulo Negativo $(- \theta)$

6.2 Reducción al Primer Cuadrante

- 6.2.1 Funciones Trigonómicas de Ángulos de la Forma: $\{n \cdot 180^\circ \pm \alpha\}$ ó $\{n\pi \pm \alpha\}$; $n \in \mathbb{Z}$.
- 6.2.2 Funciones Trigonómicas de Ángulos de la Forma: $\{(2n + 1) \pi/2 \pm \alpha\}$ ó $\{(2n + 1) 90^\circ \pm \alpha\}$; $n \in \mathbb{Z}$
- 6.2.3 Reducción al Primer Cuadrante

6.3 Funciones Trigonómicas de Ángulos Compuestos

- 6.3.1 Funciones Trigonómicas de la Suma de dos Ángulos
- 6.3.2 Tangente de la Suma de dos Ángulos
- 6.3.3 Cotangente de la Suma de dos Ángulos
- 6.3.4 Funciones Trigonómicas de la Diferencia de dos Ángulos

6.4 Funciones Trigonómicas de Ángulos Múltiples

- 6.4.1 Funciones Trigonómicas de Ángulo Doble
- 6.4.2 Funciones Trigonómicas de Ángulo Triple
- 6.4.3 Funciones Trigonómicas de Ángulo Mitad

7. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES 291

7.1 Funciones Trigonómicas de Números Reales

- 7.1.1 Representación Gráfica de la Función Seno
- 7.1.2 Representación Gráfica de la Función Coseno
- 7.1.3 Representación Gráfica de la Función Tangente
- 7.1.4 Representación Gráfica de la Función Cotangente
- 7.1.5 Representación Gráfica de la Función Secante
- 7.1.6 Representación Gráfica de la Función Cosecante

8. TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS 307

8.1 Transformaciones Trigonómicas

- 8.1.1 Transformaciones de Suma o Diferencia o Producto (Factorización Trigonómica)

8.2 Ecuaciones Trigonométricas

8.2.1 Ecuación Trigonométrica Elemental

8.2.2 Recomendaciones Generales para Resolver una Ecuación

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS 323

10. ÁNGULOS HORIZONTALES 331

10.1 Definición

10.1.1 Conceptos Preliminares

10.1.2 Direcciones

10.1.3 Rumbo o Dirección

10.2 Ángulos Verticales

10.2.1 Ángulo de Elevación

10.2.2 Ángulo de Depresión

10.3 Resolución de Triángulos Oblicuángulos

10.3.1 Ley de Senos (Ley de Briggs)

10.3.2 Ley de Cosenos (Ley de Carnot)

10.3.3 Ley de las Tangentes

10.4 Calcular Semi-ángulos en Función de los lados y del Semiperímetro del triángulo

10.4.1 Dado un ΔABC , Expresar: $\cos \frac{A}{2}$ en Función de los Lados (a , b y c) y el Semiperímetro (p)

10.4.2 Dado un ΔABC , Expresar: $\sin \frac{A}{2}$ en Función de los Lados (a , b y c) y el Semiperímetro (p)

10.4.3 Dado un ΔABC , Expresar: $\tan \frac{A}{2}$ en Función de los Lados (a , b y c) y el Semiperímetro (p)

10.5 Fórmulas del Triángulo

10.6 Resolución de Triángulos

11. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS 375

- Definición
- Simbología
- Sugerencias para Resolver Problemas
- Fórmulas Importantes
- Ejercicios Tomados en los Concursos de Matemática

12. POTENCIACIÓN 393

12.1 Análisis Combinatorio - Binomio de Newton

12.1.1 Factorial de un Número

12.2 Análisis Combinatorio

12.2.1 Principio de Multiplicación

12.2.2 Principio de Adición

12.2.3 Variaciones o Arreglos

12.2.4 Permutaciones

12.2.5 Números Combinatorios

12.2.6 Combinaciones

12.2.7 Diferencia entre Combinaciones y Variaciones

12.3 Binomio de Newton

12.3.1 Potencia de un Binomio

12.3.2 Triángulo de Pascal o de Tartaglia

12.3.3 Fórmula para Calcular un Término cualquiera del Desarrollo de un Binomio a un Exponente dado $(x + a)^n$

12.3.4 Cálculo del Término Central del Desarrollo de $(x + a)^n$ en donde $n =$ número par

12.4 Desarrollo del Binomio de Newton con Exponente Negativo y/o Fraccionario

12.5 Binomio de Newton para Exponente Fraccionario y/o Negativo

12.5.1 Propiedades del Desarrollo del Binomio

13. LOGARITMOS 445

13.1 Logaritmo de un Número

13.1.1 Propiedades de los Logaritmos

13.2 Sistema Logarítmico Decimal

13.2.1 Logaritmos Decimales de Potencias de 10

13.2.2 Características

13.2.3 Logaritmos Nepperianos

13.2.4 Obtención de Logaritmos con Calculadora

13.2.5 Obtención de Logaritmos en Cualquier Base con Calculadora

13.2.6 Cálculo del Antilogaritmo

13.3 Ecuaciones Exponenciales

13.4 Ecuaciones Logarítmicas

14. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS 487

14.1 Funciones

14.1.1 Definición

14.1.2 Notación

- 14.1.3 Dominio de la Función " f "
- 14.1.4 Rango de la Función " f "
- 14.1.5 Gráfica de una Función
- 14.1.6 Función Lineal
- 14.1.7 Función Cuadrática

14.2 Operaciones con Funciones

14.3 Función Exponencial

14.4 Función Logarítmica

- 14.4.1 Gráfica de una Función Logarítmica

15. GEOMETRÍA ANALÍTICA

515

15.1 La Línea Recta

- 15.1.1 Distancia entre dos Puntos del Plano
- 15.1.2 Punto Medio de un Segmento
- 15.1.3 Ángulo de Inclinación y Pendiente de una Recta
- 15.1.4 Ecuación de la Recta
- 15.1.5 Rectas Paralelas y Rectas Perpendiculares
- 15.1.6 Área de un Polígono en Función de las Coordenadas de sus Vértices

15.2 La Circunferencia

- 15.2.1 Forma General de la Ecuación de una Circunferencia
- 15.2.2 Transformación de la Forma General a la Forma Ordinaria

15.3 La Parábola

- 15.3.1 Elementos de la Parábola
- 15.3.2 Ecuación de la Parábola

15.4 La Elipse

- 15.4.1 Componentes de la Elipse
- 15.4.2 Ecuación de la Elipse
- 15.4.3 Ecuación Normal de la Elipse cuyos focos están sobre el eje " y "
- 15.4.4 Ecuación Ordinaria de la Elipse

16. REPARTO PROPORCIONAL

567

16.1 Magnitudes Directamente Proporcionales

16.2 Magnitudes Inversamente Proporcionales

16.3 Reparto Proporcional

16.4 Reparto Proporcional Inverso

- 16.4.1 Casos Combinados de Reparto Proporcional

16.5 Regla de Sociedad o Compañía

16.5.1 Objetivo

16.5.2 Clases

16.5.3 Regla de Sociedad Simple

16.6 Promedio

16.6.1 Promedio

16.6.2 Promedio Aritmético (PA)

16.6.3 Promedio Geométrico (PG)

16.6.4 Promedio Armónico (PH)

16.7 Regla de Mezcla

16.7.1 Regla de Mezcla Directa

16.7.2 Regla de Mezcla Inversa

16.8 Interés Compuesto

16.8.1 Problemas sobre Interés Compuesto

16.9 Anualidades

16.9.1 Anualidad de Capitalización

16.9.2 Anualidad de Amortización

● TABLAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 611

Capítulo

1

TRIGONOMETRÍA

1.1 ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Cuando nos referimos al ángulo trigonométrico tenemos que recurrir a un efecto comparativo con el ángulo geométrico, para su mejor comprensión del alumno.

LA GEOMETRÍA PLANA

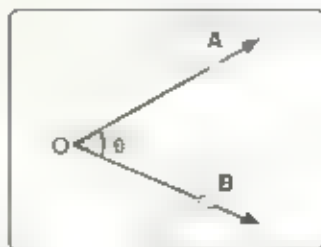
Ha definido al ángulo como la abertura determinada por dos rayos a partir de un mismo punto.

Para su mejor ilustración veamos el gráfico siguiente

Características

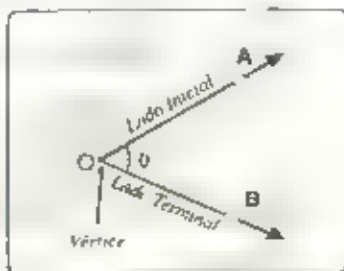
1. Son estáticos (No tienen movimiento)
2. No tienen sentido de giro por lo tanto no se puede hablar de ángulos negativos, ya que todos son positivos
3. Por no tener movimiento, están limitados en su magnitud, o sea.

$$0^\circ \leq \text{Ángulo geométrico} < 360^\circ$$



II LA TRIGONOMETRÍA PLANA

Ha definido al ángulo como el que se genera por el movimiento de rotación de un rayo al rededor de un extremo, desde una posición inicial hasta una posición final. La amplitud de la rotación es la medida del ángulo trigonométrico. La posición final se llama lado terminal y el extremo del rayo se llama vértice del ángulo.



Donde

O	Vértice	\overrightarrow{OA}	Lado inicial
\overrightarrow{OB}	Lado terminal	θ	Medida de ángulo trigonométrico

Características.

1. Son rotacionales (requieren movimiento para su formación)

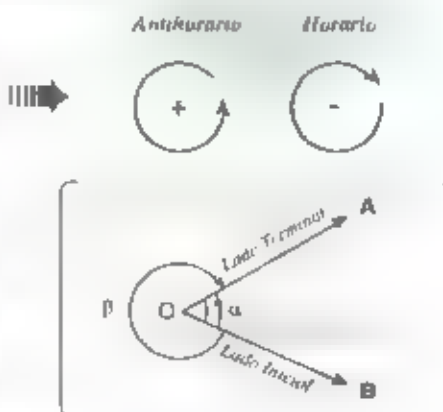
2. Su sentido de giro, está definido así:

Para su mejor comprensión veamos el siguiente gráfico

α° Es un ángulo positivo (sentido antihorario)

β° Es un ángulo negativo (sentido horario)

3. Su magnitud, no tiene límites.



+ ∞ Vueltas

+ ∞ Revoluciones

Donde + ∞ más infinito



- ∞ Vueltas

- ∞ Revoluciones

Donde - ∞ menos infinito

Luego $-\infty < \text{ángulo trigonométrico} < +\infty$

1.1.1 ÁNGULOS COTERMINALES O COFINALES

Hablar de ángulos coterminales o Cofinales significa demostrar el porqué los ángulos trigonométricos no tienen límites en su magnitud.

Se denominan ángulos coterminales aquellos ángulos que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal diferenciándolos solamente el número de vueltas.

Para su mejor comprensión, veamos algunos ángulos coterminales con relación al ángulo " α "

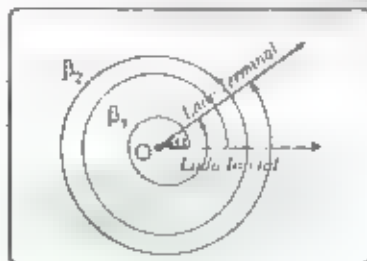
PARA ÁNGULOS POSITIVOS

• Ángulos coterminales del ángulo " α "

$$\beta_1 = 1 \text{ vuelta} + \alpha$$

$$\beta_2 = 2 \text{ vueltas} + \alpha$$

$$\beta_n = n \text{ vueltas} + \alpha$$



En general

Coterminal de α = " n " vueltas + α

Donde

n : Número entero positivo (1, 2, 3, 4)
 α : ángulo cualquiera menor de una vuelta

1 vuelta	$\begin{array}{c} \nearrow 360^\circ \\ \longrightarrow 400^\circ \\ \searrow 2\pi \text{ rad} \end{array}$	1 revolución	($^\circ$) : Grado sexagesimal
			(g) : Grado centesimal
			(rad) : Radianes

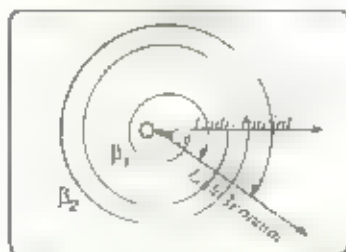
PARA ÁNGULOS NEGATIVOS

• Ángulos coterminales del ángulo " α "

$$\beta_1 = -1 \text{ vuelta} + \alpha$$

$$\beta_2 = -2 \text{ vueltas} + \alpha$$

$$\beta_n = -n \text{ vueltas} + \alpha$$



En general:

Coterminal de α = " n " vueltas - α

Donde

n : Número entero negativo (1, 2, 3, 4)
 α : Ángulo cualquiera menor que una vuelta

NOTA: De la definición de ángulos coterminales se deduce que si dos ángulos son coterminales, entonces, se diferencia en un número entero de vueltas.

MATEMATICAMENTE

Se puede evaluar así: Siendo "x" y "y" dos ángulos coterminales, se verifica lo siguiente:

$$x - y = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \text{donde "x" e "y" están en radianes}$$

$$x - y = n (360^\circ) \quad \Rightarrow \quad \text{donde "x" e "y" están en grados sexagesimales}$$

$$x - y = n (400^g) \quad \Rightarrow \quad \text{donde "x" e "y" están en grados centesimales}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

A. Cuando los dos ángulos son positivos

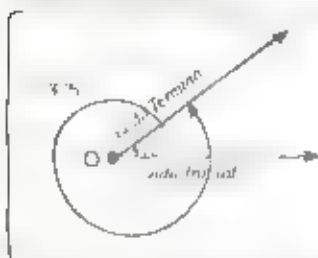
Ejercicio 1 ¿Decir si los ángulos 15° y 375° son coterminales?

Resolución. Para saber si dos ángulos son coterminales, nos basta realizar una simple resta veámos:

$$375^\circ - 15^\circ = 360^\circ < > 1 \text{ vuelta}$$

- Como la diferencia de los ángulos a resultado un número entero de vueltas (1 vuelta), esto nos indica que los ángulos sí son coterminales

MÉTODO GRÁFICO



- Como se muestra en la figura los dos ángulos sí son coterminales por tener el mismo lado inicial y el mismo lado terminal

15° y 375° sí son ángulos coterminales

Ejercicio 2 ¿Decir si los ángulos 256° y 976° son coterminales?

Resolución

Aplicando el mismo criterio que el problema anterior obtenemos

$$976^\circ - 256^\circ = 720^\circ = 2 (360^\circ) < > 2 \text{ vueltas}$$

Como la diferencia de los dos ángulos a resultado un número entero de vueltas (2 vueltas), esto quiere decir que los dos ángulos sí son coterminales

34° y 754° sí son ángulos coterminales

NOTA: En matemática, dos ángulos α y β se dicen *equivalentes* si son coterminales.

B. Cuando los dos ángulos son negativos.

Ejercicio 3. ¿Decir si los ángulos -50° y 410° son coterminales?

Resolución Para este tipo de problema donde los dos ángulos son negativos se puede resolver de 3 formas, veamos

PRIMERA FORMA. $(50^\circ) - (-410^\circ) = 50^\circ + 410^\circ = 460^\circ < > 1 \text{ vuelta}$

30° y 390° si son ángulos coterminales

SEGUNDA FORMA. $(410^\circ) - (-50^\circ) = 410^\circ + 50^\circ = 460^\circ < > 1 \text{ vuelta}$

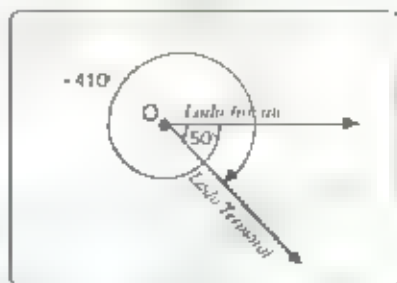
- Como la diferencia a resultado un número entero de vueltas (1 vuelta), esto quiere decir que los dos ángulos si son coterminales

NOTA Recordemos que cuando el resultado es un número entero de vueltas, esto quiere decir que los dos ángulos si son coterminales.

TERCERA FORMA. (Método gráfico)

- Como se muestra en la figura los dos ángulos si son coterminales por tener el mismo lado inicial y el mismo lado terminal

50° y 410° si son ángulos coterminales



C. Cuando un ángulo es positivo y el otro negativo:

Ejercicio 4. ¿Decir si los ángulos 830° y -250° son coterminales?

Resolución Aplicando el criterio del ejercicio 1 obtenemos

PRIMERA FORMA. $830^\circ - (-250^\circ) = 830^\circ + 250^\circ = 1080^\circ = 3(360^\circ) < > 3 \text{ vueltas}$

- Como la diferencia de dichos ángulos a resultado un número entero de vueltas, esto quiere decir que los ángulos si son coterminales

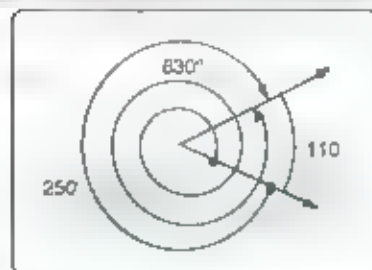
830° y -250° si son ángulos coterminales

SEGUNDA FORMA. $(-250^\circ) - (830^\circ) = -250^\circ - 830^\circ = -1080^\circ = -3(360^\circ) < > -3 \text{ vueltas}$

- Como la diferencia a resultado un número entero de vueltas (3 vueltas) esto quiere decir que los ángulos si son coterminales

TERCERA FORMA: (Método gráfico)

- Como se muestra en la figura los dos ángulos si son coterminales por tener el mismo lado inicial y el mismo lado terminal

**D. Cuando dos ángulos no son coterminales**

Ejercicio 5. ¿Decir si los ángulos 42° y 750° son coterminales?

Resolución. Aplicando el mismo criterio que los problemas anteriores, obtenemos

$$750^\circ - (-42^\circ) = 750^\circ + 42^\circ = 792^\circ = 2,2 (360^\circ)$$

NOTA Para saber cuántas vueltas genera 792° dividimos dicha vale entre 360° resultas

$$\begin{array}{r|l} 792^\circ & 360^\circ \\ 720^\circ & \textcircled{2,2} \rightarrow \text{indica el número de vueltas} \\ 720^\circ & \text{que genera el ángulo de } 792^\circ \\ \hline 720^\circ & \end{array}$$

$$\text{Luego: } 792^\circ = 2,2 (360^\circ)$$

↑
No es número entero

- Como se observará los ángulos 42° y 750° no son coterminales, porque la diferencia de dichos ángulos no es un número entero.

NOTA Para saber cuántas vueltas completas genera un ángulo \square se divide dicho ángulo entre 360° lo que resulte en el cociente será el número de vueltas que ha generado dicho ángulo \square .

E. Cuando son tres ángulos positivos

Ejercicio 6 ¿Decir si los ángulos 50° , 410° y 770° son coterminales?

Resolución.

En primer lugar Hallamos la diferencia entre 410° y 50°

$$410^\circ - 50^\circ = 360^\circ < > 1 \text{ vuelta}$$

Los ángulos de 410° y 50° si son coterminales

En segundo lugar hallamos la diferencia entre 770° y 50°

$$770^\circ - 50^\circ = 720^\circ = 2 (360^\circ) < > 2 \text{ vueltas}$$

Los ángulos de 770° y 50° si son coterminales

En tercer lugar hallamos la diferencia entre 770° y 410°

$$770^\circ - 410^\circ = 360^\circ < 1 \text{ vuelta}$$

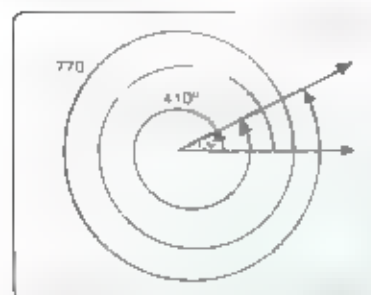
Los ángulos de 770° y 410° si son coterminales

Luego diremos que los tres ángulos 50° , 410° y 770° son coterminales por diferenciarse en un número entero de vueltas

MÉTODO GRAFICO

¿Decir si los ángulos 50° , 410° y 770° son coterminales?

Resolución



- Como se observará en la figura, los tres ángulos tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal, por lo tanto los tres ángulos son coterminales

MÉTODO PRACTICO

Este método consiste en dividir los ángulos mayores de 360° si los residuos son iguales al menor de los ángulos dados (menor de 360°), esto implica que los ángulos si son coterminales

Ahora apliquemos este método en el problema anterior o sea ¿Decir si los ángulos 50° , 410° y 770° son coterminales?

Resolución

- Como se observará, el menor de los 3 ángulos dados es 50° (menor de 360°)

Luego, dividimos los ángulos mayores de 360° entre 360° veamos

$$\begin{array}{r}
 410^\circ : 360^\circ \\
 \underline{360^\circ} \\
 50^\circ \\
 \text{Residuo} = 50^\circ
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 770^\circ : 360^\circ \\
 \underline{720^\circ} \\
 50^\circ \\
 \text{Residuo} = 50^\circ
 \end{array}$$

Los residuos hallados son iguales al ángulo menor o sea 50° entonces diremos que los tres ángulos si son coterminales

F. Cuando dos ángulos son positivos y uno es negativo

Ejercicio 1 ¿Decir si los ángulos de 70° , 430° y 650° son coterminales?

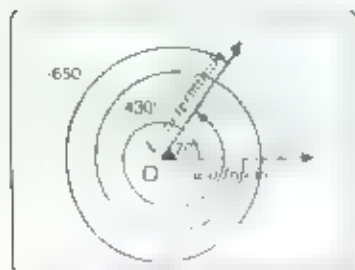
Resolución.

- Como se observará, el ángulo de menor magnitud es 70° (menor de 360°)

Ahora, dividimos los ángulos mayores de 360° entre 360° veamos.

$\begin{array}{r} 430^\circ \quad 360^\circ \\ 360^\circ \overline{) 1} \end{array}$ <p>Residuo = 70°</p>	$\begin{array}{r} 650 \quad 360^\circ \\ 720^\circ \overline{) 2} \end{array}$ <p>Residuo = 70°</p>
--	--

Luego diremos que los tres ángulos son coterminales, porque los residuos de los ángulos de mayor amplitud son iguales al ángulo de menor amplitud o sea (70°).



MÉTODO GRAFICO

Como se observará en la figura, los tres ángulos tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal por lo tanto los tres ángulos son coterminales.



TALLER DE EJERCICIOS Nº (1)

EJERCICIO 1 ¿Decir si los ángulos que se dan a continuación son coterminales?

a) 70° y 430°	<input checked="" type="checkbox"/> Sí	e) 380° y 1060°	<input checked="" type="checkbox"/> No	i) 570° y 1510°	<input checked="" type="checkbox"/>
b) 210° y 930°	<input checked="" type="checkbox"/>	f) 490° y 1210°	<input checked="" type="checkbox"/>	j) 323° y 468°	<input checked="" type="checkbox"/>
c) 750° y 2550°	<input checked="" type="checkbox"/>	g) 825° y 1905°	<input checked="" type="checkbox"/>	k) 1680° y 672°	<input checked="" type="checkbox"/>
d) 520° y 1600°	<input checked="" type="checkbox"/>	h) 1230° y 510°	<input checked="" type="checkbox"/>	l) 1500° y 420°	<input checked="" type="checkbox"/>

EJERCICIO 2 ¿Decir si los ángulos que se dan a continuación son coterminales?

a) 50° y 410° <input type="text"/>	e) -240° y 960° <input type="text"/>	i) 268° y 1172° <input type="text"/>
b) 150° y 870° <input type="text"/>	f) -660° y 1860° <input type="text"/>	j) -75° y 645° <input type="text"/>
c) 420° y 1500° <input type="text"/>	g) 80° y 640° <input type="text"/>	k) 235° y 1444° <input type="text"/>
d) 350° y 2120° <input type="text"/>	h) 135° y 945° <input type="text"/>	l) 95° y 625° <input type="text"/>

EJERCICIO 3 ¿Decir si los ángulos que se dan a continuación son coterminales?

a) 150° , 520° y 1240° <input type="text"/>	i) 323° , 468° y 37° <input type="text"/>
b) 835° , 1555° y 1915° <input type="text"/>	g) 836° , 2016° y -504° <input type="text"/>
c) 510° , 1230° y 2310° <input type="text"/>	h) -85° , 625° y 1165° <input type="text"/>
d) 420° , 1500° , 300° <input type="text"/>	j) 265° , 985° y 95° <input type="text"/>
e) 48° , 768° , 312° <input type="text"/>	j) 156° , 1596° y -86° <input type="text"/>

EJERCICIO 4 ¿Decir qué valor debe tomar " α " para que sea coterminal con el ángulo de 80° , y qué valor debe tomar " β " para que sea coterminal con -50° ?

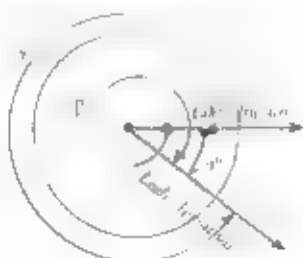
a)

Rpta. $\alpha =$

b)

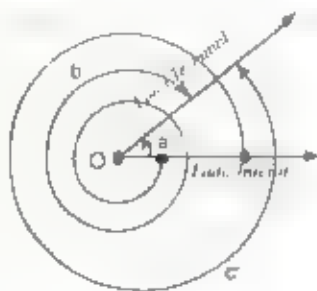
Rpta. $\beta =$

EJERCICIO 5 Marca con (V) la proposición Verdadera y con (F) la proposición Falsa:



- I. α y β si son coterminales ()
- II. μ y γ no son coterminales ()
- III. α° y γ° si son coterminales ()
- IV. α° , β° y γ° si son coterminales ()

EJERCICIO 6 Marca con (V) la proposición Verdadera y con (F) la proposición Falsa:



- I. a° y b° no son coterminales ()
- II. a° y c° si son coterminales ()
- III. b° y c° si son coterminales ()
- IV. a° , b° y c° no son coterminales ()
- V. $a^\circ + b^\circ = 720^\circ$ ()
- VI. $b^\circ + c^\circ = 1080^\circ$ ()

Capítulo

2

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

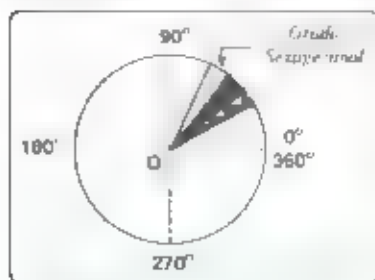
2.1 SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

En este campo de la trigonometría para expresar la medida de los ángulos se emplean los siguientes sistemas:

1. El sistema sexagesimal o sistema inglés
2. El sistema centesimal o sistema francés
3. El sistema radial o sistema circular

2.1.1 SISTEMA SEXAGESIMAL (S)

Llamado también sistema inglés, es aquel sistema cuya unidad de medida angular es el "grado sexagesimal" ($^{\circ}$), que es igual a la 360ava parte de una vuelta (una circunferencia).



NOTA: En este sistema la rotación se divide en 360 partes iguales.

GRADO SEXAGESIMAL

Notación:	Grado sexagesimal	1°
	Minuto sexagesimal	$1'$
	Segundo sexagesimal	$1''$

Equivalencias:

1 circunferencia	360°	\leftrightarrow	1 vuelta
1 circunferencia		\leftrightarrow	4 cuadrantes
1 cuadrante		\leftrightarrow	90°
	1°	\leftrightarrow	$60'$
	$1'$	\leftrightarrow	$60''$
	$1''$	\leftrightarrow	$3600''$

Ejercicio 1 Convertir $45^{\circ}25'30''$ a grados sexagesimales

Resolución. En primer lugar pasamos los $30''$ a grados, veamos:

$$30'' \leftrightarrow 30'' \times \frac{1}{600''} = 0,0083^{\circ} \Rightarrow 30'' \leftrightarrow 0,0083^{\circ} \quad (I)$$

En segundo lugar los 25' los pasamos a grados, veamos

$$25' < > 25 \times \frac{1}{60} = 0.4167 \quad \Rightarrow \quad 25' < > 0.4167 \quad . \text{ (II)}$$

Luego, la expresión $45^{\circ}25'30''$ se puede escribir así:

$$45^{\circ}25'30'' < > 45^{\circ} + 25 + 30'' \quad \text{ (III)}$$

Reemplazamos (I) y (II) en (III).

$$45^{\circ}25'30'' < > 45^{\circ} + 0.4167 + 0.0083$$

$$45^{\circ}25'30'' < > 45^{\circ} + 0.425 \quad \Rightarrow \quad 45^{\circ}25'30'' < > 45.425$$

Ejercicio 2 Convertir 16.2056° a grados, minutos y segundos sexagesimal

Resolución.

La expresión 16.2056° se puede escribir así. $\Rightarrow 16.2056^{\circ} < > 16^{\circ} + 0.2056^{\circ}$

Fracción de Grados

Pasamos la fracción de grados a minutos, veamos

$$0.2056^{\circ} < > 0.2056^{\circ} \times \frac{60'}{1^{\circ}} = 12.336'$$

$$0.2056^{\circ} < > 12.336' < > 12' + 0.336' \quad \Rightarrow \quad 0.2056^{\circ} < > 12' + 0.336'$$

Fracción de minutos

Pasamos la fracción de minutos a segundos, veamos

$$0.336' < > 0.336' \times \frac{60''}{1'} = 20.16'' \quad \Rightarrow \quad 0.336' < > 20''$$

NOTA En el ejemplo 20' se refiere a los minutos, los segundos se manejan a partir de los minutos, por lo tanto en el ejemplo anterior se refiere a los 20' que quedan en los 20' y no a los 20' que quedan en los segundos, por lo tanto se refiere a los 20' que quedan en los minutos, por lo tanto se refiere a los 20' que quedan en los minutos, por lo tanto se refiere a los 20' que quedan en los minutos.

$$40.6^{\circ} \Rightarrow 41^{\circ} 36' 2'' \Rightarrow 30^{\circ} 25.9'' \Rightarrow 27$$

$$\text{Para nuestro ejercicio } 16.2056^{\circ} \text{ es equivalente a } 16.2056^{\circ} < > 16^{\circ} + \underbrace{0.2056^{\circ}}_{12' + 0.336'}$$

$$16.2056^{\circ} < > 16^{\circ} 12' 20''$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 2

EJERCICIO 1 Convertir a grados sexagesimales

a) $60^{\circ} 30' 45''$

Resolución

$$\begin{aligned} 60^{\circ} 30' 45'' &= 60^{\circ} + 30' + 45'' \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &= 60^{\circ} + 0,5^{\circ} + 0,0125^{\circ} \\ &= 60,5125^{\circ} \end{aligned}$$

$60^{\circ} 30' 45'' = 60,5125^{\circ}$ *Rpta.*

Convertimos: $45''$ a grados sexagesimales

$$45'' = 45'' \cdot \frac{1^{\circ}}{3600''} = 0,0125^{\circ}$$

$45'' = 0,0125^{\circ}$

Convertimos: $30'$ a grados sexagesimales

$$30' = 30' \cdot \frac{1^{\circ}}{60'} = 0,5^{\circ}$$

$30' = 0,5^{\circ}$

b) $150^{\circ} 45' 30''$

Resolución.

Rpta. $150,7583^{\circ}$

c) $215^{\circ} 24' 36''$

Resolución.

Rpta. $215,41^{\circ}$

EJERCICIO 2 Convertir a grados, minutos y segundos sexagesimales.a) $30,153^\circ$ *Resolución:*

$$30,153^\circ = 30^\circ + 0,153^\circ$$

$$= 30^\circ + 9,18'$$

$$= 30^\circ + 9' + 0,18''$$

$$= 30^\circ + 9' + 10,8''$$

$$30,153^\circ = 30^\circ 9' 11'' \quad \text{Rpta.}$$

Convertimos $0,153^\circ$ a minutos sexagesimales

$$0,153^\circ = 0,153^\circ \times \frac{60'}{1^\circ} = 9,18'$$

$$0,153^\circ = 9,18'$$

Convertimos $0,18''$ a segundos sexagesimales.

$$0,18' = 0,18' \times \frac{60''}{1'} = 10,8''$$

$$0,18' = 10,8''$$

b) $56,48^\circ$ *Resolución:*

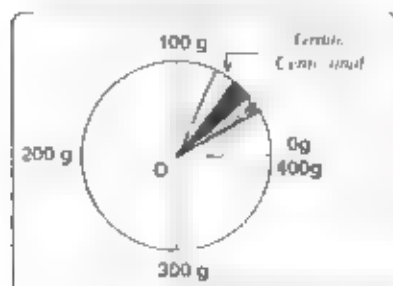
$$\text{Rpta. } 56^\circ 28' 48''$$

c) $129,26^\circ$ *Resolución:*

$$\text{Rpta. } 129^\circ 15' 36''$$

2.1.2 SISTEMA CENTESIMAL (C).

Llamado también sistema francés, es aquel sistema que tiene como unidad de medida angular el grado centesimal (g) que es igual a la 400 ava parte del ángulo de una vuelta.



NOTA: En este sistema la circunferencia se divide en 400 partes iguales.

GRADO CENTESIMAL

Notación	Grado centesimal	1g ó 1 ^o
	Minuto centesimal	1m ó 1 ^m
	Segundo centesimal	1s ó 1 ^s

Equivalencias

1 circunferencia 400 g	<>	1 vuelta
1 circunferencia	<>	4 cuadrantes
1 cuadrante	<>	100 g
1 g	<>	100 m
1 m	<>	100 seg
1 g	<>	10 000 seg

Ejercicio 1 Convertir 50 g 25 min 45 s a grados centesimales, veamos

$$45 \text{ s} <> 45 \text{ s} \times \frac{1 \text{ g}}{10\,000 \text{ s}} = 0,0045 \text{ g} \quad 45 \text{ s} <> 0,0045 \text{ g} \quad \dots \text{ (I)}$$

En segundo lugar pasamos los 25 min a grados centesimales veamos

$$25 \text{ min} <> 25 \text{ min} \times \frac{1 \text{ g}}{100 \text{ min}} = 0,25 \text{ g} \quad \therefore 25 \text{ min} <> 0,25 \text{ g} \quad \dots \text{ (II)}$$

Luego, la expresión 50 g 25 min 45 s se puede escribir así:

$$50 \text{ g } 25 \text{ min } 45 \text{ s} <> 50 \text{ g} + 25 \text{ min} + 45 \text{ s} \quad \dots \text{ (III)}$$

Reemplazamos (I), (II) en (III)

$$\begin{aligned} 50 \text{ g } 25 \text{ min } 45 \text{ s} &<> 50 \text{ g} + 0,25 \text{ g} + 0,0045 \text{ g} \\ &<> 50 \text{ g} + 0,2545 \text{ g} \\ 50 \text{ g } 25 \text{ min } 45 \text{ s} &<> 50,2545 \text{ g} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 Convertir 20,3465 g, a grados, minutos y segundos centesimales

Resolución:

La expresión 20,3465 g se puede escribir así

$$20\,346\,5\text{ g} < > 20\text{ g} + 0,346\,5\text{ g} \quad \text{Fracción de gramos}$$

Pasamos la fracción de grados (0,3465 g) a minutos

$$0,346\,5\text{ g} < > 0,346\,5\text{ g} \times \frac{100\text{ m}}{1\text{ g}} = 34\,65\text{ m}$$

$$0,346\,5\text{ g} < > 34,65\text{ m}$$

$$0,346\,5\text{ g} < > 34\text{ m} + 0,65\text{ m} \quad \text{Fracción de minutos}$$

Pasamos la fracción de minutos (0,65 m) a segundos

$$0,65\text{ m} < > 0,65\text{ m} \times \frac{100\text{ s}}{1\text{ m}} = 65\text{ s} \Rightarrow 0,65\text{ m} < > 65\text{ s}$$

Luego: $20\,346\,5\text{ g} < > 20\text{ g } 34\text{ m } 65\text{ s}$

REGLA PRÁCTICA

En el sistema centesimal, para hallar los minutos y los segundos, o parte de uno, parte de uno hacia la derecha y separamos a grupo de 2 siendo el primer grupo de 2 los minutos y el segundo grupo de 2 los segundos, como:

$$20\,346\,5\text{ g} < > 20\text{ g } 34\text{ m } 65\text{ s}$$

$$\boxed{\text{Primer Grupo}} \quad | \quad \boxed{\text{segundo grupo}}$$

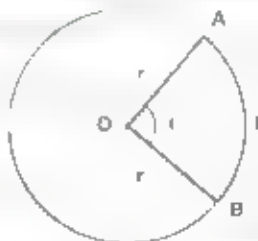
NOTA: Esta regla solo se cumple para el sistema centesimal

2.1.3 SISTEMA RADIAL (R)

Llamado también sistema circular es aquel sistema que tiene por unidad de medida el (Radian) que es el ángulo en el centro de una circunferencia cuya longitud de arco es igual a la longitud del radio de la circunferencia

$$S = L = r \Rightarrow \theta = 1\text{ rad}$$

Luego: $1\text{ vuelta} < > 2\pi\text{ rad}$



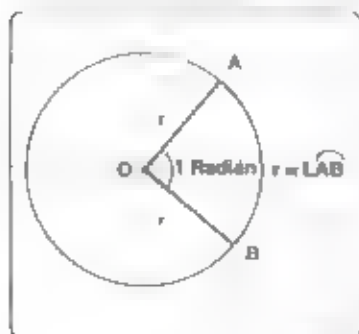
Nota:

- I) Para los cálculos se pueden considerar los valores de π como

$$\pi = 3.141\ 592\ 654 \approx 3.141\ 6$$

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \pi = \frac{355}{113}, \quad \pi = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Estos valores sólo se utilizan} \\ \text{cuando el ejercicio (problema) lo} \\ \text{da como dato} \end{array} \right.$$

- II) Definida la unidad Radian se puede calcular la longitud de un arco de circunferencia de la siguiente manera



Fórmula importante:

Ángulo en radian	Longitud de arco
1 radian	r
x	L_{ar}

Por regla de tres simple:

$$x = \frac{1 \text{ radian} \times L_{ar}}{r} \quad \frac{L_{ar}}{r} \text{ Rad}$$

Generalizada: $\text{Ángulo en Radianes} = \frac{\text{Longitud de Arco}}{\text{Longitud de radio}}$

Así por ejemplo,

$$\text{Ángulo de 1 vuelta} = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Longitud de radio}} \Rightarrow \text{Ángulo de 1 vuelta} = \frac{2\pi r}{r} \quad \text{(en radianes)}$$

$$\text{Ángulo de 1 vuelta} = 2\pi \text{ radianes} = 2\pi \text{ rad}$$

- Para este sistema emplearemos las siguientes equivalencias:

EQUIVALENCIAS

1 circunferencia \leftrightarrow $2\pi \text{ rad}$	2 cuadrantes \leftrightarrow $\frac{2\pi}{2} \text{ rad} \leftrightarrow \pi \text{ rad}$
1 circunferencia \leftrightarrow 4 cuadrantes	
1 cuadrante \leftrightarrow $\frac{2\pi}{4} \text{ rad} \leftrightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	3 cuadrantes \leftrightarrow $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

2.1.4 RELACIÓN ENTRE EL RADIAN Y EL GRADO SEXAGESIMAL

Para establecer dicha relación se debe recordar lo siguiente

- | | | | |
|----|---|---------------|--------------------------|
| a) | Longitud de la circunferencia | \Rightarrow | $L_c = 2\pi$ |
| b) | Longitud de la circunferencia expresada en radianes | \Rightarrow | $L_c = 2\pi \text{ rad}$ |
| c) | Longitud de la circunferencia en el sistema sexagesimal | \Rightarrow | $L_c = 360$ |

Por consiguiente de (c) y (b), obtenemos

$$360^\circ < > 2\pi \text{ rad} \quad (\text{sacamos mitad a cada miembro}) \quad 180^\circ < > \pi \text{ rad}$$

De donde

$$180^\circ = 180 \times 1^\circ < > \text{rad}$$

$$1^\circ < > = \frac{\pi \text{ rad}}{180} \quad (\text{pero } \pi = 3.1416)$$

$$1^\circ < > = \frac{3.1416}{180} \quad (\text{efectuando la división obtenemos})$$

$$1^\circ < > = 0.017453 \text{ rad.}$$

De la expresión

$$180^\circ < > \pi \text{ radianes} \Rightarrow 180^\circ < > \pi (1 \text{ radian})$$

De donde 1 radian

$$\frac{180^\circ}{\pi} < > 1 \text{ radian} \quad \text{pero } \pi = 3.1416$$

$$\frac{180^\circ}{3.1416} < > 1 \text{ radian}, \text{ efectuando la división obtenemos}$$

$$57.2957^\circ < > 1 \text{ radian} \Rightarrow 57^\circ 17'45'' < > 1 \text{ radian}$$

$$57.2957 < > 57^\circ 17'45'' \text{ aproximadamente } < > 1 \text{ radian}$$

Ejercicio 1 Convertir 144 a radianes

Resolución.

$$144^\circ < > 144 \times 1^\circ \Rightarrow \text{Pero } 1^\circ < > \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$144^\circ < > 144 \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$$

$$144^\circ < > \frac{4\pi}{5} \text{ rad} \quad (\text{Se lee 144 es igual a 4 pi sobre 5 radianes})$$

NOTA Para convertir los grados sexagesimales o radianes uno basta multiplicar el número de grados por $\pi/180^\circ$ rad. ver más otros ejemplos

Ejercicio 2. Convertir 150° a radianes

Resolución.

$$150^\circ < > 150^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \Rightarrow 150^\circ < > \frac{5}{6} \pi \text{ rad}$$

Ejercicio 3. Convertir $42^\circ 36'$ a radianes

Resolución:

I) Pasamos los $36'$ a grados sexagesimales

$$36' < > 36' \times 1 \Rightarrow \text{Pero } 1 < > \frac{1^\circ}{60'}$$

$$36' < > 36' \times \frac{1^\circ}{60'} = \frac{6^\circ}{10} = 0,6^\circ \Rightarrow 36' < > 0,6^\circ$$

Luego $42^\circ 36' < > 42,6^\circ \Rightarrow$ El número de grados que hemos hallado lo pasamos a radianes

Esta última expresión se puede escribir así:

$$42^\circ 36' < > (42,6) \times 1 \Rightarrow \text{pero } 1 < > 0,017453 \text{ rad}$$

$$42^\circ 36' < > (42,6) \times 0,017453 \text{ rad} = 0,7434978 \text{ rad.}$$

$$42^\circ 36' < > 0,7434978 \text{ rad}$$

Ejercicio 4. Convertir $38^\circ 19' 15''$ a radianes

Resolución

I) Pasamos los $15''$ a grados sexagesimales

$$15'' < > 15'' \frac{1^\circ}{3.600} = 0,004166^\circ \quad \therefore \quad 15'' < > 0,004166^\circ \quad \dots(I)$$

II) Pasamos los $19'$ a grados sexagesimales

$$19' < > 19' \times \frac{1^\circ}{60'} = 0,31666^\circ \quad 19' < > 0,31666^\circ \quad \dots(II)$$

La expresión $38^\circ 19' 15''$ se puede escribir así: $38^\circ 19' 15'' < > 38^\circ + 19' + 15'' \dots(III)$

Reemplazamos (I) y (II) en (III)

$$38^{\circ} 19' 15'' < > 38^{\circ} + 0,31556^{\circ} + 0,00416^{\circ}$$

$$38^{\circ} 19' 15'' < > 38,32082^{\circ}$$

El número de grados hallados los pasamos a radianes

$$38^{\circ} 19' 15'' < > 38,32082 \times 1^{\circ} \Rightarrow \text{pero } 1^{\circ} < > 0,017453 \text{ rad}$$

$$38^{\circ} 19' 15'' < > 38,32082 \times 0,017453 \text{ rad.}$$

$$38^{\circ} 19' 15'' < > 0,6688132 \text{ rad}$$

2.1.5 CONVERSIÓN DE RADIANES A GRADOS SEXAGESIMALES

Ejercicio 1 Convertir $\frac{2\pi}{3}$ radianes a grados sexagesimales

Resolución:

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad.} < > \frac{2\pi}{3} \times 1 \text{ rad.} \Rightarrow \text{Pero } 1 \text{ rad.} < > \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad.} < > \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \text{ rad.} < > 120^{\circ}$$

NOTA. Para convertir radianes a grados sexagesimales basta multiplicar el número de radianes por $\frac{180}{\pi}$

Ejercicio 2 Convertir $\frac{5\pi}{6}$ radianes a grados sexagesimales

Resolución:

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad.} < > \frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} \text{ rad.} < > 150^{\circ}$$

Ejercicio 3 Expresar 8.36 radianes en unidades del sistema sexagesimal

Resolución:

La expresión 8.36 rad. se puede escribir así:

$$8,36 \text{ rad.} < > 8,36 \times 1 \text{ rad.} \Rightarrow \text{pero } 1 \text{ rad.} < > 57,2957^{\circ}$$

$$8,36 \text{ rad.} < > 8,36 \times 57,2957^{\circ} = 478,99205$$

$$8,36 \text{ rad.} < > 478 + 0,99205^{\circ}$$

Convertimos a minutos

$$8,36 \text{ rad.} \Leftrightarrow 478^{\circ} + 0,992\,05^{\circ} \times \frac{60}{1}$$

$$8,36 \text{ rad.} \Leftrightarrow 478^{\circ} + 59,523'$$

$$8,36 \text{ rad.} \Leftrightarrow 478^{\circ} + 59' + 0,523'' \quad \text{Convertimos a segundos}$$

$$8,36 \text{ rad} \Leftrightarrow 478^{\circ} + 59' + 0,523'' \times \frac{60}{1}$$

$$8,36 \text{ rad.} \Leftrightarrow 478^{\circ} + 59' + 31,38''$$

$$8,36 \text{ rad} \Leftrightarrow 478^{\circ} + 59' + 31'' = 478^{\circ} 59' 31''$$

NOTA Para expresar un número en enteros de radianes, basta multiplicar el número de radianes por $57,2957^{\circ}$ y luego reducir la parte decimal a minutos y segundos, vemos una gráfica

Ejercicio 4 Expresar $10,25$ radianes en unidades del sistema sexagesimal

Resolución.

$$10,25 \text{ rad} \Leftrightarrow 10,25 \times 1 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \text{Pero } 1 \text{ rad} \Leftrightarrow 57,2957^{\circ}$$

$$10,25 \text{ rad.} \Leftrightarrow 10,25 \times 57,2957^{\circ} = 587,28093^{\circ}$$

$$10,25 \text{ rad.} \Leftrightarrow 587^{\circ} + \underbrace{0,28093^{\circ}}_{\text{Convertimos a minutos}}$$

$$10,25 \text{ rad.} \Leftrightarrow 587^{\circ} + 0,28093^{\circ} \times \frac{60}{1}$$

$$10,25 \text{ rad} \Leftrightarrow 587^{\circ} + 16,8558'$$

$$10,25 \text{ rad} \Leftrightarrow 587^{\circ} + 16' + \underbrace{0,8558''}_{\text{Convertimos a segundos}}$$

$$10,25 \text{ rad} \Leftrightarrow 587^{\circ} + 16' + 0,8558'' \times \frac{60}{1}$$

$$10,25 \text{ rad} \Leftrightarrow 587^{\circ} + 16' + 51,348''$$

$$10,25 \text{ rad.} \Leftrightarrow 587^{\circ} + 16' + 51'' = 587^{\circ} 16' 51''$$

2.1.6 RELACIÓN ENTRE LOS TRES SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

Sean, "S" "C" y "R" las medidas de un ángulo en grados sexagesimales, centesimales y radianes, respectivamente. Estos tres números serán diferentes entre sí, pero lo que sí permanece constante es la relación que nos indica que parte es dicho ángulo, del ángulo de una vuelta.

$$\text{Siendo } \Rightarrow \frac{S}{360} = \frac{C}{400} = \frac{R}{2\pi} \quad \text{Estas relaciones deben ser iguales}$$

Luego: $\begin{matrix} S & C & R \\ 360 & 400 & 2\pi \end{matrix}$ Sacamos mitad a cada término de los denominadores

$\begin{matrix} S & C & R \\ 180 & 200 & \pi \end{matrix}$ (Fórmula simplificada)

NOTA: Si queremos saber porque se ha obtenido esta fórmula simplificada tenemos que recordar que π radianes es igual a 180 grados.

- Consideremos el arco \widehat{AB} cuya medida en cada uno de los sistemas es el siguiente:

$\widehat{AB} = S$ (Grados Sexagesimales)

$\widehat{AB} = C$ (Grados Centesimales)

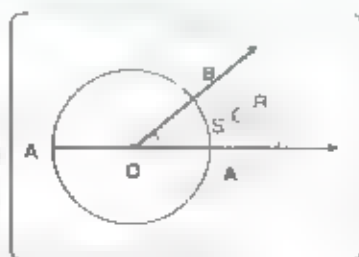
$\widehat{AB} = R$ (Radianes)

- Consideremos también el arco \widehat{ABA} cuya medida en cada uno de los sistemas es la siguiente:

$\widehat{ABA} = 180$ en el sistema sexagesimal (S)

$\widehat{ABA} = 200$ g. en el sistema centesimal (C)

$\widehat{ABA} = \pi$ rad. en el sistema radial (R)

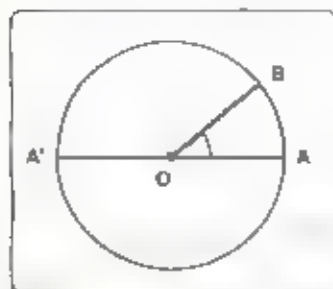


POR PROPIEDAD EN GEOMETRÍA PLANA, SE SABE QUE

Los ángulos en el centro de una circunferencia son proporcionales a los arcos interceptados por sus lados. Así por ejemplo:

(Propiedad)

$$\Rightarrow \begin{matrix} \angle AOB = \widehat{AB} \\ \angle AOA' = \widehat{ABA} \end{matrix}$$



- Aplicamos esta propiedad en las relaciones (I) y (II)

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \qquad \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Donde: S = Número de grados sexagesimales.
 C = Número de grados centesimales
 R = Número de radianes

2.1.7 RELACIÓN ENTRE LOS SISTEMAS SEXAGESIMAL Y CENTESIMAL

De la fórmula.

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Obtenemos $\frac{S}{180} = \frac{C}{200}$ Sacamos 20 av a cada término de los denominadores

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \quad ; \text{ (Donde: } 9^\circ < > 10^\circ \text{ g)}$$

CONVERSIÓN DE GRADOS CENTESIMALES A SEXAGESIMALES

Ejercicio 1 Convertir 150 g a grados sexagesimales

Resolución:

En la fórmula: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow$ Reemplazamos $C = 150$ g

Luego: $\frac{S}{9} = \frac{150}{10} \Rightarrow \therefore S = 144^\circ$

Ejercicio 2 Convertir 28 g 32 min al sistema sexagesimal

Resolución: La expresión 28 g 32 min se puede escribir así

$$28 \text{ g } 32 \text{ min} < > 28 \text{ g} + 32 \text{ min} \quad \text{(convertimos a grados)}$$

$$28 \text{ g } 32 \text{ min} < > 28 \text{ g} + 32 \text{ min} \times \frac{1 \text{ g}}{100 \text{ min}}$$

$$28 \text{ g } 32 \text{ min} < > 28 \text{ g} + 0,32 \text{ g} = 28,32 \text{ g}$$

$$28 \text{ g } 32 \text{ min} < > 28,32 \text{ g} \Rightarrow \therefore C = 28,32 \text{ g}$$

Ahora, convertimos los 28,32 g (Grados Centesimales), al sistema sexagesimal

Por fórmula

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \text{Reemplazamos } C = 28,32 \text{ g}$$

$$\frac{S}{9} = \frac{28,32}{10} \Rightarrow S = \frac{28,32}{10} \times 9$$

$$S = 25,488^\circ < > 25^\circ + 0,488^\circ \quad \text{Convertimos a minutos}$$

$$S = 25^\circ + 0,488^\circ \times \frac{60'}{1^\circ} = 25^\circ + 29,28'$$

$$S = 25^\circ + 29' + 0,28'' \quad \text{Convertimos a segundos}$$

$$S = 25^{\circ} + 29' + 0,28' \times \frac{60''}{1} = 25^{\circ} + 29' + 16,8'' \quad S = 25^{\circ}29'17''$$

A. CONVERSIÓN DE GRADOS SEXAGESIMALES A CENTESIMALES

Ejercicio 1. Convertir 135° al sistema centesimal

Resolución

En la fórmula $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow$ Reemplazamos. $S = 135^{\circ}$

Luego $\frac{135^{\circ}}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \frac{135}{9} \times 10 = C \Rightarrow \therefore 150 \text{ g} = C$

Ejercicio 2. Convertir $36^{\circ} 25'$ al sistema centesimal

Resolución. La expresión se puede escribir así:

$$36^{\circ} 25' < > 36^{\circ} + \frac{25}{1} \quad \text{Convertimos a grados}$$

$$36^{\circ} 25' < > 36^{\circ} + 25' \times \frac{1^{\circ}}{60^{\circ}} = 36^{\circ} + 0,416 7^{\circ}$$

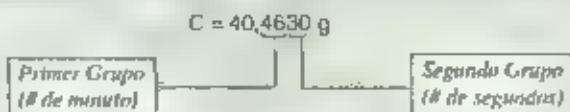
$$36^{\circ} 25' < > 36,416 7^{\circ} \Rightarrow S = 36,416 7^{\circ}$$

Ahora convertimos las $36,416 7^{\circ}$ al sistema centesimal

Por fórmula $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow$ Reemplazamos. $S = 36,416 6^{\circ}$

Luego $\frac{36,416 7^{\circ}}{9} = \frac{C}{10} \quad \frac{36,416 7^{\circ}}{9} \times 10 = C \quad \therefore 40,4630 \text{ g} = C$

NOTA Para hallar el número de minutos y segundos centesimales a partir de la coma decimal, hacia la derecha se separan en grupos de 2, siendo el primer grupo para los minutos y el segundo grupo para los segundos, tantos como se separan los grupos



Luego $C = 40 \text{ g } 46 \text{ min } 30 \text{ seg}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 3

EJERCICIO 1 Convertir a grados centesimales

a) 30 g 30 min 40 s

Resolución:

$$30 \text{ g } 30 \text{ min } 40 \text{ s} = 30 \text{ g} + 30 \text{ min} + 40 \text{ s}$$

$$= 30 \text{ g} + 0,3 \text{ g} + 0,004 \text{ g}$$

$$= 30,304 \text{ g}$$

$$30 \text{ g } 30 \text{ min } 40 \text{ s} = 30,304 \text{ g} \text{ Rpta.}$$

Convertimos 40 s a grados centesimales

$$40 \text{ s} = 40 \text{ s} \times \frac{1 \text{ g}}{10.000 \text{ s}} = 0,004 \text{ g}$$

$$40 \text{ s} = 0,004 \text{ g}$$

Convertimos 30 min a grados centesimales

$$30 \text{ min} = 30 \text{ min} \times \frac{1 \text{ g}}{100 \text{ min}} = 0,3 \text{ g}$$

$$\therefore 30 \text{ min} = 0,3 \text{ g}$$

b) 59 g 50 min 56 s

Resolución:

$$\text{Rpta. } 59,5056 \text{ g}$$

c) 82 y 49 min 60 s

Resolución:

$$\text{Rpta. } 82,496 \text{ g}$$

EJERCICIO 2 Convertir a grados minutos y segundos centesimales.**a)** 46,258 3 g**Resolución.**

$$46,258\ 3\ \text{g} = 46\ \text{g} + 0,2583\ \text{g}$$

$$= 46\ \text{g} + \underline{25,83\ \text{min}}$$

$$= 46\ \text{g} + \underline{25\ \text{min} + 0,83\ \text{min}}$$

$$= 46\ \text{g} + 25\ \text{min} + 83\ \text{s}$$

$$46,258\ 3\ \text{g} = 46\ \text{g}\ 25\ \text{min}\ 83\ \text{s} \quad \text{Rpta.}$$

Convertimos 0,258 3 g a minutos centesimales

$$0,2583\ \text{g} = 0,2583\ \text{g} \times \frac{100\ \text{min}}{1\ \text{g}} = 25,83\ \text{min}$$

$$0,2583\ \text{g} = 25,83\ \text{min}$$

Convertimos 0,83 min a segundos centesimales

$$0,83\ \text{min} = 0,83\ \text{min} \times \frac{100\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 83\ \text{s}$$

$$0,83\ \text{min} = 83\ \text{s}$$

b) 47 3942 g**Resolución.****Rpta.** 47 y 39 min 42 s**c)** 103.453 7 g**Resolución.****Rpta.** 103 g 45 min 37 s

B. CONVERSIÓN DE RADIANES A GRADOS SEXAGESIMALES

Ejercicio 1 Convertir $\frac{3\pi}{5}$ rad a grados sexagesimales.

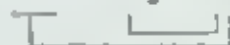
Resolución.

Reemplazamos el valor de $R = \frac{3\pi}{5}$ rad en la fórmula $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$

$$\text{Luego: } \frac{S}{180} = \frac{\frac{3\pi}{5}}{\pi} \Rightarrow S = \frac{3}{5} \times 180 \Rightarrow S = 108^\circ$$

MÉTODO PRÁCTICO:

Sabemos que: $180^\circ < > 200 \text{ g} < > \pi \text{ rad}$.



Luego, convertimos los π rad a grados sexagesimales

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3}{5} (180^\circ) = 3 (36^\circ) \Rightarrow \therefore \frac{3\pi}{5} \text{ rad} = 108^\circ$$

C. CONVERSIÓN DE RADIANES A GRADOS CENTESIMALES

Ejercicio 1 Convertir $\frac{2\pi}{5}$ rad. a grados centesimales

Resolución.

Reemplazamos el valor de $R = \frac{2\pi}{5}$ rad en la fórmula $\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$

$$\text{Luego: } \frac{C}{200} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\pi} \Rightarrow C = \frac{2}{5} \times 200 \Rightarrow C = 80 \text{ g}$$

MÉTODO PRÁCTICO:

Sabemos que $180^\circ < > 200 \text{ g} < > \pi \text{ rad}$

Luego, convertimos los $\frac{2\pi}{5}$ rad a grados centesimales

$$\frac{2\pi}{5} \text{ rad} = \frac{2}{5} (200 \text{ g}) = 2 (40 \text{ g}) \Rightarrow \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = 80 \text{ g}$$



TALLER DE EJERCICIOS N° 4

EJERCICIO 1 Convertir a radianes

a) 480°

Resolución:

$$480^\circ = 480^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow$$

$$480^\circ = 480^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

$$480^\circ = \frac{8}{3} \pi \text{ rad} \quad \text{Apta.}$$

Recuerda Que:

$$\frac{S}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ rad.}}$$

Donde $180^\circ < > \pi \text{ rad.}$

Luego

$$1 < > \frac{\pi \text{ rad.}}{180} \quad (\text{Factor de Conversión})$$

b) 160°

Resolución:

$$\text{Apta. } 8/9 \pi \text{ rad.}$$

c) 45°

Resolución:

$$\text{Apta. } \pi/4 \text{ rad}$$

d) 30°

Resolución:

$$\text{Apta. } \pi/6 \text{ rad}$$

e) 640°

Resolución:

$$\text{Apta. } 32/9 \pi \text{ rad}$$

EJERCICIO 2 Convertir a radianes

a) $38^{\circ}42'$

Resolución.

$$38^{\circ}42' = 38^{\circ} + 42'$$

$$= 38^{\circ} + 0,7^{\circ}$$

Luego: $38^{\circ}42' = 38,7^{\circ}$

$$38^{\circ}42' = 0,6754311 \text{ rad}$$

$$38^{\circ}42' = 0,6754311 \text{ rad} \quad \text{Apta.}$$

Convertimos $42'$ a grados sexagesimales

$$42' = 42' \times \frac{1^{\circ}}{60'} = 0,7^{\circ}$$

$$42' = 0,7^{\circ}$$

Convertimos $38,7^{\circ}$ a radianes

$$38,7^{\circ} = 38,7^{\circ} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}} \rightarrow \text{Factor de conversión}$$

$$38,7^{\circ} = 38,7^{\circ} \times 0,017453 \text{ rad}$$

$$\therefore 38,7^{\circ} = 0,6754311 \text{ rad}$$

b) $72^{\circ}28'$

Resolución

$$\text{Apta } 1,264760 \text{ rad}$$

c) $26^{\circ}20'$

Resolución.

$$\text{Apta } 0,459595 \text{ rad}$$

EJERCICIO 3 . Convertir a radianes.

a) $16^{\circ}20'45''$

Resolución

$$16^{\circ}20'45'' = 16^{\circ} + 20' + 45''$$

$$= 16^{\circ} + 0.3333^{\circ} + 0.0125^{\circ}$$

$$16^{\circ}20'45'' = 16.3458^{\circ}$$

$$= 16.3458^{\circ} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180}$$

$$= 16.3458^{\circ} \times 0.017453 \text{ rad}$$

$$16^{\circ}20'45'' = 0.285281 \text{ rad} \quad \text{Rpta}$$

Convertir los 45 a grados sexagesimales

$$45'' = 45'' \times \frac{1}{3600^{\circ}} = 0.0125^{\circ}$$

$$45' = 0.125^{\circ}$$

Convertir los 20 a grados sexagesimales

$$20' = 20' \times \frac{1}{60^{\circ}} = 0.333^{\circ}$$

$$20^{\circ} = 0.333^{\circ}$$

b) $27^{\circ}40'36''$

Resolución

$$\text{Rpta. } 0.4830408 \text{ rad}$$

c) $32^{\circ}72'1080''$

Resolución.

$$\text{Rpta. } 0.5646755 \text{ rad}$$

EJERCICIO 4 Convertir a grados sexagesimales

a) $\frac{3\pi}{5}$ rad.

Resolución:

$$\frac{3}{5} \pi \text{ rad} \quad \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108$$

$$\frac{3}{5} \pi \text{ rad} = 108^\circ \quad \text{Rpta.}$$

b) $\frac{2\pi}{9}$ rad.

Resolución:

c) $\frac{7\pi}{6}$ rad.

Resolución:

d) $\frac{4\pi}{15}$ rad.

Resolución:

EJERCICIO 5 Convertir a grados sexagesimales

a) 6,45 rad

Resolución:

$$6,45 \text{ rad} = 6,45 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

Factor de Conversión

$$= 6,45 \times 57,2957^\circ$$

$$= 369,557265^\circ$$

$$= 369^\circ + 0,557265^\circ$$

$$= 369^\circ + \boxed{33,4359'}$$

$$= 369^\circ + 33' + 0,4359''$$

$$= 369^\circ + 33' + \boxed{26,154''}$$

$$6,45 \text{ rad} = 369^\circ 33' 26'' \quad \text{Rpta.}$$

Convertimos 0,557 265° a minutos sexag.

$$0,557 265^\circ = 0,557 26^\circ \times \frac{60'}{1^\circ}$$

$$\therefore 0,557 265^\circ = 33,4359'$$

Convertimos 0,4359' a segundos sexag.

$$0,4359' = 0,4359' \times \frac{60''}{1'}$$

$$0,4359' = 26,154''$$

b) 13,12 rad

Resolución.

Rpta. $751^{\circ}43'14''$

c) 32,06 rad

Resolución.

Rpta. $1836^{\circ}54'9''$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES TIPO I.B.M

Ejercicio 1 Si $30^{\circ} 2' 5''$ y $7^{\circ} 3' 5''$ son las medidas de un mismo ángulo en grados sexagesimales y centesimales respectivamente. Hallar la medida en radianes. Si $30^{\circ} - 2' 5'' = 1$

A) $\pi/60$ B) $\pi/108$ C) $\pi/120$ D) $\pi/216$ E) $\pi/240$

Resolución.



Por dato

$$30^{\circ} - 2' - 5'' = 1$$

De la fórmula:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{180 R}{\pi} \\ C = \frac{200 R}{\pi} \end{cases} \quad (2)$$

Reemplazamos (2) en (1) $3 \left(\frac{200 R}{\pi} \right) - 2 \left(\frac{180 R}{\pi} \right) = 1$

$$\frac{600 R}{\pi} - \frac{360 R}{\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{240 R}{\pi} = 1$$

despejando "R" obtenemos

$$R = \frac{\pi}{240} \text{ rad} \quad \text{Rpta. E}$$

Ejercicio 2 Determine la medida de un ángulo, la que se verifique la relación.

$$\frac{SC}{C^2 + S^2} = \frac{9}{181} (C - S)$$

A) $\pi/3$ rad

B) $\pi/4$ rad

C) $\pi/2$ rad

D) $\pi/5$ rad

E) $\pi/6$ rad

Resolución:

• De la fórmula:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{180 R}{\pi} \\ C = \frac{200 R}{\pi} \end{cases} \quad (1)$$

Reemplazamos los valores de la expresión (1) en la expresión (condición), obteniendo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{180 R}{\pi} \right) \left(\frac{200 R}{\pi} \right) \\ & \left(\frac{200 R}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{180 R}{\pi} \right)^2 = \frac{9}{181} \left(\frac{200 R}{\pi} - \frac{180 R}{\pi} \right) \\ & \left(\frac{40\,000 R^2}{\pi^2} + \frac{32\,400 R^2}{\pi^2} \right) = \frac{9}{181} \left(\frac{20 R}{\pi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 360 \cdot 100 \cdot \frac{1}{\pi} \\ 72 \cdot 400 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 360 \\ 180 \end{array} \right\} \frac{200}{\pi} \quad \text{Simplificando}$$

En el primer miembro obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} 360 \\ 720 \end{array} \right\} \frac{180}{\pi} \quad \text{despejamos "R"}$$

$$R = \frac{280}{720} \cdot \frac{180}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 3 A convertir $\frac{16x}{9}$ radianes a sistema sexagesimal se obtuvo 640. Hallar el valor de x

A) 2

B) 9

C) 40

D) 16

E) 4

Resolución:

Del enunciado obtenemos que

$$\frac{16x}{9} \pi \text{ rad} = 640^\circ \quad \text{pero } \pi \text{ rad} < > 180$$

$$\frac{16x}{9} (180^\circ) = 640^\circ, \text{ despejamos "x"}$$

$$x = \frac{640 \cdot 9}{16 \cdot 180^\circ} = \frac{40}{20} \Rightarrow x = 2$$

Luego, $x = 2^2 = 4 \Rightarrow x = 4 \quad \text{Rpta. E}$

Ejercicio 4 Hallar el ángulo en radianes que satisface $1 + \frac{S}{3} + \frac{C}{2} = \frac{160}{\pi} R + R$

Donde S, C y R representan el número de grados sexagesimales, centesimales y radianes respectivamente

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 2

E) 1

Resolución:

Sabemos que

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\begin{array}{l} S = \frac{180}{\pi} R \\ C = \frac{200}{\pi} R \end{array}$$

Los valores hallados los reemplazamos en la expresión

$$1 + \frac{S}{3} + \frac{C}{2} = \frac{160 R}{\pi} + R \Rightarrow 1 + \frac{180 R}{3} + \frac{200 R}{2} = \frac{160 R}{\pi} + R$$

$$1 + \frac{60 R}{\pi} + \frac{100 R}{\pi} = \frac{160 R}{\pi} + R \Rightarrow 1 + \frac{160 R}{\pi} = \frac{160 R}{\pi} + R \quad | - \frac{160 R}{\pi} \quad | \cdot \pi \quad \boxed{R = 1} \quad \text{Rpta. E}$$

Ejercicio 5 Se ha medido un ángulo en los sistemas conocidos, en grados y radianes, resultando: $S = 2R + x$, y $C = 3R + x$. Hallar "x"

A) 4R

B) 5R

C) 6R

D) 7R

E) 8R

Resolución:

Hacemos que:

$$S = 2R + x \quad (1)$$

$$C = 3R + x \quad (2)$$

Sabemos por fórmula:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \quad (3)$$

Reemplazamos (1) y (2) en (3)

$$\frac{2R + x}{9} = \frac{3R + x}{10}$$

$$10(2R + x) = (3R + x)$$

$$20R + 10x = 3R + x$$

$$\boxed{x = 7R} \quad \text{Rpta. D}$$

Ejercicio 6 Se mide un ángulo en los sistemas conocidos, en grados y radianes (S, C y R). Hallar "m" si:

$$m(C + S) = n(C - S) \quad (1) \quad \text{y} \quad m + n = 760 \quad (2)$$

A) $2(200 - \pi)$

B) $2(200 + \pi)$

C) 38

D) $200 + \pi$

E) 200π

Resolución:

De la expresión (1)

$$m(C + S) = n(C - S)$$

obtenemos:

$$\frac{m}{n} = \frac{C - S}{C + S} \quad (3)$$

Por fórmula:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\left[\begin{array}{l} S = \frac{180 R}{\pi} \\ C = \frac{200 R}{\pi} \end{array} \right. \quad (4)$$

Los valores de (4) los reemplazamos en (3)

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{200 R}{180 R} + \frac{180 R}{200 R}}{\frac{\pi}{\pi}} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\pi}{380 R}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{19} \Rightarrow n = 19 m \quad 5$$

Reemplazamos (5) en (2)

$$m + n = 760$$

$$m + 19m = 760 \Rightarrow 20m = 760$$

$$m = \frac{760}{20} \Rightarrow m = 38 \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 7 Se mide un ángulo en grados sexagesimales y centesimales, los números hallados sumados resulta 180. Hallar el ángulo en radianes

A) $\frac{14\pi}{19}$

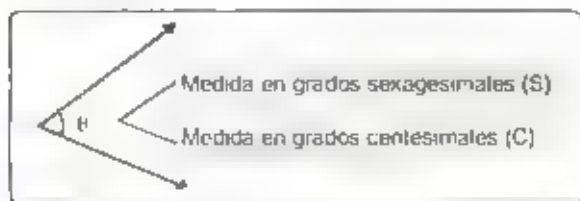
B) $\frac{12\pi}{19}$

C) $\frac{11\pi}{19}$

D) $\frac{10\pi}{19}$

E) $\frac{9\pi}{19}$

Resolución:



Por dato:

$$S + C = 180 \quad 1$$

De la fórmula:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\left[\begin{array}{l} S = \frac{180 R}{\pi} \\ C = \frac{200 R}{\pi} \end{array} \right. \quad 2$$

Reemplazamos en (2) en (1),

$$\frac{180 R}{\pi} + \frac{200 R}{\pi} = 180$$

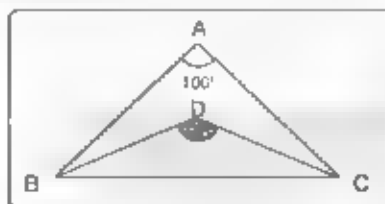
$$\frac{380 R}{\pi} = 180$$

$$R = \frac{180 \pi}{380} = \frac{9\pi}{19} \quad \text{Rpta. E}$$

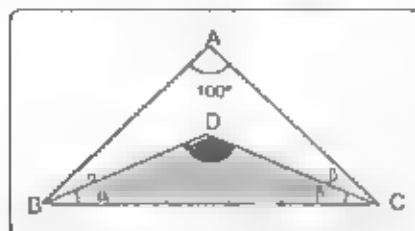
Ejercicio 8 Si BD y CD son bisectrices, hallar D en radianes

A) $\frac{14\pi}{17}$ B) $\frac{3\pi}{5}$ C) $\frac{5\pi}{9}$

D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{9}$



Resolución:



- En el $\triangle ABC$

Σ 3 ángulos internos = 180° ... (Propiedad)

$$2\alpha + 2\beta + 100^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 80^\circ$$

$$2(\alpha + \beta) = 80^\circ$$

$$\alpha + \beta = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \Rightarrow \dots \quad \alpha + \beta = 40^\circ \quad \dots$$

- En el $\triangle BDC$, Σ 3 ángulos internos = 180° (Propiedad)

$$\alpha + \hat{D} + \beta = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} + (\alpha + \beta) = 180^\circ \quad \dots$$

Reemplazamos (1) en (2) $\hat{D} + 40^\circ = 180^\circ$

$$\hat{D} = 140^\circ \quad (\text{Convertimos los grados a radianes})$$

$$\hat{D} = 140^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \Rightarrow \hat{D} = \frac{7\pi}{9} \text{ rad} \quad \text{Rpta. E}$$

Ejercicio 9 En un triángulo sus ángulos están en progresión aritmética de razón 20° . Hallar la diferencia del mayor y menor en radianes

A) $\frac{2\pi}{9}$

B) $\frac{\pi}{3}$

C) $\frac{\pi}{9}$

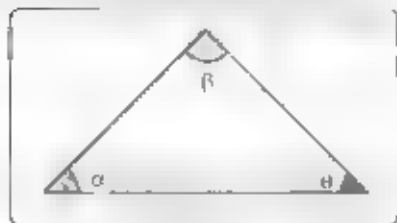
D) $\frac{5\pi}{18}$

E) $\frac{\pi}{4}$

Resolución:

Como los tres ángulos del triángulo están en progresión aritmética de razón 20° , estos estarán representados de la siguiente manera:

- Primer ángulo α (ángulo menor)
 Segundo ángulo $\beta = \alpha + 20^\circ$
 Tercer ángulo $\theta = \alpha + 40^\circ$ (ángulo mayor)
 Por propiedad $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$



Luego $\alpha + (\alpha + 20^\circ) + (\alpha + 40^\circ) = 180^\circ$

$$3\alpha + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ - 60^\circ$$

$$3\alpha = 120^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{120^\circ}{3} = 40^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ángulo} \\ \text{menor} \end{array} \right.$$

Ahora, calculamos el valor del ángulo mayor $\alpha + 40^\circ = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$

$$\therefore \text{Ángulo mayor} = 80^\circ$$

incógnita $\text{Ángulo mayor} - \text{Ángulo menor} = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$

Convertimos los 40° a radianes, veamos $40^\circ = 40^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \Rightarrow 40^\circ = \frac{2}{9} \pi \text{ rad}$ **Apta. a**

Ejercicio 10 Se ha medido un ángulo en grados S, grados C y en radianes (Resultado R). Hallar lo que mide dicho ángulo en radianes Si: $2S - C = 2R^2$

- A) π B) 80 C) $\frac{180}{\pi}$ D) $\frac{80}{\pi}$ E) $\frac{8}{\pi}$

Resolución:

Por fórmula:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \\ S = \frac{180}{\pi} R \\ C = \frac{200}{\pi} R \end{array} \right.$$

Los valores hallados, los reemplazamos en la expresión.

$$2S - C = 2R^2 \Rightarrow 2 \left(\frac{180}{\pi} R \right) - \left(\frac{200}{\pi} R \right) = 2R^2$$

$$\frac{160}{\pi} R = 2R^2 \Rightarrow \frac{80}{\pi} = R \quad R = \frac{80}{\pi} \text{ rad} \quad \text{Apta. D}$$

Ejercicio 11 Sabiendo que $\pi/11$ rad. equivale a A B° Calcular "C A B"

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

Resolución

Por condición $\pi \text{ rad} < A+B+C < 2\pi \text{ rad}$

$$\frac{180^\circ}{11} < A+B+C < \frac{360^\circ}{11}$$

Pero $\pi \text{ rad} < 180^\circ$

Efectuamos la división

$$\begin{array}{r} 240^\circ \overline{) 11} \\ 22 \quad 21^\circ \\ \underline{20} \\ 11 \end{array}$$

$$9 \times 9 \times 1 \quad 9 \times 60^\circ = 540^\circ$$

$$\begin{array}{r} 540^\circ \overline{) 11} \\ 44 \quad 49^\circ \\ \underline{100} \\ 99 \\ \underline{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180^\circ \overline{) 11} \\ 11 \quad 16^\circ \\ \underline{70} \\ 66^\circ \\ 4^\circ = 4 \times 1^\circ = 4 \times 60' = 240' \end{array}$$

Luego $\frac{180^\circ}{11} = 16^\circ 21' 49'' \approx 16^\circ 22'$

Reemplazamos (2) en (1)

$$16^\circ 21' 49'' < A+B+C < 16^\circ 21' 49'' + 2^\circ$$

Donde $A = 16$

$$B = 21$$

$$C = 49$$

C A B 12 Rpta. D

Ejercicio 12 Calcular un ángulo en radianes, siendo S y C los números de grados además

$$(C+S)^2 - (C-S)^2 = \frac{C}{C} + \frac{S}{S} + 21$$

A) $\frac{\pi}{10}$

B) $\frac{\pi}{15}$

C) $\frac{\pi}{20}$

D) $\frac{\pi}{30}$

E) $\frac{\pi}{60}$

Resolución

Desarrollamos cada binomio al cuadrado, obteniendo

$$(C+S)^2 - (C-S)^2 = \frac{C+S}{C-S} + 21$$

$$(C^2 + 2CS + S^2) - (C^2 - 2CS + S^2) = \frac{C+S}{C-S} + 21$$

$$C^2 + 2CS + S^2 - C^2 + 2CS - S^2 = \frac{C+S}{C-S} + 21$$

$$4CS = \frac{C+S}{C-S} + 21$$

Por fórmula:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$S = \frac{180 R}{\pi}$$

$$C = \frac{200 R}{\pi}$$

Los valores hallados, los reemplazamos en (1)

$$4 \left(\frac{200 R}{\pi} \right) \left(\frac{180 R}{\pi} \right) = \frac{200 R + 180 R}{\frac{200 R}{\pi} - \frac{180 R}{\pi}} + 21$$

$$\frac{4 \times 200 \times 180 R^2}{\pi^2} = \frac{380 R}{\frac{20 R}{\pi}} + 21 \Rightarrow \frac{4 \times 200 \times 180 R^2}{\pi} = 19 + 21$$

$$\frac{4 \times 200 \times 180 R^2}{\pi} = 40 \Rightarrow \frac{14400 R^2}{\pi} = 40$$

$$l_1 = l_2$$

Luego $R^2 = \frac{\pi}{360}$ extraemos raíz cuadrada a ambos miembros

$$R = \frac{\pi}{60} \text{ rad} \quad \text{Rpta. E}$$

Ejemplo 15 Si se cumple que $S = 36 \times \frac{1}{\pi}$ y $C = 10 \times \frac{1}{\pi}$

Donde S y C representan el número de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo respectivamente. Halle el equivalente en radianes

A) $\frac{3}{15}$

B) $\frac{2}{15}$

C) $\frac{24}{15}$

D) $\frac{1}{13}$

E) N.A

Resolución.

Hacemos que $S = 36 \times \frac{1}{\pi}$ y $C = 10 \times \frac{1}{\pi}$

Por fórmula $\frac{S}{36} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\pi}$

Reemplazamos (I) y (II) en (I)

$$36 \left(x + \frac{1}{\pi} \right) = 10 \left(x + \frac{1}{\pi} \right) \Rightarrow 4 \left(x + \frac{1}{\pi} \right) = x + \frac{1}{\pi}$$

$$4x + \frac{4}{\pi} = x + \frac{1}{\pi} \Rightarrow 4x - x = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi} \Rightarrow 3x = -\frac{3}{\pi} \Rightarrow x = -\frac{1}{\pi} \quad \text{IV}$$

Reemplazamos (V) en (II): $S = 36 \left(\frac{5}{3\pi} + \frac{1}{\pi} \right) = 36 \left(\frac{5+3}{3\pi} \right) = 36 \left(\frac{8}{3\pi} \right) = \frac{24}{\pi}$

Convertimos el número de grados sexagesimales a radianes.

Por fórmula: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$ Donde $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{180} = \frac{\pi}{36}$

Reemplazamos el valor de "S" en esta última expresión

$$R = \left(\frac{24}{\pi} \right) \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{15} \Rightarrow R = \frac{2}{15} \text{ rad} \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 14 Calcular "n" S $C + S + C + S + C + S + \dots + C + S = 3600 \frac{R}{\pi}$

2n sumandos

- A) 1 B) 10 C) 30 D) 40 E) 50

Resolución.

Como en el primer número de la expresión hay "2n" sumandos, esto quiere decir que hay mitad de término para cada sistema, o sea:

$$C + C + C + \dots + C + \frac{S + S + S + \dots + S}{2} = 3600 \frac{R}{\pi}$$

"n" sumandos "n" sumandos

$$Cn + \frac{Sn}{2} = 3600 \frac{R}{\pi}$$

$$n(C + S) = 3600 \frac{R}{\pi} \quad \text{I}$$

De la fórmula

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\begin{cases} S = 180 R \\ C = 200 R \end{cases}$$

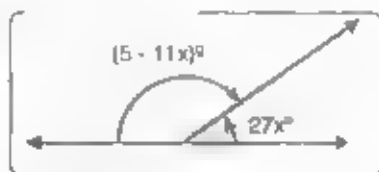
Los valores, hallados los reemplazamos en [1]

$$n \left(\frac{200 R}{\pi} + \frac{180 R}{\pi} \right) = 3800 \frac{R}{\pi} \Rightarrow n \left(\frac{380 R}{\pi} \right) = \frac{3800 R}{\pi}$$

$$n = \frac{3800}{380} \Rightarrow n = 10 \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 15 De la figura mostrada, calcular "x"

- A) 2 B) 3
C) 4 D) 5
E) 6

**Resolución.**

- Como se podrá observar el ángulo $(5 - 11x)^\circ$ gira en sentido horario si le cambiamos de sentido el ángulo sería $(11x - 5)^\circ$ (Sentido Antihorario)
- De la figura

$$(11x - 5)^\circ + 27x^\circ = 180^\circ$$

convertimos al
Sistema Sexagesimal

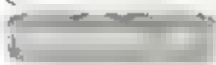
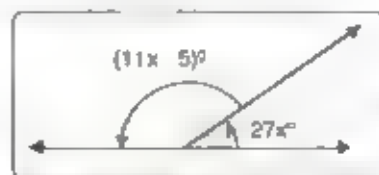
$$(11x - 5)^\circ \times \frac{6}{10} + 27x^\circ = 180^\circ$$

$$(11x - 5)^\circ \times \frac{6}{10} + 27x^\circ = 180^\circ$$

$$99x^\circ - 45^\circ + 270x^\circ = 1800^\circ$$

$$369x^\circ = 1845^\circ$$

$$x = 5 \quad \text{Rpta. D}$$



$$x < > 10, \\ \text{donde } x < > \frac{9^\circ}{10^\circ}$$

Ejercicio 16 Hallar la medida en el sistema internacional si se sabe que se cumple

$$S = x^2 + 11 \quad \text{y} \quad C = 9x - 5$$

- A) $\frac{\pi}{6}$ rad B) $\frac{\pi}{5}$ rad C) $\frac{\pi}{6}$ rad D) $\frac{2\pi}{3}$ rad E) $\frac{2\pi}{5}$ rad

Resolución.

Sabemos que $\frac{S}{C} = \frac{7}{10}$ Reemplazando valores en esta expresión obtenemos

$$\frac{x^2 + 11}{9x - 5} = \frac{9}{10} \Rightarrow 10(x^2 + 11) = 9(9x - 5)$$

$$10x^2 + 110 = 81x - 45$$

$$10x^2 - 81x + 155 = 0$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \downarrow \\ 10x \quad \quad 31 \quad \quad -5 \end{array}$$

Factorizamos por el Método del Aspa:

donde $\frac{(10x - 31)(x - 5)}{10x - 31} = 0$

i) $10x - 31 = 0$

ii) $x - 5 = 0$

$$x = \frac{31}{10}$$

$$\therefore x = 5$$

igualamos cada factor a cero.

• Tomamos el valor de $x = 5$, en la expresión $S = x^2 + 11$, obteniendo $S = 5^2 + 11 \Rightarrow S = 36$.

Ahora, convertimos los 36° a radianes (Sistema Internacional); Veamos

(Fórmula)

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi \text{ rad}}$$

$$\Rightarrow \frac{36^\circ}{180} = \frac{R}{\pi \text{ rad}}$$

$$R = \frac{\pi \text{ rad}}{5} \text{ Apta. B}$$



**EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE
LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES**

NIVEL I

Ejercicio 1 Se ha medido un ángulo en grados S y radianes R. Calcular dicho

ángulo en radianes Si $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{R}{8}$

- A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{2\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{6}$

Ejercicio 2 Simplificar

$$M = \frac{180(C + S)}{19SC}$$

- A) 1 B) 1.5 C) 2 D) 2.5 E) 3

Ejercicio 3 Si

$S = \#$ de grados sexag. de un ángulo

$C = \#$ de grados centes. de un mismo ángulo

Además $\frac{2\pi}{5} = \frac{180}{C} = 1$ Calcular el valor de S

- A) 360° B) 362° C) 180° D) 182° E) 92°

Ejercicio 4 Siendo S y C las medidas de un ángulo en grados sexag. y centes. respectivamente. Hallar dicho ángulo en radianes Si

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{C} = \frac{19}{18}$$

- A) 0.05π B) 0.04π C) 0.03π
 D) 0.02π E) 0.01π

Ejercicio 1 Calcular el valor de:

$$O = \frac{40^\circ + \frac{\pi}{3} \text{ rad}}{6^\circ + \frac{\pi}{10} \text{ rad}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 2 Un ángulo mide $(x-1)^\circ$ pero en grados centesimales $(x+1)$. Hallar el valor de " x ".

- A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 25

Ejercicio 3 Reducir la expresión

NIVEL II

Ejercicio 1 Hallar " α " si

$$4\alpha = 250^\circ - \frac{11}{10} \pi \text{ rad}$$

- A) $6^\circ 30'$ B) $6^\circ 45'$ C) $6^\circ 50'$ D) $6^\circ 25'$ E) $6^\circ 05'$

Ejercicio 2 Hallar " α " en radianes si

$$\alpha = (10^\circ + 99^\circ) (1800)$$

- A) 177π B) 178π C) 179π D) 180π E) 181π

Ejercicio 3 Determine la medida circular del ángulo que cumple:

$$S = 2x^\circ \text{ y } C = x^\circ + 11$$

- A) $\frac{x}{6} \text{ rad}$ B) $\frac{x}{18} \text{ rad}$ C) $\frac{x}{15} \text{ rad}$
 D) $\frac{x}{10} \text{ rad}$ E) $\frac{x}{5} \text{ rad}$

Ejercicio 4 Calcular un ángulo en radianes

$$P = \frac{(C+S)^2 + (C-S)^2}{(C+S)^2 (C-S)^2}$$

- A) $10/9$ B) $100/81$ C) $181/180$
 D) $90/181$ E) 181.19

Ejercicio 5 Halle el ángulo en radianes tal que cumpla las relaciones

$$S = 2n + 2 \text{ y } C = 3n - 4$$

- A) $\pi/7$ B) $\pi/4$ C) $\pi/5$ D) $\pi/3$ E) $\pi/10$

Clave de Respuestas

1 D	2 C	3 B	4 E
5 D	6 B	7 C	8 E

$$Si: 6S + 5C = 1040$$

- A) $\pi/4$ B) $\pi/5$ C) $\pi/3$ D) $\pi/2$ E) π

Ejercicio 6 Los ángulos de un triángulo son:

$$15x^\circ, 10x^\circ \text{ y } \frac{\pi x}{30} \text{ rad}$$

Determine según esto el valor de " x ".

- A) 4 B) 2 C) 3 D) 6 E) 5

Ejercicio 7 Reducir la expresión.

$$P = \frac{\frac{\pi}{5} S + 40 R}{\frac{\pi}{10} C + 30 R}$$

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Ejercicio 8 Calcular el valor de:

$$M = \frac{1^m}{1} + \frac{1^p}{1}$$

- A) 1.24 B) 1.34 C) 1.44 D) 2.24 E) 2.34

Ejercicio 1 Calcular el valor de

$$Q = \left[\binom{C+S}{36} + \binom{C-S}{2} \right] \frac{R}{\pi}$$

- A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 25

Ejercicio 2 Hallar el valor de

$$N = \sqrt{\frac{C+S}{C-S}} + 6 + \sqrt{\frac{C+S}{C-S}} + 8$$

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 9

Ejercicio 3 Señale el menor ángulo que se isolece a

$$A + B = 70^\circ, B + C = 60^\circ, A + C = \pi/5 \text{ rad}$$

- A) 26° B) 10° C) $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$

- D) $\frac{\pi}{16} \text{ rad}$ E) 2°

Ejercicio 4 Halle el ángulo en radianes tal que cumpla con

$$\frac{C+S}{C-S} = \frac{2\pi+3R}{2\pi-3R}$$

- A) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ B) $\frac{3}{2} \text{ rad}$ C) $\frac{2}{5} \pi \text{ rad}$

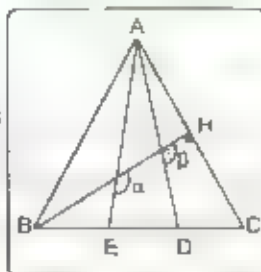
- D) $\frac{5}{3} \pi \text{ rad}$ E) $\frac{3}{5} \pi \text{ rad}$

Ejercicio 5 La figura es un triángulo equilátero, AD y AE dividen al vértice "A" en tres ángulos iguales. Hallar $(\alpha + \beta)$ en radianes

- A) $\frac{7}{6} \pi$ B) $\frac{5}{4} \pi$

- C) $\frac{4}{3} \pi$ D) $\frac{11}{8} \pi$

- E) $\frac{17}{12} \pi$



Clave de Respuestas

1. B	2. E	3. D	4. D
5. D	6. D	7. C	8. D
9. D	10. B	11. E	12. C

NIVEL III

Ejercicio 1 Convertir $36^\circ 36' 36''$ a unidades del sistema centesimal.

- A) $40^\circ 67' 78''$ B) $40^\circ 78' 67''$
C) $40^\circ 78' 67''$ D) $40^\circ 68' 78''$
E) $40^\circ 76' 67''$

Ejercicio 2 Convertir $8^\circ 00' + 800''$ a unidades del sistema sexagesimal.

- A) $72^\circ 04' 19''$ B) $72^\circ 02' 19''$
C) $72^\circ 42' 04''$ D) $72^\circ 04' 42''$
E) $72^\circ 02' 42''$

Ejercicio 3 Siendo "S" y "C" lo convencional. Calcular el ángulo en radianes si.

$$\sqrt{\frac{2S-C}{10}} = 2$$

- A) $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ B) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ C) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

- D) $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$ E) $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$

Ejercicio 4 Siendo "S" y "C" los números de grados sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo. Calcular

$$Q = \frac{S^2 + C^2 + S \cdot C}{S \cdot C} - \frac{1}{90}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 1 Siendo "S" "C" y "R" las medidas de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial. Hallar un ángulo en radianes

si cumple con
$$\frac{2}{R} \pi + \frac{180}{S} = \frac{C + 200}{C}$$

- A) $\pi/2$ B) 4π C) π D) 8π E) 2π

Ejercicio 2 Los ángulos internos de un triángulo son: $(15K)^\circ$, $(40K)^\circ$; $\left(\frac{K \cdot \pi}{20}\right)$ rad. Calcular el valor del menor de dichos ángulos

- A) 48° B) 45° C) 36° D) 53° E) 28°

Ejercicio 3 Determine la medida circular de un ángulo, si se cumple que:

$$\pi \left(\frac{C+S}{C-S} \right) = 16 \frac{R^2}{\pi} - 17 \pi$$

- A) $\pm \frac{2}{3} \pi$ rad. B) $\pm \frac{2}{5} \pi$ rad. C) $\pm \frac{3}{4} \pi$ rad.
D) $\pm \frac{3}{2} \pi$ rad. E) $\pm \frac{3}{8} \pi$ rad.

Ejercicio 4 Calcular el valor de

$$R = \frac{1^0}{4^0} + \frac{7}{3} + \frac{54}{25^0}$$

- A) 45 B) 47 C) 49 D) 53 E) 58

Ejercicio 5 "K" es el número de grados sexagesimales que contiene el ángulo $1,35 \pi$ rad. "M" es el número de grados centesimales que contiene el ángulo $1,45 \pi$ rad. Calcular (M · K)

- A) 45 B) 47 C) 49 D) 52 E) 56

Ejercicio 6 El número de grados sexagesimales (S) y el número de grados centesimales (C) que contiene un ángulo satisfacen la siguiente igualdad.

$C = S + 2\sqrt{S}$. Calcular el valor del ángulo en radianes

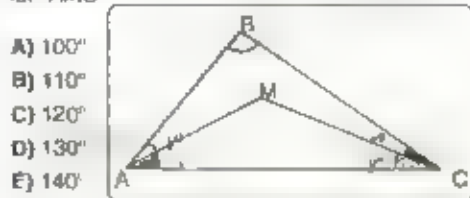
- A) $\frac{3}{2} \pi$ rad. B) $\frac{9}{4} \pi$ rad. C) $\frac{7}{4} \pi$ rad.
D) $\frac{9}{5} \pi$ rad. E) $\frac{6}{3} \pi$ rad.

Ejercicio 7 Si $A_n = \frac{\pi}{n}$ rad. $B_n = (n^\circ)^\circ$ y $C_n = (10^n)^\circ$. ¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- I $A_3 > B_3 + C_3$ II $A_4 + B_2 > C_6$
III $A_8 - 3 B_1 = C_3$

- A) I y II B) II y III C) I y III
D) Los tres E) Ninguno

Ejercicio 8 Del gráfico: $\hat{ABC} = 85^\circ$. Calcular \hat{AMC}



- A) 100°
B) 110°
C) 120°
D) 130°
E) 140°

Ejercicio 9 Un ángulo "α" es medido por tres alumnos, obteniendo los siguientes resultados

- El primer alumno obtuvo (S)°
- El segundo alumno obtuvo (A)°
- El tercer alumno obtuvo (B)°

Calcular el valor de:
$$M = \frac{2}{3} \left(\frac{S^2}{A \cdot B} \right)$$

- A) 10^{-2} B) 10^{-4} C) 10^{-3} D) 10^{-6} E) 10^{-5}

Ejercicio El número de grados sexagesimales (S) y el número de grados centesimales (C) que contiene un mismo ángulo se expresan de la siguiente forma

$S = 3x^2 + 3$ y $C = 30x + 20$. Indicar el ángulo en radianes

- A) $\frac{17}{10} \pi$ rad B) $\frac{19}{20} \pi$ rad C) $\frac{17}{20} \pi$ rad
D) $\frac{27}{40} \pi$ rad E) $\frac{\pi}{10}$ rad

Ejercicio Determine la medida circular de un ángulo si se tiene que el cuadrado de la diferencia de los números de grados sexagesimales y centesimales de dicho ángulo, es a la suma de dichos números como 5 es a 19

- A) $\frac{\pi}{6}$ rad B) $\frac{\pi}{5}$ rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{\pi}{4}$ rad E) $\frac{\pi}{2}$ rad

Ejercicio En la expresión

$$5S \sqrt{S} - 3 \sqrt{S^3} = 296$$

Sabiendo que "S" representa un número entero de grados sexagesimales que posea un ángulo, hallar dicho ángulo en radianes.

- A) $\frac{4\pi}{45}$ B) $\frac{7\pi}{45}$ C) $\frac{3\pi}{23}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

Ejercicio Si los números de grados sexagesimales (S) y centesimales (C) que contiene un ángulo, se relacionan del siguiente modo

$$C - S = x + \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

¿Cuál es la medida del menor ángulo que verifica la condición anterior?

- A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{20}$ rad C) $\frac{\pi}{40}$ rad
D) $\frac{\pi}{10}$ rad E) $\frac{\pi}{60}$ rad

Ejercicio Se ha medido un ángulo en grados S y C respectivamente. Los números hallados satisfacen la igualdad

$$19(C^2 + S^2) = 181K(C^2 - S^2)$$

Hallar el valor de "K"

- A) π^2 B) π C) $1/2$ D) 2 E) 1

Ejercicio Siendo "a" el número de minutos sexagesimales y "b" el número de minutos centesimales que mide el mismo ángulo. Calcular el valor de dicho ángulo en radianes, sabiendo que: $a = 27x$, $b = 25(x + 4)$

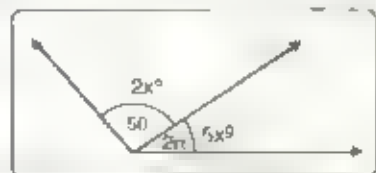
- A) $\frac{\pi}{60}$ B) $\frac{\pi}{20}$ C) $\frac{\pi}{30}$ D) $\frac{\pi}{50}$ E) $\frac{\pi}{100}$

Ejercicio : Dada la relación:

$$\frac{3\pi}{4} + \pi x = 90^\circ \text{ y además se tiene el gráfico.}$$

Calcular el valor de $E = \frac{60}{\pi x} + \frac{S}{1C}$

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Clave de Respuestas

1. A	2. A	3. C	4. C
5. E	6. B	7. D	8. C
9. B	10. D	11. C	12. D
13. B	14. C	15. D	16. A
17. D	18. E	19. E	20. B

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMATICA

Organizados por las Academias **César Vallejo, Yritce, Pitágoras, Sigma, Alfa.**

Problema 1 Si un ángulo mide 17.3075° expresar dicha medida en grados, minutos y segundos sexagesimales.

- A) $17^\circ 18' 27''$ B) $17^\circ 27' 18''$ C) $17^\circ 18' 36''$ D) $17^\circ 21' 37''$ E) $17^\circ 18' 45''$

Resolución

La expresión 17.3075° se puede escribir de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 17.3075^\circ &= 17^\circ + 0.3075^\circ \\
 &= 17^\circ + 18' 45'' \\
 &= 17^\circ + 18' + 0.45' \\
 &= 17^\circ + 18' + 27'' \\
 &= 17^\circ 18' 27''
 \end{aligned}$$

$$17.3075^\circ = 17^\circ 18' 27'' \quad \text{Rpta. A}$$

⇒ **Convertimos:** 0.3075° a minutos.

$$0.3075 = 0.3075^\circ \times \frac{60'}{1^\circ}$$

$$0.3075^\circ = 18.45'$$

⇒ **Convertimos:** $0.45'$ a segundos sexagesimales

$$0.45' = 0.45' \times \frac{60''}{1'}$$

$$0.45' = 27''$$

Problema 2 La medida de un ángulo en grados sexagesimales es $(20 - x)^\circ$ y en el sistema centesimal $(20 + x)^\circ$. Calcular la medida de dicho ángulo en radianes.

- A) $\frac{\pi}{19}$ rad. B) $\frac{2\pi}{19}$ rad. C) $\frac{3\pi}{19}$ rad. D) $\frac{4\pi}{19}$ rad. E) $\frac{5\pi}{19}$ rad

Resolución:

- Aplicando la fórmula que relaciona el sistema sexagesimal y centesimal, o sea: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{20 - x}{9} &= \frac{20 + x}{10} \Rightarrow 10(20 - x) = 9(20 + x) \\
 200 - 10x &= 180 + 9x \\
 20 &= 19x \\
 20 &= x \\
 19 &= x
 \end{aligned}$$

• Sea el ángulo = α



$(20 - x)^\circ$ = medida en grados sexages.

$(20 + x)^\circ$ = medida en grados centes.

Reemplazamos el valor de $x = \frac{20}{19}$ en la expresión

$$\alpha = (20 - x)^\circ \Rightarrow \alpha = \left(20 - \frac{20}{19}\right)^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360}{19}^\circ$$

Convertimos las $\frac{360^\circ}{19}$ a radianes, veamos

$$\alpha = \frac{360^\circ}{19} \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{19} \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right) = \frac{2\pi}{19} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{19} \text{ rad.} \quad \text{Rpta. B}$$

Problema 3 Sabiendo que α y θ son complementarios, si, " α " mide $(8x)^\circ$ y " θ " mide $(2x - 2)^\circ$ Hallar la diferencia de " α " y " θ " expresado en radianes

A) $\pi/10$

B) $\pi/5$

C) $3\pi/10$

D) $\pi/4$

E) $\pi/3$

Resolución.

• De acuerdo al enunciado $\alpha + \theta = 90^\circ$

• Convertimos $\alpha = (8x)^\circ$ a grados sexagesimales $\alpha = (8x)^\circ = (8x)^\circ \times \left(\frac{9^\circ}{10^\circ}\right) \Rightarrow \alpha = \left(\frac{72}{10}x\right)^\circ$ II

Por dato $\theta = (2x - 2)^\circ$ II

Reemplazamos (II) y (II) en (I)

$$\left(\frac{72}{10}x\right)^\circ + (2x - 2)^\circ = 90^\circ \Rightarrow \frac{72}{10}x + 2x - 2 = 90$$

$$\frac{92x}{10} = 92 \Rightarrow x = 10$$

Reemplazamos el valor de $x = 10$ en (II) y (II)

De II) $\alpha = \left(\frac{72}{10}x\right)^\circ = \left(\frac{72}{10} \cdot 10\right)^\circ \Rightarrow \alpha = 72^\circ$

De II) $\theta = (2x - 2)^\circ = (2 \cdot 10 - 2)^\circ \Rightarrow \theta = 18^\circ$

Luego $\alpha - \theta = 72^\circ - 18^\circ = 54^\circ \rightarrow$ convertimos a radianes

$$\alpha - \theta = 54^\circ = 54^\circ \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right) = \frac{3\pi}{10} \text{ rad} \quad \text{Rpta. C}$$

Recordar que:

$$9^\circ < 10^\circ$$

Problema 4 Entre las medidas sexagesimal y radial de un ángulo α , existe la relación $S\pi - 156R = 12\pi$, calcular el ángulo en radianes

A) $\pi/3$

B) 2π

C) $\pi/2$

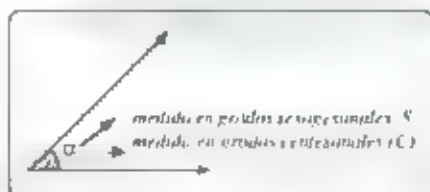
D) $3\pi/2$

E) N.A

Resolución.

• De la fórmula: $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$ obtenemos

$$S\pi = 180R \quad , \quad \text{(*)}$$



Reemplazamos (*) en la expresión.

$$S\pi - 156R = 12\pi$$

$$180R - 156R = 12\pi$$

$$24R = 12\pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

El ángulo " α " en radianes es igual a: $\pi/2$ rad.

Rpta. C.

Problema 5 Siendo S y C los números convencionales y además se verifica la relación

$$\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{\circ} < > \left(\frac{3C}{b+2}\right)^{\circ}$$

Calcule el valor de $E = 20a - 27b$

A) 54

B) 48

C) 34

D) 28

E) 14

Resolución.

• Convertimos los $\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{\circ}$ a grados sexagesimales

$$\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{\circ} = \left(\frac{5S}{a+1}\right)^{\circ} \times \frac{9^{\circ}}{10^{\circ}} = \left(\frac{9S}{2(a+1)}\right)^{\circ} \Rightarrow \left(\frac{5S}{a+1}\right)^{\circ} = \left(\frac{9S}{2(a+1)}\right)^{\circ} \quad (I)$$

Reemplazamos (I) en la expresión

$$\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{\circ} < > \left(\frac{3C}{b+2}\right)^{\circ}$$

$$\left(\frac{9S}{2(a+1)}\right)^{\circ} < > \left(\frac{3C}{b+2}\right)^{\circ} \Rightarrow \frac{9S}{2(a+1)} = \frac{3C}{b+2}$$

$$\frac{3S}{2(a+1)} = \frac{C}{b+2} \Rightarrow \frac{S}{C} = \frac{2(a+1)}{3(b+2)} \quad , \quad (II)$$

• Por fórmula $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \frac{S}{C} = \frac{9}{10}$ (II)

Reemplazamos (II) en (I)

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{2(a+1)}{3(b+2)}$$

$$27b + 54 = 20a + 20$$

$$34 = 20a - 27b$$

$$E = 20a - 27b = 34 \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 6. Siendo "S" y "C" los números de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo, para los cuales se tiene que

$$S = 9(a - 10)^2 \text{ y } C = 10(b - 9)^2 \quad \text{Calcule el valor de } E = \frac{a+b}{a-b}$$

A) 13

B) 15

C) 17

D) 19

E) 21

Resolución.

• De la fórmula $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$ obtenemos.

$$\frac{9(a-10)^2}{9} = \frac{10(b-9)^2}{10}$$

Aplicamos Si: $x^2 = A$

$$x = \pm \sqrt{A}$$

$$(a-10) = \pm \sqrt{(b-9)^2}$$

$$a-10 = \pm (b-9)$$

$$a-10 = +(b-9) \Rightarrow a-b=1$$

$$a-10 = -(b-9) \Rightarrow a+b=19$$

Reemplazamos los valores hallados

en la expresión, obtenemos.

$$E = \frac{a+b}{a-b} = \frac{19}{1} \Rightarrow E = 19 \quad \text{Rpta. D}$$

Problema 7. Determine la medida circular de un ángulo si se tiene que

$$C = 2a + b, \quad S = a + b \text{ y } R = 7\pi - \pi a$$

A) $\frac{\pi}{2}$ rad.

B) $\frac{\pi}{3}$ rad.

C) $\frac{\pi}{4}$ rad.

D) $\frac{\pi}{5}$ rad.

E) $\frac{\pi}{6}$ rad.

Resolución.

- De la fórmula: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$; obtenemos

$$\frac{a+b}{9} = \frac{2a+b}{10} \Rightarrow 10a+10b = 18a+9b \quad \therefore \quad b=8a \quad (I)$$

- De la fórmula $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$, obtenemos $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$ (II)

Reemplazamos los valores de "S" y "R" en (I)

$$\frac{a+b}{180} = \frac{7\pi - 8a}{\pi} \Rightarrow \frac{a+b}{180} = \frac{7 - 8a}{\pi} \quad (III)$$

Reemplazamos (I) en (III). $\frac{a+8a}{180} = \frac{7-8a}{\pi} \Rightarrow \frac{9a}{180} = \frac{7-a}{\pi}$

$$\frac{a}{20} = \frac{7-a}{\pi} \quad a, \text{ resolviendo la ecuación se tiene}$$

$$a = 140 - 20a \Rightarrow 21a = 140 \Rightarrow a = \frac{20}{3}$$

El valor de $a = \frac{20}{3}$ lo reemplazamos en la expresión:

$$S = a+b = \frac{a+8a}{1} = \frac{9a}{1} = 9 \left(\frac{20}{3} \right) = 60^\circ$$

$$S = 60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad \text{Rpta. B'}$$

Problema 8. Determine la medida circular del ángulo que cumple con la igualdad

A) $\frac{\pi}{2}$ rad. B) $\frac{\pi}{3}$ rad. C) $\frac{\pi}{4}$ rad.

D) $\frac{\pi}{5}$ rad. E) $\frac{\pi}{6}$ rad.

$$\frac{S^3 + C^4 + 400R^3}{81 + 100 + \frac{\pi^2}{\pi^2}} = \frac{S}{3} + \frac{C}{4} + 5$$

Resolución

- De la fórmula $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$

$$\begin{cases} S = \frac{180R}{\pi} & (I) \\ C = \frac{200R}{\pi} & (II) \end{cases}$$

Reemplazamos (I) y (II) en la expresión inicial, obteniendo

$$\frac{\left(\frac{180R}{\pi}\right)^5}{81} + \frac{\left(\frac{200R}{\pi}\right)^4}{100} + 400\frac{R^3}{\pi^2} = 180\frac{R}{\pi} + \frac{200R}{4} - 5$$

$$\frac{\left(\frac{180R}{\pi}\right)^4}{36} + \frac{\left(\frac{200R}{\pi}\right)^3}{40} + 5\frac{R^2}{\pi} = \frac{180R}{\pi} + \frac{200R}{4} - 5$$

$$\frac{180 \cdot 180 \cdot (180)^3 R^4}{81 \pi^4} + \frac{200 \cdot (200)^3 R^4}{40 \pi^3} + \frac{400R^3}{\pi} = \frac{110R}{\pi} - 5$$

$$\frac{400(180)^3 R^5}{\pi^4} + \frac{2(200)^3 R^4}{\pi^3} + \frac{400R^3}{\pi^2} = \frac{110R}{\pi} - 5$$

$$\frac{5(180)^3 R^4}{\pi^4} + \frac{5(200)^2 R^3}{\pi^3} + \frac{5R^2}{\pi} = \frac{110R}{\pi} - 5$$

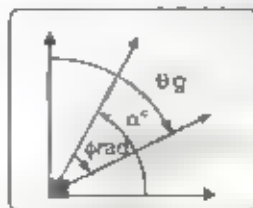
$$\frac{80R \left[\frac{5(180)^3 R^4}{\pi^4} + \frac{5(200)^2 R^3}{\pi^3} + \frac{5R^2}{\pi} \right]}{\left[\frac{5(180)^3 R^4}{\pi^4} + \frac{5(200)^2 R^3}{\pi^3} + \frac{5R^2}{\pi} \right]} = \frac{110R}{\pi} - 5$$

$$80\frac{R}{\pi} = \frac{110R}{\pi} - 5 \Rightarrow 5 = 30\frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad \text{Rpta. E}$$

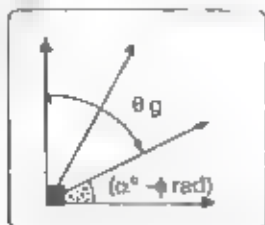
Problema 2 Del gráfico mostrado, calcule el

valor de: $E = \frac{10\pi\alpha + 9\pi\theta}{\pi + 2\phi}$

- A) 3 600 B) 2 400 C) 1 200
D) 1 800 E) 900



Resolución:



De acuerdo a la figura

$$\theta_g + (\alpha^\circ - \phi \text{ rad}) = 90^\circ$$

$$\theta_g \times \frac{\pi \text{ rad}}{200^\circ} + \alpha^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} - \phi \text{ rad} = 90^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

$$\frac{\theta\pi}{200} + \frac{\pi\alpha}{180} - \phi = \frac{\pi}{2}$$

Denos común denominador en el primer miembro

$$\frac{180\pi + 20\pi\alpha - 3600\phi}{3600} = \frac{\pi}{2}$$

$$180\pi + 20\pi\alpha - 3600\phi = 1800\pi$$

$$90\pi + 10\pi\alpha - 1800\phi = 900\pi$$

$$10\pi\alpha + 9\pi\theta = 900\pi + 1800\phi$$

$$10\pi\alpha + 9\pi\theta = 900(\pi + 2\phi)$$

$$\frac{10\pi\alpha + 9\pi\theta}{\pi + 2\phi} = 900 \Rightarrow \therefore E = 900 \quad \text{Rpta. E}$$

2.2 LONGITUD DE ARCO

Una de las muchas aplicaciones de radián unidad angular es el cálculo de longitud de arco. Sea "l" el arco de una circunferencia de radio "r" interceptado por un ángulo "θ" radianes

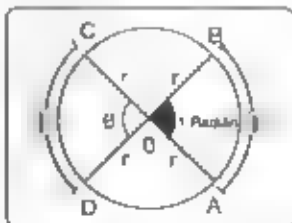
Si el ángulo AOB mide 1 radian, el arco AB tiene longitud "r" reemplazando estos valores en (i), obtenemos

$$\frac{\angle DOB}{\angle AOB} = \frac{DC}{AB}$$

$$\frac{\theta \text{ rad}}{1 \text{ rad}} = \frac{l}{r}$$

De donde $l = r \cdot \theta$; θ en radianes

Siendo: l longitud del arco
r radio de la circunferencia
θ ángulo central expresado en radianes



2.2.1 SECTOR CIRCULAR

Es una parte del círculo como se muestra en la figura, donde el área achurada (sombreada) es el sector circular

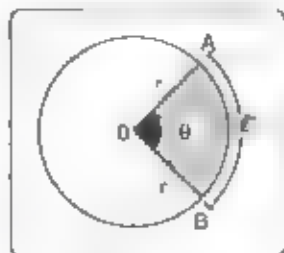
POR GEOMETRÍA:

$$\text{Área Sector Circular} = \frac{\pi r^2 \theta^\circ}{360^\circ}$$

$$S = \frac{\pi r^2 \theta^\circ}{360^\circ} \quad \theta^\circ \text{ en grados sexagesimales}$$

POR TRIGONOMETRÍA

$$\text{Área Sector Circular} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} ; \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad \theta^\circ \text{ en radianes}$$



Esta última expresión se puede escribir así: $S = \frac{1}{2} r \cdot \theta \cdot r$. I

Por fórmula de longitud de arco: $\Rightarrow l = \theta r$. II

Reemplazamos (II) en (I): $\Rightarrow S = \frac{1}{2} l \cdot r$. III

De la ecuación (II), despejamos "r": $\Rightarrow l = \theta r \Rightarrow r = \frac{l}{\theta}$. IV

Reemplazamos (IV) en (III): $\Rightarrow S = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{\theta}$ $S = \frac{l^2}{2 \cdot \theta}$ **Fórmula**



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE SECTOR CIRCULAR



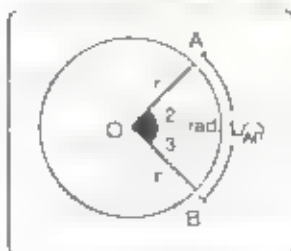
Ejercicio 1 Dada la circunferencia de 24 m de radio. Encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de $2/3$ radianes.

Resolución.

• **Por Fórmula** $L_{AB} = \angle \text{rad} \times \text{radio}$

Reemplazando valores, obtenemos

$$L_{AB} = \frac{2}{3} \times 24 \text{ m} = 16 \text{ m} \Rightarrow \boxed{L_{AB} = 16 \text{ m}} \quad \text{Rpta.}$$



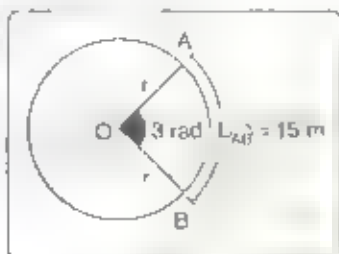
Ejercicio 2 . Encontrar el radio de una circunferencia tal, que un arco de 15 m de longitud, subtiende un ángulo central de 3 rad

• **Por Fórmula:** $L_{AB} = \angle \text{rad} \times \text{radio}$

Reemplazando valores, obtenemos

$$15 \text{ m} = 3 \times r$$

$$r = \frac{15 \text{ m}}{3} \Rightarrow \therefore \underline{r = 5 \text{ m}} \quad \text{Rpta.}$$

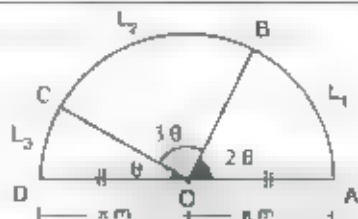
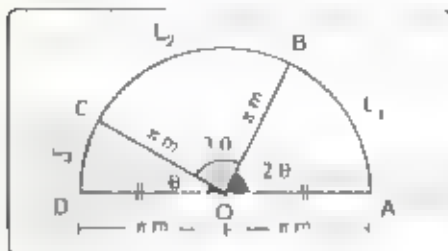


Ejercicio 3 La figura es un semicírculo. Hallar $l + L_1 + L_2$.

A) $\left(\frac{3}{4} \pi^2\right) \text{ m}$ B) $\left(\frac{1}{2} \pi^2\right) \text{ m}$

C) $\left(\frac{2}{3} \pi^2\right) \text{ m}$ D) $\left(\frac{1}{3} \pi^2\right) \text{ m}$

E) $\left(\frac{7}{12} \pi^2\right) \text{ m}$

**Resolución.**

• De la figura

$$\theta + 3\theta + 2\theta = 180^\circ$$

$$6\theta = \pi \text{ rad} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

• Por Fórmula $L_{AB} = \angle \text{ rad.} \times \text{radio}$,

Reemplazando valores, obtenemos:

$$L_1 = 2\theta \text{ rad} \times 1 \text{ m} \Rightarrow L_1 = 2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \pi \text{ m} \Rightarrow L_1 = \left(\frac{\pi^2}{3} \right) \text{ m} \quad 1$$

• Aplicando la misma fórmula

$$L_2 = 3\theta \text{ rad} \times 1 \text{ m} \Rightarrow L_2 = 3 \left(\frac{\pi}{6} \right) \pi \text{ m} \Rightarrow L_2 = \left(\frac{\pi^2}{2} \right) \text{ m} \quad 2$$

• Aplicando la misma fórmula

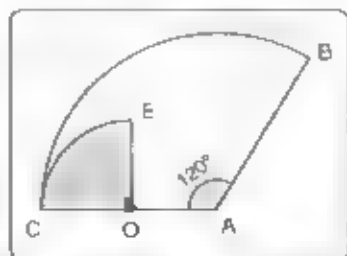
$$L_3 = \theta \text{ rad} \times 1 \text{ m} \Rightarrow L_3 = \frac{\pi}{6} \pi \text{ m} \Rightarrow L_3 = \left(\frac{\pi^2}{6} \right) \text{ m} \quad 3$$

Luego, $L_1 + L_2 - L_3 = \left(\frac{\pi^2}{3} \right) \text{ m} + \left(\frac{\pi^2}{2} \right) \text{ m} - \left(\frac{\pi^2}{6} \right) \text{ m} = \left(\frac{2}{3} \pi^2 \right) \text{ m} \quad \text{Rpta. D}$

Ejercicio 4 Si la longitud del arco BC es 4 m y "O" es punto medio de AC. Calcular el área de la región sombreada (CO = OA = OE).

Resolución.• Convertimos 120° a radianes

$$120^\circ = 120^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180} = \frac{2}{3} \pi \text{ rad} \quad 120^\circ = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$$

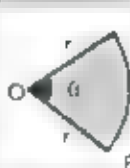


Por Fórmula: $L_{BC} = \alpha \text{ rad} \times \text{radio}$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

donde: $4\pi \text{ m} = \frac{2}{3} \times (2r) \therefore 3\pi \text{ m} = r$

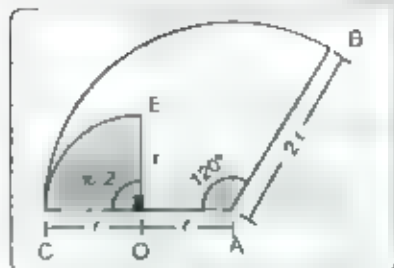
Recordar que:



área del sector circular

$$AOB = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

donde "θ" en radianes



Luego $\text{área } \text{sector } COE = \frac{1}{2} (3\pi)^2 \times \frac{\pi}{2}$

$\text{área } \text{sector } COE = \frac{9}{4} \pi \text{ m}^2$ Rpta.

Ejercicio 5 De la figura mostrada La longitud del arco \widehat{AB} es $2\pi \text{ m}$. Calcular el área de la región sombreada ($AO = OB = OC = 12 \text{ m}$)

Resolución.

• Por Fórmula: $L_{AB} = \theta \text{ rad} \times \text{radio}$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2\pi \text{ m} \quad \theta \text{ rad} \times 12 \text{ m} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \end{aligned}$$

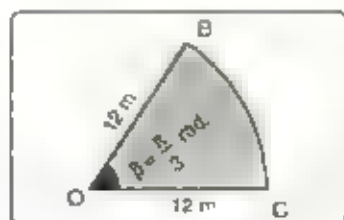
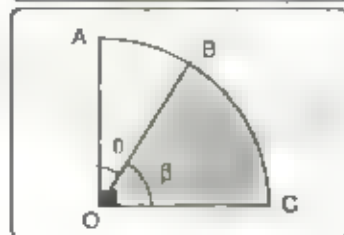
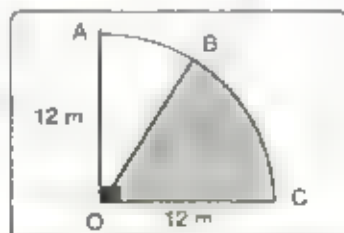
• De la región $\theta + \beta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{\pi}{6} \text{ rad} + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \text{ rad} - \frac{\pi}{6} \text{ rad} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Luego, calculamos el área de la región sombreada

$$\begin{aligned} \text{área } \text{sector } BOC &= \frac{1}{2} (12\text{ m})^2 \times \frac{\pi}{3} \\ &= 72 \text{ m}^2 \times \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$\text{área } \text{sector } BOC = 24 \pi \text{ m}^2$ Rpta.



TALLER DE EJERCICIOS Nº 5

EJERCICIO 1. Calcular la longitud de un arco en una circunferencia cuyo radio mide 10 cm y el ángulo central que subtiende mide 90° .

Resolución:



= Convertimos los 90° a radianes

$$90^\circ = 90^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{200^\circ}$$

$$90^\circ = \frac{9}{20} \pi \text{ rad.}$$

Luego $L_{AB} = \text{arad.} \times \text{radio}$ (Fórmula)

$$L_{AB} = \frac{9}{20} \pi \times 10 \text{ cm.}$$

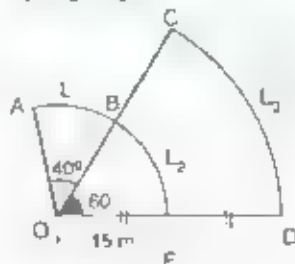
$$L_{AB} = 4,5 \pi \text{ cm.} \quad \text{Rpta.}$$

EJERCICIO 2. Una circunferencia tiene un radio de 30 m. ¿Cuántos radianes mide un ángulo central subtiendo por un arco de 20 m?

Resolución:

$$\text{Rpta. } \frac{2}{3} \text{ rad.}$$

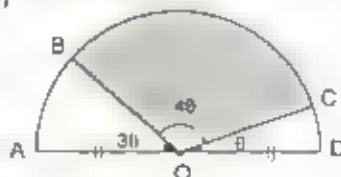
EJERCICIO 3. De la figura mostrada. Calcular $L_1 + L_2 + L_3$.



Resolución:

$$\text{Rpta. } 18 \pi \text{ m}$$

EJERCICIO 4. De la figura mostrada. Calcular el área de la región sombreada ($L_{CD} = 2 \pi \text{ m}$).



Resolución:

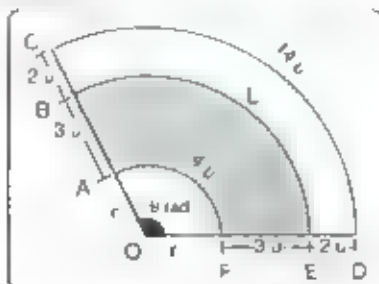
$$\text{Rpta. } 16 \pi \text{ m}^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE SECTOR CIRCULAR
TIPO I.B.M.

Problema 1 Determine el valor de "L" en el esquema mostrado

- A) 5 u B) 7 u C) 9 u
D) 10 u E) 12 u

Resolución.



Reemplazamos (1) en (2). $L = 4 + 3\theta$.. 3

Nuevamente aplicamos la misma fórmula $L_{CD} = \theta \times (r + 5) \Rightarrow 14 = \theta \times r + 5\theta$.. 4

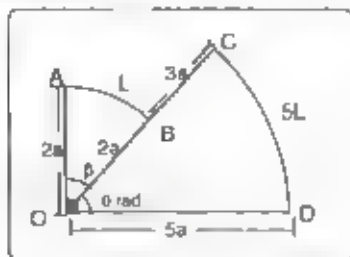
Reemplazamos (1) en (4) $14 = 4 + 5\theta \Rightarrow 10 = 5\theta \Rightarrow \theta = 2$.. 5

Luego, reemplazamos $\theta = 2$; en (3) $\Rightarrow L = 4 + 3(2) \Rightarrow L = 10 \text{ u}$ **Rpta. D**

Problema 2 Determine el valor de "theta" en el esquema mostrado.

- A) $\pi/2$ B) $\pi/3$ C) $\pi/4$
D) $\pi/5$ E) $\pi/6$

Resolución.



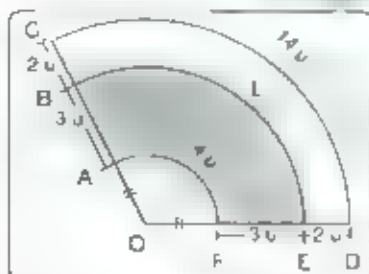
• Por Fórmula: $L_{CO} = \theta \text{ rad.} \times \text{radio}$

Luego $5L = \theta \times 5a \Rightarrow L = \theta \times a$.. 1

De la figura

$$\beta + \theta \text{ rad} = 90^\circ$$

$$\beta + \theta \text{ rad} = \pi/2 \text{ rad.} \Rightarrow \beta = (\pi/2 - \theta) \text{ rad.} \quad \dots 2$$



• Por Fórmula: $L_{CO} = \theta \text{ rad.} \times \text{radio}$

Luego: $4 = \theta \times r$.. 3

• Aplicando la misma fórmula: $L_{CE} = \theta \times (r + 3)$

$$L = \theta \times r + 3\theta \quad \dots 4$$

• Aplicando la fórmula $l_{AB} = \beta \text{ rad} \times \text{radio}$, obtenemos $l = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times 2a$ 3

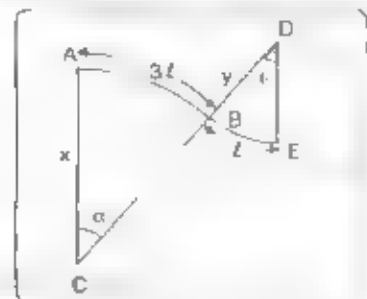
• Reemplazando (1) en (3): $\theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times 2a$

$$\theta = \pi - 2\theta \Rightarrow \therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{Rpta. B}$$

Problema 3 Calcular $(x - y)$, ver figura adjunta, sabiendo que la longitud del arco AB es el triple de la del arco BE, los ángulos α y θ miden 30° y 10° respectivamente.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $\frac{3}{2}$

Resolución



En primer lugar convertimos los 30° y 10° a radianes

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow 30^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\beta = 10^\circ \Leftrightarrow 10^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

Luego En el sector circular BDE $l_{BDE} = \theta \text{ rad} \cdot (y) \Rightarrow l = \frac{\pi}{18} \cdot y \quad y = \frac{18l}{\pi}$

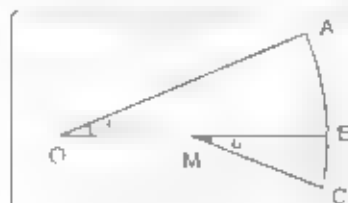
En el sector circular ACB $l_{ACB} = \alpha \text{ rad} \cdot (x) \Rightarrow 3l = \frac{\pi}{6} \cdot x \quad x = \frac{18l}{\pi}$

Incógnita: $x - y = \frac{18l}{\pi} - \frac{18l}{\pi} = 0 \quad \text{Rpta. A}$

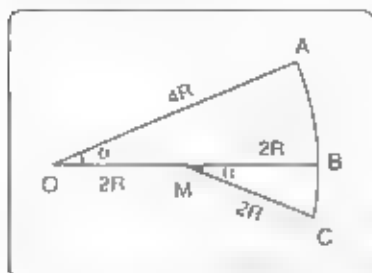
Problema 4 Hallar la longitud de las curvas AB + BC, "M" es punto medio de OB

$$r = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad \text{Oa } 4R$$

- A) πR B) $2\pi R$ C) $3\pi R$
D) $4\pi R$ E) $5\pi R$



Resolución:



Aplicando la fórmula de longitud de arco, obtenemos

$$L_{AB} = \alpha \text{ rad} \times OB$$

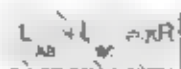
$$L_{AB} = \frac{\pi}{6} \times 4R = \frac{2}{3} \pi R \quad (I)$$

$$\Rightarrow L_{AC} = \alpha \text{ rad} \times MC$$

$$L_{AC} = \frac{\pi}{6} \times 2R = \frac{\pi R}{3} \quad (II)$$

Luego, sumamos miembro a miembro (I) y (II)

$$L_{AB} + L_{AC} = \frac{2\pi R}{3} + \frac{\pi R}{3} = \frac{3\pi R}{3}$$



Rpta. A

Problema 5 Del gráfico Hallar el área sombreada Si $AC = 4$ EOA y COB son sectores circulares

A) 16 θ

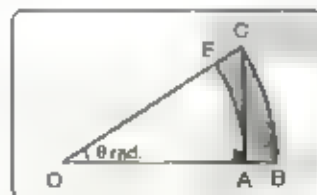
B) 8 θ

C) 6 θ

D) 4 θ

E) 3 θ

Resolución.



De la figura.

Area sombreada = Area \triangle COB - Area \triangle EOA

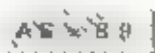
$$AS = \frac{R^2}{2} \theta - \frac{r^2}{2} \theta$$

$$AS = \left(\frac{R^2 - r^2}{2} \right) \theta \quad (I)$$

En el $\triangle CAO$ Por el teorema de Pitágoras, obtenemos $OC^2 = CA^2 + AO^2$

$$R^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 16 \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I) $AS = \frac{16}{2} \theta \Rightarrow$

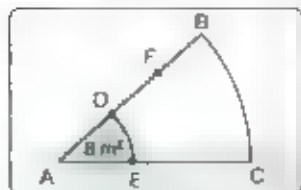
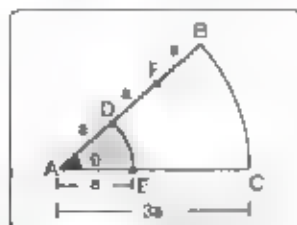


Rpta. B

Problema 6 Calcular el área del sector circular BAC , si el área del sector circular DAE vale 8 m^2 y $AD = DF = FB$

- A) 24 m^2 B) 16 m^2 C) 72 m^2
D) 64 m^2 E) 36 m^2

Resolución.



• Hacemos, $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{FB} = a$

• Por dato: $\text{área} \triangle DAE = 8 \text{ m}^2$

$$\frac{1}{2} \overline{AE}^2 \cdot \theta = 8 \text{ m}^2$$

$$\frac{1}{2} a^2 \cdot \theta = 8 \text{ m}^2$$

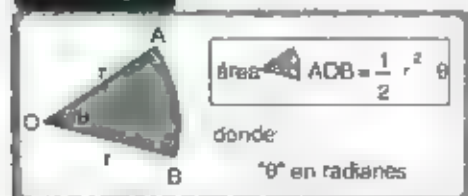
$$a^2 \cdot \theta = 16 \text{ m}^2$$

Luego: $\text{área} \triangle BAC = \frac{1}{2} \overline{AC}^2 \cdot \theta$

$$= \frac{1}{2} (3a)^2 \cdot \theta$$

$$= \frac{9}{2} (a^2 \cdot \theta)$$

Recorda que:



Reemplazamos (I) en (II), $\text{área} \triangle BAC = \frac{9}{2} (16 \text{ m}^2)$

$$\text{área} \triangle BAC = 72 \text{ m}^2 \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 7 En la figura "M" es punto medio. Hallar el área del sector circular BMC

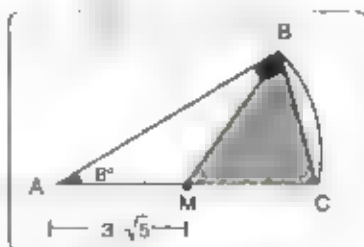
- A) πu^2 B) $2\pi u^2$ C) $\frac{\pi}{2} u^2$
D) $\frac{3\pi}{2} u^2$ E) $8\frac{\pi}{3} u^2$

Resolución.

Como "M" es punto medio de AC. Entonces $AM = MC = 3\sqrt{5}$

Además, BMC es un sector circular, siendo

$$MC = MB = 3\sqrt{5}$$



De acuerdo a la figura el ΔAMB resulta ser un isósceles, donde

$$\angle A = \angle B = 8^\circ$$

En el ΔAMB por ángulo exterior $\Rightarrow M = \angle A + \angle B$

$$M = 8^\circ + 8^\circ \Rightarrow \angle M = 16^\circ$$

Luego

$$\text{Área } \triangle BMC = \frac{\pi (MC)^2 \times \angle M^\circ}{360^\circ}$$

$$\text{Área } \triangle BMC = \frac{\pi (3\sqrt{5})^2 \times 16}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 45 \cdot (16)}{360^\circ} = \frac{\pi (720)}{360^\circ}$$

$$\therefore \text{Área } \triangle BMC = 2\pi \text{ u}^2 \quad \text{Rpta. B}$$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE SECTOR CIRCULAR

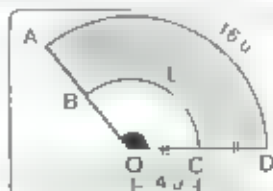
NIVEL 1

Ejercicio 1 Calcular la longitud de un arco en una circunferencia cuyo radio mide 15 y el ángulo central que subtiende mide 160°

- A) 15π cm B) 15 cm C) 12π cm
D) 24π cm E) 18π cm

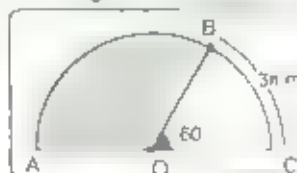
Ejercicio 2 Determine el valor de "L" en el esquema mostrado

- A) 6 u
B) 10 u
C) 8 u
D) 12 u
E) 9 u



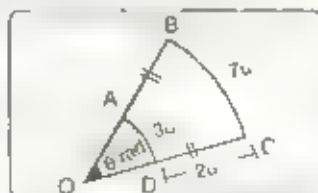
Ejercicio 3 En el esquema mostrado Determine el área de la región sombreada

- A) 9π m²
B) 18π m²
C) 23π m²
D) 27π m²
E) 24π m²



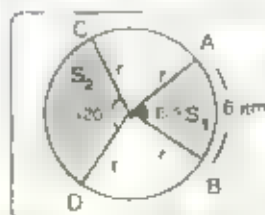
Ejercicio 4 Determine el valor de θ° en el esquema mostrado.

- A) 1
B) 2
C) 3
D) $1/2$
E) $3/2$



Ejercicio 5 De esquema mostrado. Calcule el valor de $S_1 + S_2$

- A) 100π m²
B) 160π m²
C) 120π m²
D) 140π m²
E) 150π m²



Clave de Respuestas

1. C 2. C 3. D 4. B 5. C

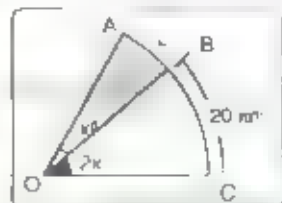
NIVEL II

Ejercicio 1 Calcular el área de un sector circular sabiendo que es numéricamente igual a la longitud de su arco, siendo su ángulo central 18°

- A) $\frac{\pi}{10} u^2$ B) $\frac{\pi}{5} u^2$ C) $\frac{2}{5} \pi u^2$
 D) $\frac{3}{5} \pi u^2$ E) $\frac{3}{10} \pi u^2$

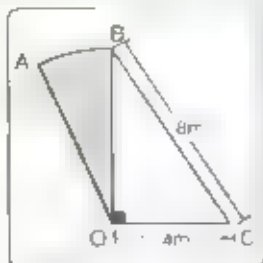
Ejercicio 2 Del esquema mostrado. Calcule el valor de "L"

- A) $3\pi m$
 B) $7\pi m$
 C) $9\pi m$
 D) $5\pi m$
 E) $10\pi m$



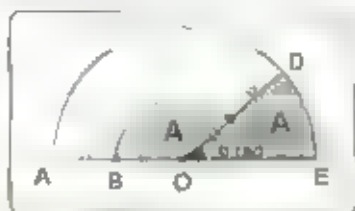
Ejercicio 3 Del esquema mostrado. Determine el área de la región sombreada (AO/BC)

- A) $C\pi m^2$
 B) $4\pi m^2$
 C) $8\pi m^2$
 D) $3\pi m^2$
 E) $5\pi m^2$



Ejercicio 4 Determine el valor de "θ" en el esquema mostrado.

- A) $\pi/3$
 B) $\pi/5$
 C) $\pi/6$
 D) $\pi/8$
 E) $2/3\pi$

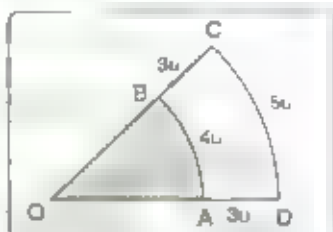


Ejercicio 5 Determine la longitud de arco de un sector cuyo ángulo central mide $(x/3)$ rad. y su radio mide $(6x)$ m, sabiendo además que el perímetro de este sector es de 110 m

- A) 20 m B) 30 m C) 40 m
 D) 50 m E) 60 m

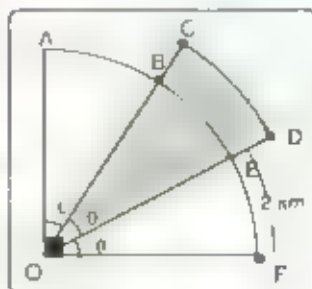
Ejercicio 6 En el esquema mostrado determine el área de la región sombreada.

- A) $16 u^2$
 B) $12 u^2$
 C) $18 u^2$
 D) $22 u^2$
 E) $24 u^2$



Ejercicio 7 En el esquema mostrado, determine el área de la región sombreada. (OB = 3 BC)

- A) $58\pi m^2$
 B) $32\pi m^2$
 C) $64\pi m^2$
 D) $48\pi m^2$
 E) $68\pi m^2$



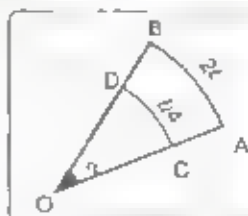
Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. B	4. B
5. D	6. E	7. C	

NIVEL III

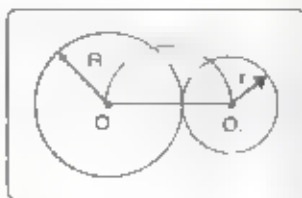
Ejercicio 1 De la figura mostrada, Hallar AC. Si $\alpha = 0.25$ rad

- A) 3L
B) 4L
C) 5L
D) 6L
E) 7L



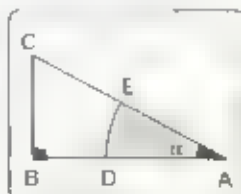
Ejercicio 2 Si O y O_1 son centros de las circunferencias. Calcular la longitud del arco DD_1 , los radios de las circunferencias son R y r

- A) $\frac{\pi}{2} (R+r)$
B) $\frac{\pi}{2} (R-r)$
C) $\frac{\pi}{6} (R+r)$
D) $\sqrt{R+r} \pi$
E) $\pi (R-r)$



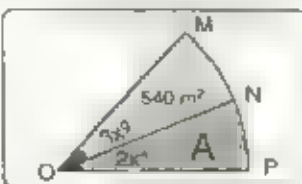
Ejercicio 3 Si $AD = BD = R$ Hallar el área del sector circular ADE, Si el área del triángulo ABC vale $2\sqrt{3} R^2$

- A) $\frac{\pi}{3} R^2$ B) $\frac{\pi}{6} R^2$
C) $\frac{\pi}{6} R^2$ D) $\frac{\pi}{12} R^2$
E) $\frac{\pi}{15} R^2$

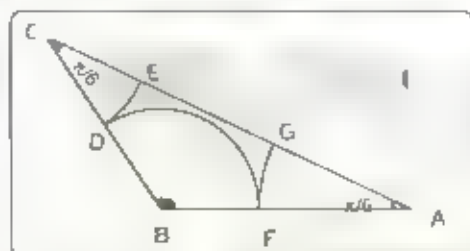


Ejercicio 4 Del esquema mostrado Calcule el valor de θ

- A) 100 m^2
B) 200 m^2
C) 300 m^2
D) 400 m^2
E) 500 m^2



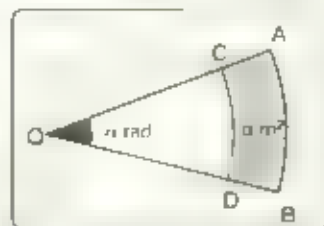
Ejercicio 5 De la figura mostrada Hallar el perímetro del triángulo ABC. Si $DE + GF = 2\pi \text{ m}$
 $DF = 4 \text{ m}$



- A) $12 (1+\sqrt{3}) \text{ m}$ B) $12 (2+\sqrt{3}) \text{ m}$
C) $12 (1+2\sqrt{3}) \text{ m}$ D) $12 \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ m}$
E) $24 (1+\sqrt{3}) \text{ m}$

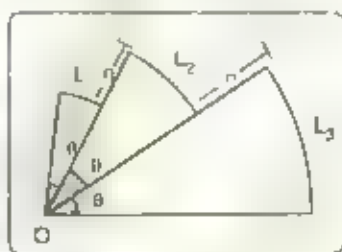
Ejercicio 6 En la figura Calcular el radio de sector AOB en metros. $CD = \alpha \text{ m}$ $OC = OD$

- A) $2\sqrt{3} \text{ m}$
B) 2 m
C) $\sqrt{3} \text{ m}$
D) 1 m
E) $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}$



Ejercicio 7 Calcular el valor del ángulo θ (en radianes) mostrado en la figura. Si $L_1 = 4\pi$ y $L_2 = 8\pi$ θ centro de los sectores circulares

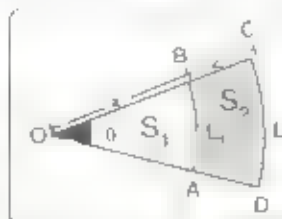
- A) 1 rad
B) 2 rad
C) $\frac{2}{3}$ rad
D) $\frac{3}{2}$ rad
E) $\frac{1}{2}$ rad



Ejercicio De gráfico adjunto Calcular

$$S_1 \text{ Si } L_1 + L_2 = 2\pi, \theta = \frac{2\pi}{3}$$

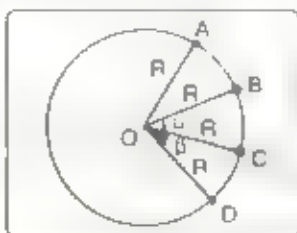
- A) 4
B) 12
C) 14
D) 45
E) 1



Ejercicio En la figura mostrada AB = 3πu

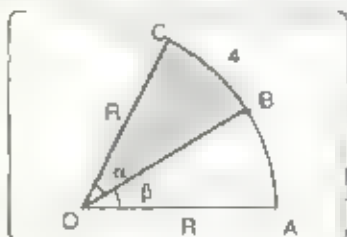
AD = 17πu, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad, $\beta = 40^\circ$ Calcular "R"

- A) 36 u
B) 24 u
C) 63 u
D) 48 u
E) 56 u



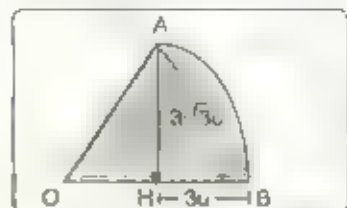
Ejercicio Hallar el área del sector circular BOC

- A) R
B) R^2
C) 2R
D) 2R^2
E) 4R^2



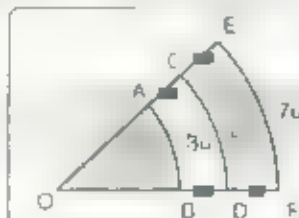
Ejercicio Determinar el área de la región sombreada en el siguiente gráfico.

- A) $2\pi u^2$
B) $3\pi u^2$
C) $4\pi u^2$
D) $5\pi u^2$
E) $6\pi u^2$



Ejercicio Del esquema mostrado, determine el valor de "L"

- A) 5 u
B) 4 u
C) 3 u
D) 2 u
E) 1 u

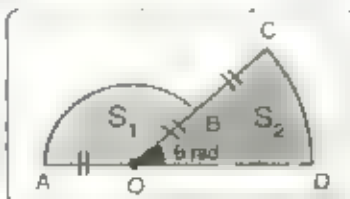


Ejercicio Si a un sector circular se le duplica el ángulo central y a su radio se le reduce en 3 m, se obtendrá un nuevo sector cuya área es la mitad que la del área del sector inicial, determine el radio del sector inicial.

- A) 2 m B) 3 m C) 4 m D) 5 m E) 6 m

Ejercicio De la figura los perímetros de las áreas S_1 y S_2 son iguales. Calcular el valor de $(\pi/30)$

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Ejercicio Si en un sector circular se aumenta su ángulo central en 20% y se disminuye su radio en 20%, entonces:

- A) No varía el área
B) El área aumenta en 20%
C) El área disminuye en 20%
D) El área aumenta en 23,2%
E) El área disminuye en 23,2%

Clave de Respuestas

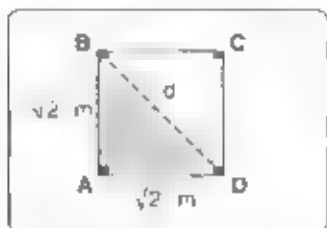
1. E	2. A	3. C	4. D	5. B
6. C	7. B	8. A	9. A	10. C
11. E	12. A	13. E	14. B	15. E

PROBLEMA 2 El área de un cuadrado de $\sqrt{2}$ m de lado, es equivalente a un sector circular cuyo radio es igual a la longitud de la diagonal de aquel. Calcular la longitud del arco del sector circular

- A) Falta datos B) 2m C) 3m D) 4m E) N.A

Resolución:

- Sea el cuadrado ABCD y el sector circular POQ



- En el $\triangle BAD$ aplicamos el Teorema de Pitágoras.

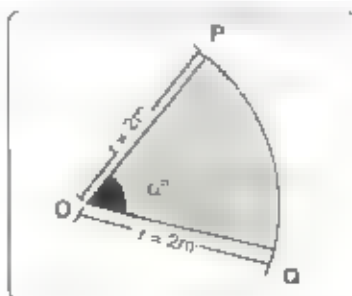
$$d^2 = (\sqrt{2} \text{ m})^2 + (\sqrt{2} \text{ m})^2$$

$$d^2 = 4\text{m}^2 \Rightarrow d = 2\text{m}$$

- De acuerdo al enunciado el radio del sector circular POQ es igual a la longitud de la Diagonal del cuadrado. O sea

$$r = d = 2\text{m}$$

- Además sabemos que el área del cuadrado es equivalente a la del sector circular veamos



$$\text{área } \square ABCD = \text{área } \triangle POQ$$

$$(\sqrt{2}\text{m})^2 = \frac{\pi (4\text{m}^2) \alpha}{360} \Rightarrow 2\text{m}^2 = \frac{\pi (4\text{m}^2) \alpha}{360} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

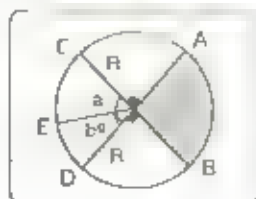
Luego, convertimos los $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ a radianes $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ rad}$

- Ahora calculamos la longitud de arco del sector circular

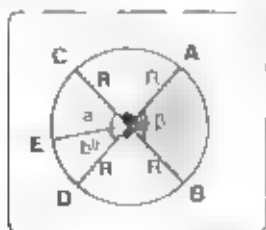
$$L_{\overset{\curvearrowright}{PQ}} = \alpha \text{ rad.} \times r \Rightarrow L_{\overset{\curvearrowright}{PQ}} = 1 \text{ rad} \times 2\text{m} \Rightarrow L_{\overset{\curvearrowright}{PQ}} = 2\text{m} \quad \text{Rpta. B}$$

PROBLEMA 3 Si $10a + 9b = 1350$, calcular el área de la región sombreada. Si además $R = 2\sqrt{2}$

- A) π B) $\pi/2$ C) $\pi/4$
D) 2π E) N.A.



Resolución



De la figura

$$a + b + 180^\circ + \beta = 360^\circ$$

$$a + b + \frac{9^\circ}{10^\circ} + \beta = 180^\circ$$

$$10a + 9b + 10\beta = 1800$$

$$1350 + 10\beta = 1800 \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

Luego calculamos el área de la región sombreada

$$\text{área} = \frac{\pi R^2 \beta^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi (2\sqrt{2})^2 45^\circ}{360}$$

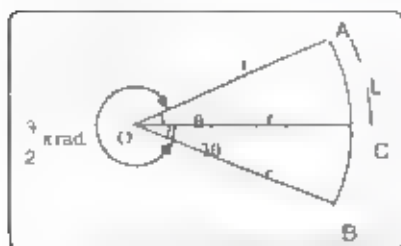
Área de la Región Sombreada = π

Rpta. A

PROBLEMA 4 En la figura mostrada. Calcular el valor del radio del sector circular AOB, sabiendo que $L = 2\pi$ cm

- A) 8 cm B) 4 cm C) 2 cm
D) 16 cm E) 32 cm

Resolución.



En primer lugar convertimos los 300g a radianes

$$300g < > 300g \times \frac{\pi \text{ rad}}{200g} = \frac{3}{2} \pi \text{ rad}$$

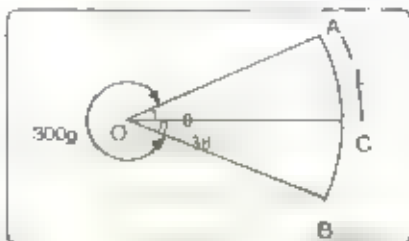
$$300g < > \frac{3}{2} \pi \text{ rad}$$

De la figura $\frac{3}{2} \pi \text{ rad} + \theta + 3\theta = 360^\circ$

$$\frac{3}{2} \pi \text{ rad} + 4\theta = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 4\theta = 2\pi \text{ rad} - \frac{3}{2} \pi \text{ rad} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

Luego, aplicamos la fórmula $L_{AC} = \theta \text{ rad} \times \text{radio}$

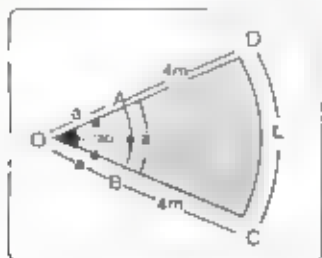
$$\text{Donde } 2\pi \text{ cm} = \frac{\pi}{8} r \Rightarrow r = 16 \text{ cm} \quad \text{Rpta. D}$$



Problema 5 En la figura mostrada, determine el valor de "L" si el trapezio circular ABCD tiene 20 m² de área

- A) 1 m B) 3 m C) 5 m
D) 7 m E) 9 m

Resolución.



• Por dato: $\text{área} = 20 \text{ m}^2$

$$\left(\frac{AB + CD}{2} \right) \times AD = 20$$

$$\left(\frac{a + L}{2} \right) \times 4 = 20$$

$$a + L = 10 \quad (I)$$

- En el sector circular AOB:

$$L_{AB} = \alpha \text{ rad} \times OB \Rightarrow L = \alpha \text{ rad} \times a \Rightarrow \underline{a = 1 \text{ rad}} \quad (II)$$

- En el sector circular DOC:

$$L_{CD} = \alpha \text{ rad} \times OC \Rightarrow \underline{L = \alpha \text{ rad} \times (a + 4)} \quad (III)$$

Reemplazamos (II) en (III): $L = 1 \times (a + 4) \Rightarrow \underline{a = L - 4} \quad (IV)$

Reemplazamos (IV) en (I): $L - 4 + L = 10 \Rightarrow \underline{L = 7 \text{ m}} \quad \text{Rpta. D}$

Problema 6 Hallar el área sombreada entre el área no sombreada

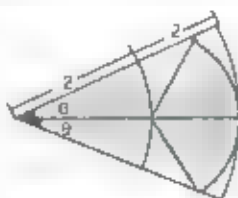
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución

- Como se puede observar el ΔOMC es isósceles ($OM = MC$), siendo:

$$\angle COM = \angle OCM = \theta$$

- En el ΔOCM (Por \angle exterior): $\angle CMN = 2\theta$



De igual manera $\angle OMN = 2\theta$

Luego

□ área sombreada = área $\triangle AOB + \text{área} \triangle CMD$

$$\begin{aligned} \text{área sombreada} &= \frac{1}{2} OB^2 \cdot 2\theta + \frac{1}{2} MD^2 \cdot 4\theta \\ &= \frac{1}{2} 2^2 \cdot 2\theta + \frac{1}{2} 2^2 \cdot 4\theta \end{aligned}$$

área sombreada = 120

•• área no sombreada = área $\triangle EOF - \text{área sombreada}$

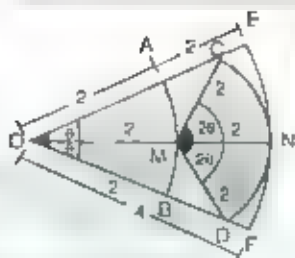
$$= \frac{1}{2} OF^2 \cdot 2\theta - 120$$

$$= \frac{1}{2} 4^2 \cdot 2\theta - 120$$

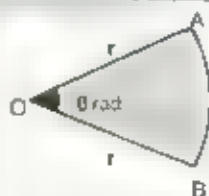
área no sombreada = 40

Luego $\frac{\text{área sombreada}}{\text{área no sombreada}} = \frac{120}{40} = 3$

Rpta. C



Recorda que:



$$\text{área} < s = \frac{1}{2} r^2 \theta$$



¿SABÍAS QUE...

Arquímedes fue calificado por los historiadores romanos como el dios de la matemática, el Homero de la geometría?

Para los soldados romanos Arquímedes era un verdadero demonio matemático por la eficiencia de sus inventos bélicos.

Este genio de la antigüedad calculó el valor de π con la mayor aproximación hasta entonces y descubrió además, el método que genera cualquier aproximación deseada.



Capítulo

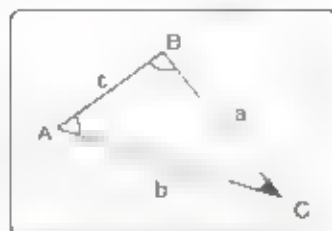
3

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

3.1 CRITERIOS PRELIMINARES

RAZÓN : En forma general se lo define como la comparación entre dos cantidades por medio de un cociente aplicando esta definición a un triángulo cualquiera y relacionando sus tres lados 2 a 2 obtenemos 6 razones, veámoslas.

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{b}, \frac{b}{c}$$



Operador Trigonométrico

Se llama así, al símbolo matemático que como tal, no tiene significado cuando actúa por sí sólo, pero que se transforma cuando lo acompaña un ángulo. Estos operadores trigonométricos son 6

Sen	→	Seno
Cos	→	Coseno
Tan ó tg	→	Tangente
Cot ó cotg	→	Cotangente
Sec	→	Secante
Csc ó Cosec	→	Cosecante

Razón Trigonométrica

Es aquella que se obtiene como consecuencia de fusionar un operador trigonométrico y un ángulo obteniéndose como resultado un número, veamos el siguiente ejemplo

$$\text{Sec } \alpha = N$$

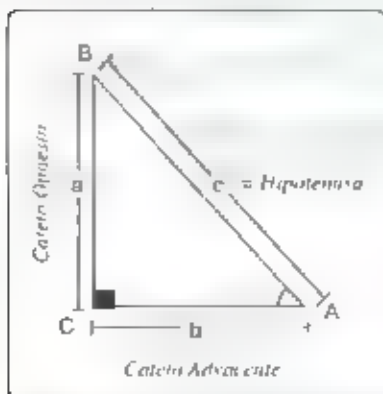
Operador trigonométrico	Ángulo	Número
Razón trigonométrica		

Ejemplos

I) $\text{tg } 45^\circ = 1$ II) $\text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ III) $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ IV) $\text{sec } 45^\circ = \sqrt{2}$

3.1.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Se les define como los cocientes que se obtienen al relacionar los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. A continuación veremos las definiciones de cada una de dichas Razones trigonométricas con respecto al ángulo agudo A.



→ Sen A	=	$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	=	$\frac{a}{c}$
→ Cos A	=	$\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	=	$\frac{b}{c}$
→ Tg A	=	$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$	=	$\frac{a}{b}$
→ Cotg A	=	$\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}$	=	$\frac{b}{a}$
→ Sec A	=	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}$	=	$\frac{c}{b}$
→ Cosec A	=	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$	=	$\frac{c}{a}$

Condiciones que hay que tener presente

- I) Sen A y Cos A, son menores que 1
- II) Tg A y cot A, toman cualquier valor
- III) sec A y cosec A, son mayores que 1
- IV) $c > a$ y $c > b$
- V) $c^2 = a^2 + b^2$, (Teorema de Pitágoras)
- VI) $\angle A + \angle B = 90^\circ$ (A y B ángulos agudos)

Recomendación

Es mucho más fácil aprender las 6 razones trigonométricas si sólo basta aprender las 3 primeras y las 3 restantes se deducen por orden inverso, como:

a) Si $\text{sen } \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow$ Su inverso $\Rightarrow \text{cosec } \theta = \frac{5}{3}$

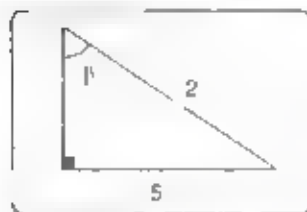
b) Si $\text{tg } \theta = \frac{5}{4} \Rightarrow$ Su inverso $\Rightarrow \text{cotg } \theta = \frac{4}{5}$

c) Si $\text{cos } \theta = \frac{7}{9} \Rightarrow$ Su inverso $\Rightarrow \text{sec } \theta = \frac{9}{7}$

- A continuación mencionaremos otros ejemplos sobre aplicación del criterio inverso, veamos

$$\text{Si } \sin \beta = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Su inverso} \Rightarrow \operatorname{cosec} \beta = \frac{2}{5}$$

Si el valor de $\sin \beta = \frac{5}{2}$ lo llevamos a un triángulo rectángulo, lo que resulta es



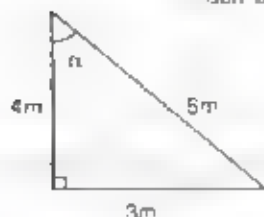
$$\sin \beta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

- Según lo obtenido dicha razón resulta absurda ya que la hipotenusa jamás podrá ser menor que un cateto

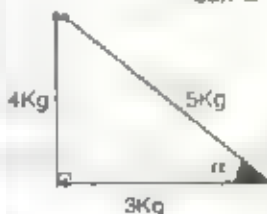
Observación: El valor de la *razón trigonométrica* es un número Adimensional (Sin dimensiones), por lo tanto es un cociente de magnitudes de la misma especie.

Ejemplo.

* Como longitud. $\sin \alpha = \frac{3 \text{ m}}{5 \text{ m}}$
 $\sin \alpha = 0,6$



** En física $\sin \alpha = \frac{4 \text{ Kg}}{5 \text{ Kg}}$
 $\therefore \sin \alpha = 0,8$



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Problema 1 Hallar las 6 razones trigonométricas de ángulo "A" de un triángulo rectángulo ACB, recto en "C" sabiendo que: $a = 6$, $b = 8$

Resolución.

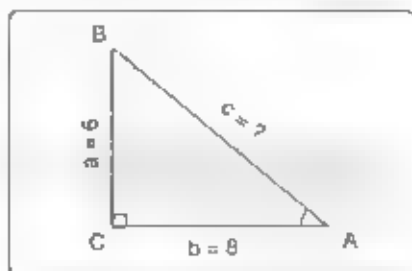
- Hallamos el valor de "C" por medio del teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Luego: $c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$

$$c^2 = 100$$

$$c = \sqrt{100} \Rightarrow c = 10$$



Ahora, hallamos las 6 razones trigonométricas, con respecto al ángulo "A"

→ Sen A	=	$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
→ Cos A	=	$\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
→ Tg A	=	$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
→ Cotg A	=	$\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
→ Sec A	=	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{c}{b} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$
→ Cosec A	=	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Problema 2 Hallar las razones trigonométricas del ángulo "B" de un triángulo rectángulo ACB, recto en "C". Sabiendo que: $a = 5$ y $c = 13$

Resolución.

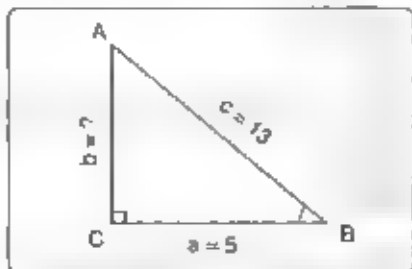
- Hallamos el valor de "b" por medio del teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Luego: $13^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow 169 = 25 + b^2$

$$144 = b^2 \Rightarrow \sqrt{144} = b$$

$$12 = b$$



Ahora, hallamos las 6 razones trigonométricas, respecto al ángulo agudo "B"

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{cosec} B = \frac{c}{b} = \frac{13}{12}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \Rightarrow \sec B = \frac{c}{a} = \frac{13}{5}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a} = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot B = \frac{a}{b} = \frac{5}{12}$$

Problema 3 Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "A" en el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", si se sabe que: $a = \frac{c}{3}$

Resolución:

De la condición: $a = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 3a$

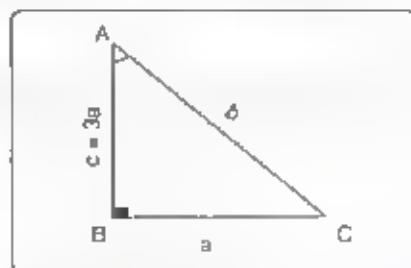
- Calculamos el valor de "b" por medio del teorema de Pitágoras

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Luego $b^2 = a^2 + (3a)^2 \Rightarrow b^2 = 10 a^2$

$$b = \sqrt{10 a^2} = \sqrt{10} \sqrt{a^2}$$

$$b = \sqrt{10} a$$



Ahora hallamos las 6 razones trigonométricas, respecto al ángulo agudo "A"

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{10} a} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \sqrt{10}$$

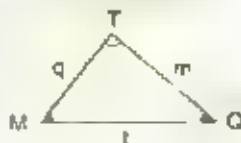
$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{3a}{\sqrt{10} a} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3 \sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sec A = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{c} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot A = \frac{3}{1} = 3$$

Observación: Recordemos que en los vértices de los triángulos siempre se colocan letras mayúsculas y a los lados que se oponen se colan las respectivas letras minúsculas por defecto. Si en uno de los vértices del triángulo colocamos la letra "A", en su lado opuesto colamos su minúscula "a" (ver figura)

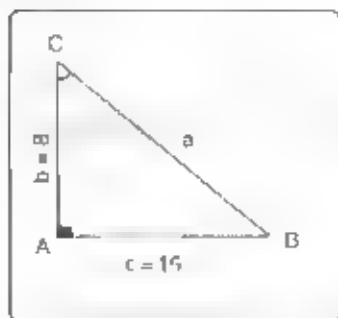


Otro Ejemplo:



Problema 4 En el triángulo rectángulo ABC, recto en "A" si $\operatorname{tg} B = \frac{8}{15}$. Hallar las razones trigonométricas del ángulo "C".

Resolución



Por definición: $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ $\frac{8}{15} = \frac{b}{c} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ c = 15 \end{cases}$

- Calculamos el valor de "a" por medio del teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Luego: $a^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225$

$$a^2 = 289 \Rightarrow a = \sqrt{289} \Rightarrow a = 17$$

Ahora hallamos las razones trigonométricas con respecto al ángulo agudo "C".

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} = \frac{15}{17} \Rightarrow \operatorname{cosec} C = \frac{17}{15}$$

$$\cos C = \frac{b}{a} = \frac{8}{17} \Rightarrow \sec C = \frac{17}{8}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \frac{15}{8} \Rightarrow \cot C = \frac{8}{15}$$

Problema 5 En el triángulo rectángulo ABC, recto en "B" si $\operatorname{tg} C = \frac{12}{5}$. Calcular el valor de

$$\cos A$$

$$1 + \operatorname{Sen} A$$

Resolución

Por definición

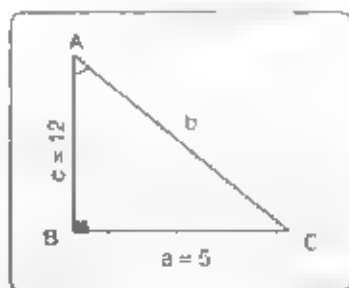
$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} c = 12 \\ a = 5 \end{cases}$$

Calculamos el valor de "b" por medio del teorema de Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Luego: $b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144$

$$b^2 = 169 \Rightarrow b = \sqrt{169} \Rightarrow b = 13$$



Ahora calculamos el valor de la expresión incógnita

$$\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\frac{c}{b}}{\left(1 + \frac{a}{b}\right)} = \frac{\frac{12}{13}}{\left(1 + \frac{5}{13}\right)} = \frac{12}{18}$$

$$\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

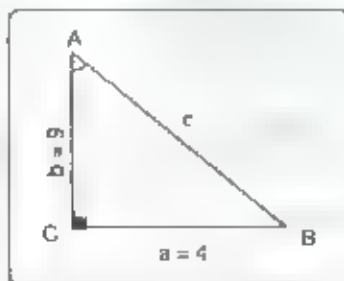
Problema 6: En el triángulo ACB, recto en "C", hallar el valor de $\sin A \times \cos A$, si $\operatorname{tg} A = 0,444$

Resolución

Sabemos que: $0,444 = \frac{4}{9} \Rightarrow \operatorname{tg} A = \frac{4}{9}$

Por definición: $\operatorname{tg} A = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{a}{b}$

$$\frac{4}{9} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 9 \end{cases}$$



Calculamos el valor de "c" por medio del teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Luego: $c^2 = 4^2 + 9^2 = 16 + 81$

$$c^2 = 97 \Rightarrow \therefore c = \sqrt{97}$$

Ahora, hallamos el valor de la expresión incógnita

$$\sin A \times \cos A = \frac{a}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{36}{c^2}$$

$$\sin A \times \cos A = \frac{36}{(\sqrt{97})^2} = \frac{36}{97}$$

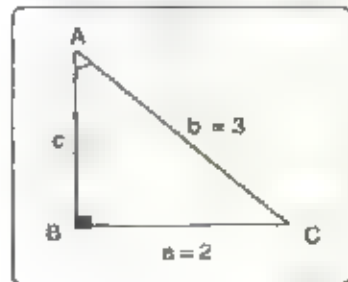
Problema 7: En un triángulo ABC, recto en "B", hallar el valor de $\operatorname{tg} A \times \sec A$ si $\sin A = 0,666$.

Resolución

Sabemos que: $0,666 = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin A = \frac{2}{3}$

Por definición: $\sin A = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{b}$

$$\frac{2}{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$



- Calculamos el valor de "c" por medio del teorema de Pitágoras

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Luego $3^2 = 2^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2$
 $5 = c^2 \Rightarrow \sqrt{5} = c$



Manuel Coviano Noguera

- Ahora, hallamos el valor de la expresión incógnita

$$\lg A \times \sec A = \frac{a}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c^2}$$

$$\lg A \times \sec A = \frac{2 \times 3}{(\sqrt{5})^2} = \frac{6}{5}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº (6)

PROBLEMA 1 Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "A" de un triángulo ABC recto en "C", sabiendo que $a = 5$, $b = 2$

Resolución



= Por el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

$$c = \sqrt{29}$$

Luego, hallamos las 6 razones trigonométricas

$$\text{I) Sen } A = \frac{a}{c} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\text{II) Cos } A = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\text{III) tg } A = \frac{a}{b} = \frac{5}{2} \quad \text{IV) Cotg } A = \frac{2}{5}$$

$$\text{V) Sec } A = \frac{\sqrt{29}}{2} \quad \text{VI) Cosec } A = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

PROBLEMA 2 Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "B" de un triángulo ABC recto en "C" sabiendo que $b = 3$, $c = 6$

Resolución.

PROBLEMA 3 Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "C" de un triángulo BAC, recto en "A", sabiendo que: $a = \sqrt{9}$ $b = \sqrt{4}$

Resolución.

PROBLEMA 4 . Determinar las 6 razones trigonométricas del ángulo "B" de un triángulo ABC, recto en "C", si se sabe que $2b = a$.

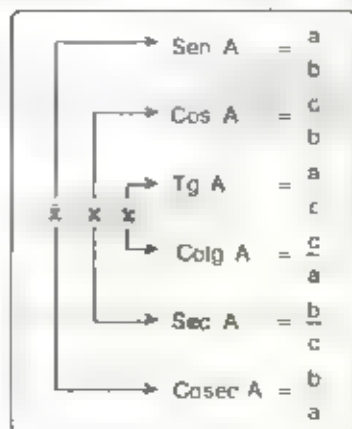
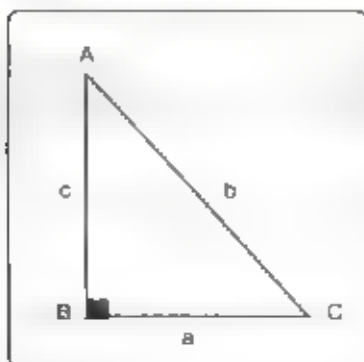
Resolución.

3.1.2 Razones Trigonométricas Recíprocas

TEOREMA "El producto de dos razones recíprocas es siempre igual a la unidad"

CÁLCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RESPECTO AL ÁNGULO AGUDO "A"



Efectuando el producto como se indica obtenemos

$$I) \quad \text{Sen } A \times \text{Cosec } A = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Sen } A \times \text{Cosec } A &= 1 \\ \text{Sen } A &= \frac{1}{\text{Cosec } A} \\ \text{Cosec } A &= \frac{1}{\text{Sen } A} \end{aligned}$$

$$II) \quad \text{Cos } A \times \text{Sec } A = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Cos } A \times \text{Sec } A &= 1 \\ \text{Cos } A &= \frac{1}{\text{Sec } A} \\ \text{Sec } A &= \frac{1}{\text{Cos } A} \end{aligned}$$

$$III) \quad \text{Tg } A \times \text{Cotg } A = \frac{a}{c} \times \frac{c}{a} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Tg } A \times \text{Cotg } A &= 1 \\ \text{Tg } A &= \frac{1}{\text{Cotg } A} \\ \text{Cotg } A &= \frac{1}{\text{Tg } A} \end{aligned}$$

En General: $R.T. (\text{Angulo}) \times R.T. \text{ rec. } (\text{Angulo}) = 1$


Donde $R.T.$ = Razón trigonométrica

$R.T. \text{ rec.}$ = Razón trigonométrica recíproca
 $0^\circ < (\text{Angulo}) < 90^\circ$

Ejemplos

$$\begin{cases} a) \text{ Sen } 50^\circ \times \text{Cosec } 50^\circ = 1 \\ b) \text{ Tg } 5^\circ \times \text{Cotg } 5^\circ = 1 \\ c) \text{ Cos } 45^\circ \times \text{Sec } 45^\circ = 1 \end{cases}$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

Problema  Si se cumple que $\text{Sen } (2x + 5^\circ) \times \text{Cosec } 21^\circ = 1$ Hallar el valor de 'x'

Resolución

Como el producto de Seno y Cosecante es igual a 1 los angulos deben ser iguales. Veamos

$$2x + 5^\circ = 21^\circ \Rightarrow 2x = 21^\circ - 5^\circ \Rightarrow 2x = 16^\circ \Rightarrow x = \frac{16^\circ}{2} = 8^\circ$$

Problema (2) Si $\text{Tg}(15x - 31) \cdot \text{Cotg}(3x - 25) = 1$ Hallar el valor de "x"

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así: $\text{Tg}(15x - 31) \cdot \text{Cotg}(3x - 25) = 1$

$$\text{Tg}(15x - 31) \cdot \text{Cotg}(3x - 25) = 1$$

Por definición de razones recíprocas: $\text{Tg}(15x - 31) = (3x - 25)^\circ$

$$15x - 3x = 31 - 25^\circ \Rightarrow 12x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{12} \Rightarrow x = 0.5^\circ$$

Problema (3) Si $\text{Cos}(x + y + 20) \cdot \text{Sec}(6x + y - 60) = 1$ Hallar el valor de "x"

Resolución:

- Como el producto de coseno y secante es igual a 1, por razones recíprocas los ángulos deben ser iguales.

$$x + y + 20 = 6x + y - 60$$

$$20^\circ + 60^\circ = 6x - x \Rightarrow 80 = 5x$$

$$\frac{80^\circ}{5} = x \Rightarrow x = 16^\circ$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 7

PROBLEMA 1 Si se cumple que

$$\text{Tg}(a + b + 40^\circ) \cdot \text{cotg}(3a - b - 60^\circ) = 1$$

$$a + b = 70^\circ \quad \text{II}$$

Hallar el valor de "a"

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\text{Tg} \alpha \cdot \text{cotg} \alpha = 1$

Obtenemos que

$$a + b + 40 = 3a - b - 60^\circ$$

$$100^\circ = 2a - 2b$$

$$100^\circ = 2(a - b) \Rightarrow a - b = 50^\circ \quad \text{III}$$

- Sumamos miembro a miembro I y III:

$$a + b = 70^\circ$$

$$a - b = 50^\circ$$

$$\Sigma \text{ M.A.M} \quad 2a = 120^\circ \Rightarrow a = 60^\circ \quad \text{Rpta.}$$

PROBLEMA 2 Si se cumple que

$$\text{Cos}(x + y + 30^\circ) \cdot \text{Sec}(3y + x - 10^\circ) = 1$$

Hallar el valor de "y"

Resolución:

$$\text{Rpta. } y = 20^\circ$$

PROBLEMA 3 Si

$$\operatorname{Cotg}(3m - n + 10^\circ), \operatorname{Ig}(n + m + 50^\circ) + 31 = 32 \quad (I)$$

$$m = 3n \quad (II)$$

Hallar el valor de "m"

Resolución:**PROBLEMA 4** Si

$$\operatorname{Sen}(x + y) \operatorname{Cosec}(2x - y) = 0 \quad (I)$$

$$\operatorname{Sec}(3x - y) \operatorname{Cos} 100 = 1 \quad (II)$$

Hallar el valor de "x"

Resolución:

$$\text{Rpta. } m = 30^\circ$$

$$\text{Rpta. } x = 40^\circ$$

TEOREMA FUNDAMENTAL

Las razones trigonométricas de un ángulo de diferentes triángulos rectángulos no cambian cuando el ángulo permanece igual

Sea $\angle BAC$ un ángulo agudo, desde los puntos R, P y Q del lado CA , trazamos las perpendiculares RM, PN y QT , resultando los triángulos rectángulos $\triangle ARM, \triangle ANP$ y $\triangle AQT$ semejantes por tener el mismo ángulo "A" (Como se muestra en la figura)

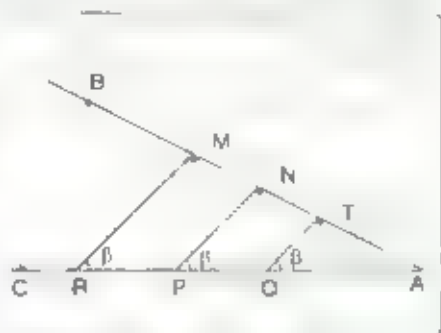
• Por semejanza de triángulos, obtenemos las siguientes relaciones

$$I) \quad \frac{\overline{QT}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{RA}} = \operatorname{sen} A$$

$$II) \quad \frac{\overline{AT}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{RA}} = \operatorname{cos} A$$

$$III) \quad \frac{\overline{QT}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{AM}} = \operatorname{tg} A$$

Las relaciones obtenidas nos indican que las razones trigonométricas del ángulo agudo "A" son invariantes, cualquiera que sea el triángulo rectángulo al cual pertenece dicho ángulo



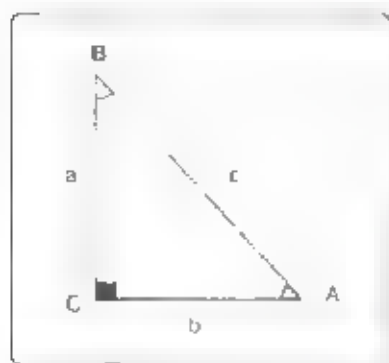
3.1.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS (CO-RAZONES COMPLEMENTARIAS)

Toda razón trigonométrica de un ángulo es igual a la Co-razón trigonométrica del complemento de dicho ángulo. Es decir:

$$\text{Si } \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \quad \text{Entonces} \quad \text{R.T. (Ángulo A)} = \text{Co-R.T. (Ángulo B)}$$

CÁLCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Sea el $\triangle BCA$ Recto en "C" cuyos ángulos agudos son A y B ($A + B = 90^\circ$)



$$\begin{aligned} \text{i) } \sin A &= \frac{a}{c} & \cos B &= \frac{a}{c} \\ \sin A &= \cos B & \text{Si } A + B &= 90^\circ \\ \text{ii) } \operatorname{tg} A &= \frac{a}{b} & \operatorname{cotg} B &= \frac{a}{b} \\ \operatorname{tg} A &= \operatorname{cotg} B & \text{Si } A + B &= 90^\circ \\ \text{iii) } \sec A &= \frac{c}{b} & \operatorname{cosec} B &= \frac{c}{b} \\ \sec A &= \operatorname{cosec} B & \text{Si } A + B &= 90^\circ \end{aligned}$$

En General	R.T. (Ángulo A)	=	CO-R.T. (90° - Ángulo A)
	\downarrow		\downarrow
	Razón trigonométrica		Co-Razón trigonométrica

Ejemplos

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) \Rightarrow \sin 30^\circ = \cos 60^\circ \\ \operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{cotg} (90^\circ - 40^\circ) \Rightarrow \operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{cotg} 50^\circ \\ \sec 20^\circ = \operatorname{cosec} (90^\circ - 20^\circ) \Rightarrow \sec 20^\circ = \operatorname{cosec} 70^\circ \end{cases}$$



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Problema 1 Siendo $\operatorname{tg} (\alpha + 10^\circ) = \operatorname{cotg} (\alpha + 40^\circ)$ El valor de "α" es

Resolución



En la expresión dada la cotangente es Co-razón de la tangente, los ángulos son complementarios, o sea deben sumar 90°

$$(\alpha + 10^\circ) + (\alpha + 40^\circ) = 90^\circ$$

$$2\alpha = 90^\circ - 10^\circ - 40^\circ \Rightarrow 2\alpha = 40^\circ \Rightarrow \therefore \alpha = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

Problema 2 Si $\sin(3x - 20^\circ) \cdot \sec(2x + 95^\circ) = 1$ Hallar el valor de "x"

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$\sin(3x - 20^\circ) = \frac{1}{\sec(2x + 95^\circ)} \quad \text{recordar que } \frac{1}{\sec \theta} = \cos \theta$$

$$\sin(3x - 20^\circ) = \cos(2x + 95^\circ)$$

Como "coseno" es Co-Razón del "seno" sus ángulos deben sumar 90°

$$(3x - 20^\circ) + (2x + 95^\circ) = 90^\circ$$

$$5x = 90 + 20^\circ - 95^\circ \Rightarrow 5x = 15^\circ \Rightarrow x = \frac{15^\circ}{5} \Rightarrow x = 3$$

Problema 3 Si $\lg(\sqrt{x} + y + 60^\circ) \cdot \lg(\sqrt{x} - y + 10^\circ) = 1$ Calcular el valor de "x"

Resolución:

La expresión dada se escribe así $\lg(\sqrt{x} + y + 60^\circ) \cdot \lg(\sqrt{x} - y + 10^\circ) = 1$

$$\lg(\sqrt{x} + y + 60^\circ) = \frac{1}{\lg(\sqrt{x} - y + 10^\circ)} \quad \text{recordar que } \frac{1}{\lg \theta} = \operatorname{colog} \theta$$

$$\lg(\sqrt{x} + y + 60^\circ) = \operatorname{colog}(\sqrt{x} - y + 10^\circ)$$

Como "colog" es Co-razón de "lg" sus ángulos deben sumar 90°

$$(\sqrt{x} + y + 60^\circ) + (\sqrt{x} - y + 10^\circ) = 90^\circ$$

$$2\sqrt{x} = 90^\circ - 60^\circ - 10^\circ \Rightarrow 2\sqrt{x} = 20^\circ$$

$$\sqrt{x} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ \Rightarrow \sqrt{x} = 10^\circ \Rightarrow x = (10^\circ)^2 \Rightarrow \underline{x = 100^\circ}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 8

EJERCICIO 1 : Si:

$$\text{Sen } (x + 2y) - \text{Cos } (y - x) = 1 \quad \text{I}$$

$$\text{tg } (2x - y) = \text{cotg } (20^\circ) \quad \text{II}$$

Hallar el valor de "x"

Resolución.

Aplicando las propiedades

$$\text{Sen } A = \text{Cos } B \Rightarrow A + B = 90^\circ$$

$$\text{tg } \alpha = \text{Cotg } \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

Obtenemos que

$$* (x + 2y) + (y - x) = 90^\circ$$

$$3y = 90^\circ \Rightarrow \therefore y = 30^\circ$$

$$** (2x - y) + 20^\circ = 90^\circ$$

$$2x - 30^\circ = 70^\circ \Rightarrow \therefore x = 50^\circ$$

Rpta.

Rpta. 400°

EJERCICIO 2 : Si

$$\text{Sen } 2x - \text{Sec } 4y = 1 \quad \text{I}$$

$$x - y = 15 \quad \text{II}$$

Hallar el valor de "y"

Resolución

EJERCICIO 4 : Si

$$\text{tg} \left(\frac{3Kx}{4} - \frac{1}{3} \right) + \text{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3Ky}{4} \right) = \pi$$

Además $x - y = 10^\circ$ Calcular el valor de "K"

Resolución.

Rpta $y = 10^\circ$

Rpta. K = 12

CASOS QUE SE PRESENTAN CON MUCHA FRECUENCIA EN LA RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS RECTANGULOS

PRIMER CASO: *Datos.* Hipotenusa "h" y un ángulo "α"
Incógnita. Expresar los catetos en términos de "h" y "α"

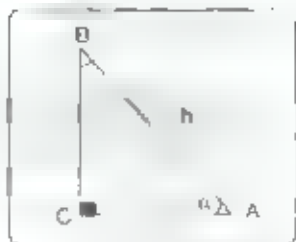
En el $\triangle BCA$

$$I) \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{h}$$

$$BC = h \operatorname{sen} \alpha$$

$$II) \cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{h}$$

$$AC = h \cos \alpha$$



SEGUNDO CASO: *Datos.* Un ángulo agudo "α" y su cateto opuesto "m"
Incógnita. Expresar el otro cateto y la hipotenusa en términos de "α" y "m"

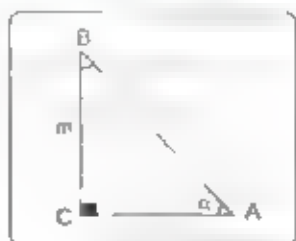
En el $\triangle BCA$

$$I) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\overline{AB}}{m}$$

$$AB = m \operatorname{cosec} \alpha$$

$$II) \operatorname{colog} \alpha = \frac{\overline{AC}}{m}$$

$$AC = m \operatorname{colog} \alpha$$



TERCER CASO: *Datos.* Un ángulo "α" y su cateto adyacente "n"
Incógnita. Expresar el otro cateto y la hipotenusa en términos de "α" y "n"

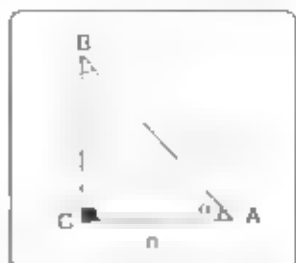
En el $\triangle BCA$

$$I) \operatorname{sec} \alpha = \frac{\overline{AB}}{n}$$

$$AB = n \operatorname{sec} \alpha$$

$$II) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{n}$$

$$BC = n \operatorname{tg} \alpha$$



Observaciones

- a) En trigonometría las operaciones no tienen un significado por sí solas, tampoco se puede realizar operaciones aritméticas con ellas de manera que es absurdo considerar los operadores

$$\frac{\operatorname{sen} 0}{0}$$

$$\operatorname{sen} \rightarrow (\text{Absurdo})$$

$$\operatorname{sen} (\alpha) + \operatorname{sen} (\beta) \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

Absurdo

- b) Se ha demostrado que las razones trigonométricas son números, luego con ellos se puede operar así

$$I) 5 \operatorname{sen} 11 - 3 \operatorname{sen} \beta + 2 \operatorname{sen} \beta = 4 \operatorname{sen} \beta$$

$$\begin{aligned}
 \text{II)} \quad & (3 \cotg \alpha + 2 \operatorname{cosec} \alpha) \operatorname{sen} \alpha + 3 \cotg \alpha \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{sen} \alpha \\
 &= 3 \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \operatorname{sen} \alpha + 2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \operatorname{sen} \alpha \\
 &= 3 \cos \alpha + 2
 \end{aligned}$$

- c) Traga cuidado con la equivalencia " $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$ ", la primera se aplica continuamente pero la segunda no, porque corre el riesgo de confusión que

$$(\operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen}^2 x^2 \Rightarrow \text{y esto es incorrecto}$$



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE TRIANGULOS RECTANGULOS TIPO I.B.M

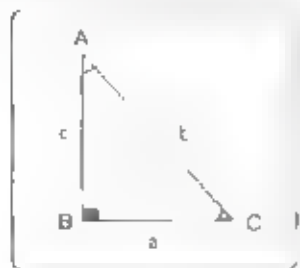


Problema 1 Si el cuadrado de la suma del cateto "a" y la hipotenusa "b" de un triángulo rectángulo (recto en "B") es igual a 9 veces su producto. Hallar " $\operatorname{sen} A + \operatorname{cosec} A$ ".

- A) 6 B) 5 C) 9 D) 8 E) 7

Resolución

- Del enunciado, obtenemos



$$(a+b)^2 = 9ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 7ab \quad \text{I)}$$

La expresión incógnita, se puede escribir así

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{cosec} A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{cosec} A = \frac{a^2 + b^2}{a \times b} \quad \text{II)}$$

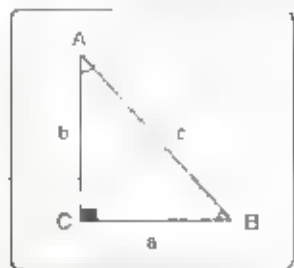
Reemplazamos (I) en (II)

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{cosec} A = \frac{7ab}{a \times b} = 7 \quad \operatorname{sen} A + \operatorname{cosec} A = 7 \quad \text{Rpta. E}$$

Problema 2 En un triángulo rectángulo ABC ($C = 90^\circ$) se cumple que $\cotg A \cdot \cos A = 3$. Calcular $M = \sec B - \cos B$

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución



• De la condición $\cotg A \cdot \cos A = 3$, obtenemos

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} = 3 \Rightarrow b^2 = 3a \times c \quad \text{I}$$

Luego, la expresión incógnita, se puede escribir así

$$M = \sec B \cdot \cos B$$

$$M = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c} \Rightarrow M = \frac{c^2}{a \times c} \quad \text{II}$$

Por el teorema de pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{III}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$M = \frac{b^2}{a \times c} \quad \text{IV}$$

Reemplazamos (I) en (IV)

$$M = \frac{3a \times c}{a \times c} = 3 \quad \text{Rpta. A}$$

Problema 3: En un triángulo ABC, recto en "C", reducir $Q = (\sen A \cdot \cos A + \sen B \cdot \cos B)^2$

A) 1

B) 0

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

Del $\triangle ABC$ obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \sen A = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{b}{c} \\ \sen B = \frac{b}{c} \quad \cos B = \frac{a}{c} \end{array} \right\}$$

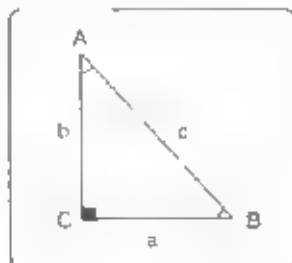
De la expresión $Q = (\sen A \cdot \cos A + \sen B \cdot \cos B)^2$

Obtenemos:

$$Q = \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{c} \right)^2$$

$$Q = \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \right)^2 = (0)^2 = 0$$

"Q = 0" Rpta. B



Problema 4: En un triángulo ABC, recto en "C", se tiene que

$$\frac{\lg A}{1 - \sen A} = \frac{\lg B}{1 - \cos B}$$

Hallar " $\lg A + \lg B$ "

A) 1

B) 2

C) 3

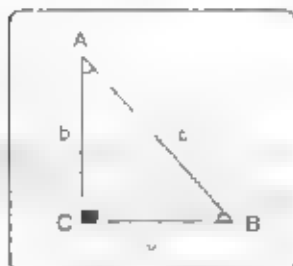
D) -1

E) -2

Resolución:

De la condición. $\frac{\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{ctg} B}{1 - \cos B}$

Otenemos $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$



De la expresión incógnita $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$ obtenemos $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Reemplazamos (i) en (ii) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{b}{b} + \frac{b}{b} = 1 + 1 = 2$ **Rpta B**

Problema 5 En un triángulo rectángulo ABC (recto en "A") de superficie 0.5 m^2

Calcular $Q = \frac{b^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{c^2}{\operatorname{tg} C}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

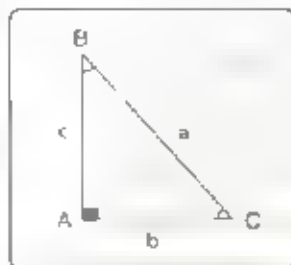
Resolución:

Por dato $\text{Area } \triangle ABC = \frac{\text{Cateto (AC)} \times \text{Cateto (AB)}}{2}$

$0.5 = \frac{b \times c}{2} \Rightarrow 1 = b \times c$

De la expresión $Q = \frac{b^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{c^2}{\operatorname{tg} C}$ Obtenemos

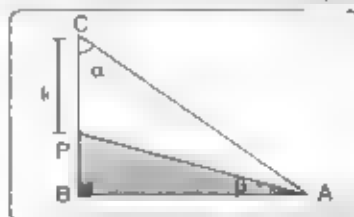
$Q = \frac{b^2}{\frac{b}{c}} + \frac{c^2}{\frac{c}{b}} = 2b \times c$



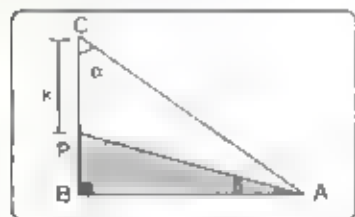
Reemplazamos (i) en (i) $Q = 2(1) = 2$ **Rpta. B**

Problema 6 En la figura mostrada Hallar AB en función de α , β y k

- A) $k \sin \alpha + \cos \beta$ B) $\frac{k}{\cotg \alpha - \tg \beta}$
- C) $\frac{k}{\tg \alpha - \cotg \beta}$ D) $k \cos \alpha \sin \beta$
- E) N.A.



Resolución.



- En el $\triangle PBA$, $\tg \beta = \frac{PB}{AB} \Rightarrow PB = AB \cdot \tg \beta$ I

- En el $\triangle CBA$, $\cotg \alpha = \frac{CB}{AB} \Rightarrow CB = AB \cdot \cotg \alpha$ II

De la figura $CB = CP + PB \Rightarrow CB = k + PB$ III

Reemplazamos (I) y (II) en (III). $AB \cdot \cotg \alpha = k + AB \cdot \tg \beta$

$AB \cdot \cotg \alpha - AB \cdot \tg \beta = k$, factorizamos AB

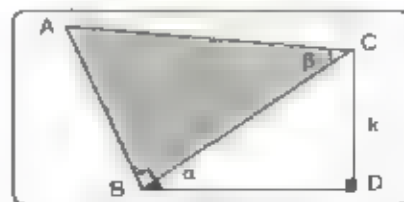
$AB (\cotg \alpha - \tg \beta) = k$

$AB = \frac{k}{(\cotg \alpha - \tg \beta)}$

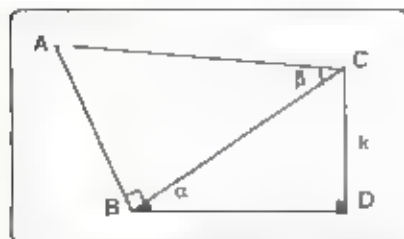
Rpta. B

Problema 105 En la figura mostrada, hallar el área del triángulo ABC en función de "k", " α " y " β "

- A) $0,5 (k \csc \alpha \tg \beta)$
- B) $0,5 (k \sec \alpha \ctg \beta)$
- C) $0,5 (k^2 \csc^2 \alpha \tg \beta)$
- D) $0,5 (k^2 \sec^2 \alpha \tg \beta)$
- E) $0,5 (k^2 \sec^2 \alpha \cotg \beta)$



Resolución.



- En el $\triangle BDC$, $\csc \alpha = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{k}$

$BC = k \csc \alpha$ I

- En el $\triangle ABC$, $\tg \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{k \csc \alpha}$

$\therefore AB = k \csc \alpha \tg \beta$ II

Luego $\text{Area } ABC = \frac{\text{Cateto } (BC) \times \text{Cateto } (AB)}{2}$ (I)

Reemplazamos (I) y (II) en (III)

$$\text{Area } ABC = \frac{k \operatorname{cosec} \alpha \times k \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{tg} \beta}{2} = \frac{1}{2} (k^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta)$$

$$\text{Area } ABC = 0,5 (k^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta) \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 8 Hallar, la fórmula para el área de un triángulo cualquiera en función de dos de sus lados y el ángulo que forman

Demostración

Por Geometría: $\text{Area } \Delta ABC = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}$

$$\text{Area } \Delta ABC = \frac{b \times h}{2}$$

Por trigonometría: En el ΔAHB :

$$\operatorname{Sen} A = \frac{BH}{AB} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \operatorname{sen} A$$

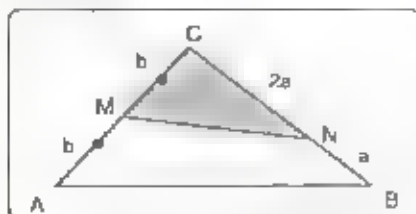
Reemplazamos (II) en (I): $\text{Area } \Delta ABC = \frac{b \times c \operatorname{sen} A}{2}$

$$\text{Area } \Delta ABC = \left(\frac{b \times c}{2} \right) \operatorname{sen} A \quad \text{Fórmula}$$

Problema 9 Calcular el área del ΔMCN si el área del ΔABC es igual a 36 u^2 , además $\frac{CN}{NB} = 2$

- A) 10 u^2 B) 11 u^2 C) 12 u^2
D) 13 u^2 E) 14 u^2

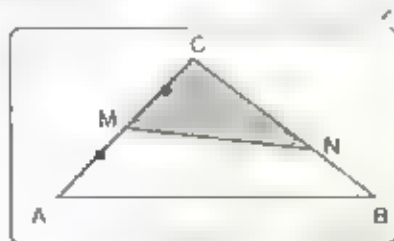
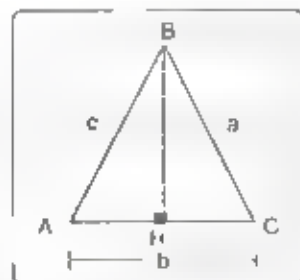
Resolución.



De la condición, $\frac{CN}{NB} = 2 \Rightarrow CN = 2 \cdot NB$

Hacemos $NB = a$

Donde $CN = 2a$



Por dato: $\text{Area } \triangle ABC = 36 u^2$

$$\left(\frac{AC \times CB}{2} \right) \sin C = 36 u^2 \Rightarrow \left(\frac{2b \times 3a}{2} \right) \sin C = 36 u^2$$

$$a \cdot b \sin C = 12 u^2 \quad \dots$$

Ahora, calculamos el área MCN

$$\text{Area } \triangle MNC = \left(\frac{MC \times CN}{2} \right) \sin C \Rightarrow \text{Area } \triangle MCN = \left(\frac{b \times 2a}{2} \right) \sin C$$

$$\therefore \text{Area } \triangle MCN = a \cdot b \sin C$$

Reemplazamos (1) en (1)

$$\text{Area } \triangle MCN = 12 u^2$$

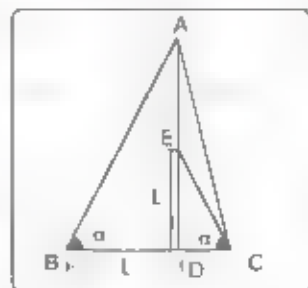
Rpta C

Problema 10 En la figura mostrada, $BD = DE = L$. Calcular el área del $\triangle ADC$ en función de "L".

- A) $\frac{L^2}{2}$ B) $\frac{2L^2}{3}$ C) $\frac{L^2}{3}$
D) $\frac{L}{2}$ E) N.A

Resolución.

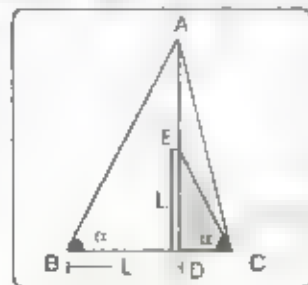
- En el $\triangle EDC$: $\cotg \alpha = \frac{DC}{DE} = \frac{DC}{L} \Rightarrow DC = L \cotg \alpha \quad \text{I}$



En el $\triangle ADB$: $\tg \alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{L} \Rightarrow AD = L \tg \alpha \quad \text{II}$

Luego: $\text{Area } \triangle ADC = \frac{DC \times AD}{2} \quad \text{III}$

Reemplazamos (I) y (II) en (III)



$$\text{Area } \triangle ADC = \frac{L \cotg \alpha \times L \tg \alpha}{2} \Rightarrow \text{Area } \triangle ADC = \frac{L^2 \tg \alpha \cotg \alpha}{2}$$

Pero: $\tg \alpha \cotg \alpha = 1 \Rightarrow \text{Area } \triangle ADC = \frac{L^2}{2} \Rightarrow \text{Rpta. A}$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

NIVEL I

Ejercicio 1 En el triángulo rectángulo ACB recto en "C" Si $\cos A = 5/13$ Hallar el valor de "tg B"

- A) 13/12 B) 12/5 C) 5/12
D) 12/13 E) 13/5

Ejercicio 2 En el triángulo rectángulo ABC recto en "B" Si $\operatorname{tg} C = 3/5$, Hallar el valor de "sen A"

- A) $\frac{\sqrt{34}}{34}$ B) $\frac{\sqrt{34}}{3}$ C) $\frac{5}{\sqrt{34}}$ D) $\frac{\sqrt{34}}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

Ejercicio 3 En el triángulo ACB recto en "C" se sabe que $\operatorname{Cotg} A = 0,777 \dots$ Hallar el valor de "Sen B"

- A) $\frac{\sqrt{130}}{9}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{\sqrt{130}}{7}$
D) $\frac{9}{\sqrt{130}}$ E) $\frac{7\sqrt{130}}{130}$

Ejercicio 4 En el triángulo ABC recto en "B" se sabe que $5 \cos A = 3$ Hallar el valor de $12 (\operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} A)$
5 sen A

- A) 6 B) 8 C) 5 D) 9 E) 12

Ejercicio 5 En el triángulo ACH recto en "C" se sabe que $7 \operatorname{sen} B = 5$. Hallar el valor de $4 (\operatorname{sen} A - \operatorname{tg} A)$
3 cos B

- A) 15/8 B) 5/7 C) 8/15 D) 16/15 E) -5/7

Ejercicio 6 En el triángulo ABC recto en "B", se sabe que $\operatorname{Sen} A = 0,272727$ Hallar el valor de "Sen C"

- A) $\frac{2\sqrt{7}}{11}$ B) $\frac{4\sqrt{7}}{11}$ C) $\frac{11\sqrt{7}}{7}$ D) $\frac{4}{3}\sqrt{7}$ E) $\frac{11}{\sqrt{7}}$

Ejercicio 7 En el triángulo BAC recto en "A" se sabe que $3 \cos C = 1$ Hallar el valor de

$$\frac{\operatorname{Cotg} A + \operatorname{tg} B}{4}$$

- A) 65/18 B) 1/3 C) 32/65 D) 65/16 E) 65/32

Ejercicio 8 Si

$$\operatorname{Sen} [(a-b) + x - 4^\circ] \operatorname{Cosec} \{5x - (b-a) - 36^\circ\} = 1$$

Hallar el valor de "x"

- A) 4° B) 6° C) 8° D) 12° E) 16°

Ejercicio 9 Si

$$\operatorname{Sec} (x - 3y) \operatorname{Cosec} (2y + x)$$

$$\operatorname{Cotg} (2x - y) = \operatorname{tg} (60^\circ - x) \quad \text{II}$$

Hallar el valor de $E = 3x - 2y$

- A) 60° B) 100° C) 110° D) 120° E) 140°

Ejercicio 10 Si

$$\operatorname{tg} (x + y - 2z + 40^\circ) \operatorname{cotg} (2x - y + 2z) = 1 \quad \text{I}$$

$$\operatorname{Sen} (3x - 20^\circ) \operatorname{Sec} (50^\circ - y) - 1 = 0 \quad \text{II}$$

Calcular el valor de "x"

- A) 18° B) 16° C) 32° D) 30° E) 24°

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. E	4. B	5. C
6. B	7. E	8. C	9. D	10. B

NIVEL II

Ejercicio 1 En un triángulo ABC, recto en "C" se tiene que

$\lg B = \cos A (4 - \operatorname{cosec} A)$. Hallar "Sen A"

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio 2 En un triángulo BAC, recto en "A", se tiene que

$\cos B - \cos C = 3/7$. Hallar " $\lg B + \lg C$ "

- A) $7/3$ B) $7/5$ C) $7/4$ D) $7/2$ E) $3/7$

Ejercicio 3 En un triángulo BAC, recto en "A" Hallar " $\lg B + \lg C$ ", Si:

$$\operatorname{Sen} B + \operatorname{Sen} C = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- A) 4 B) 8 C) 12 D) 2 E) $\sqrt{5}$

Ejercicio 4 En un triángulo ABC, recto en "B", Hallar " $\lg A$ ", sabiendo que:

$$3 \operatorname{Sen} A + 2 \operatorname{Sec} C = 7$$

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

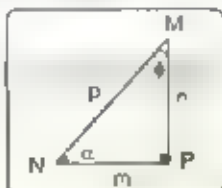
Ejercicio 5 En un triángulo ABC ($A = 90^\circ$), se cumple que: $\operatorname{Sen} B - \cos C = 5 \cos B$

Hallar $Q = 2 + \operatorname{Cotg}^2 C - 5 \operatorname{Sec} B$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 1,5 E) 2,5

Ejercicio 6 De acuerdo a los datos de la figura adjunta, marca lo incorrecto.

- A) $n = p \cos \phi$
 B) $m = p \cos \alpha$
 C) $n = m \operatorname{tg} \alpha$
 D) $p = n \operatorname{sec} \phi$
 E) $p = m \operatorname{cosec} \alpha$



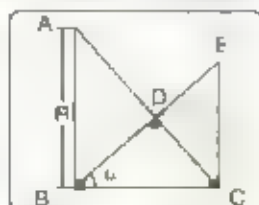
Ejercicio 7 Si los lados de un triángulo rectángulo POR (recto en "R") son p, q y r respectivamente, expresar en términos de los lados

$$Y = \frac{\operatorname{Sec}^2 P + \operatorname{Sec}^2 Q}{\lg P + \lg Q}$$

- A) $\frac{r^2}{pq}$ B) $\frac{p^2}{rq}$ C) $\frac{q^2}{pr}$
 D) $\frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}$ E) $\frac{p+r}{q+r}$

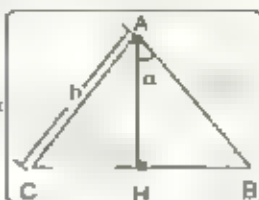
Ejercicio 8 De la figura mostrada Hallar "DE"

- A) $R \operatorname{Sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$
 B) $R \operatorname{Sen}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha$
 C) $R \operatorname{Sen} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha$
 D) $R \cos \alpha - \operatorname{cotg} \alpha$
 E) $R \cos \alpha - \operatorname{cotg}^2 \alpha$



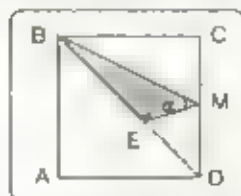
Ejercicio 9 Halla "BH", en términos de "h" y "α" en el triángulo BAC, recto en "A"

- A) $h \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha$
 B) $h \operatorname{tg} \alpha$
 C) $h \operatorname{sec} \alpha - \operatorname{cosec} \alpha$
 D) $h \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$
 E) $h \operatorname{sec} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$



Ejercicio 10 En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado. "M" es punto medio de CD. Hallar " $\lg \alpha$ "

- A) 1 B) 2
 C) 3 D) 1,5
 E) 2,5



Ejercicio 11 En un triángulo rectángulo ABC, recto en "B" se cumple que:

$\cos A + \cos C = \sqrt{2}$ Calcular

" $\operatorname{Cosec} A + \operatorname{Cosec} C$ "

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 3

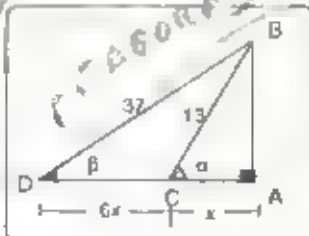
Ejercicio 12 En un triángulo rectángulo ABC recto en "C", y de área igual 8 m^2 Calcular

$R = b^2 \operatorname{Cotg} B + a^2 \operatorname{Cotg} A$

- A) 16 m^2 B) 24 m^2 C) 32 m^2
D) 36 m^2 E) 48 m^2

Ejercicio 13 De la figura mostrada. Calcular " $\lg a \lg b$ "

- A) $96/35$
B) $72/35$
C) $14/5$
D) $24/5$
E) $37/13$



Ejercicio 14 En un triángulo rectángulo ABC (recto en "B"), se cumple que

$\lg A + a \operatorname{Cosec} C = b \cdot S$

Siendo "S" el área del triángulo. Hallar el valor del cateto "c"

- A) 1 B) 2 C) $1/2$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{2}$

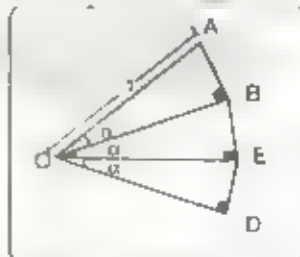
Ejercicio 15 En un triángulo rectángulo se tiene que sus lados se encuentran en progresión aritmética. Determina la suma de los senos de sus ángulos agudos

- A) $\frac{17}{13}$ B) $\frac{23}{17}$ C) $\frac{7}{5}$
D) $\frac{31}{25}$ E) $\frac{41}{49}$

Ejercicio 16 De la figura mostrada. Hallar el valor de "x"

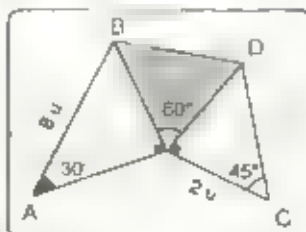
$x = OA + OB + OC + OD +$

- A) 1
B) $\cos \alpha$
C) $\frac{1}{1 + \cos \alpha}$
D) $\frac{1}{1 + \cos \alpha}$
E) $\frac{1}{1 + \cos \alpha}$



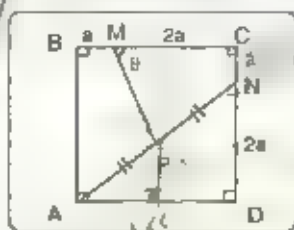
Ejercicio 17 De la figura mostrada. Hallar el área sombreada

- A) $4\sqrt{2}$
B) $4\sqrt{3} u^2$
C) $2\sqrt{3} u^2$
D) $8u^2$
E) $6\sqrt{3} u^2$



Ejercicio 18 De la figura mostrada, calcule " $\lg 0$ "

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Clave de Respuestas

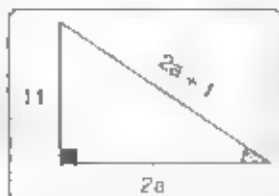
1. C	2. A	3. B	4. B	5. B
6. E	7. A	8. C	9. D	10. C
11. C	12. C	13. B	14. B	15. C
16. C	17. C	18. C		

Ejercicio 13 De la figura mostrada, calcular $R = \text{Sen } \alpha + \text{Cos } \alpha$

A) $\frac{59}{61}$ B) $\frac{71}{61}$

C) $\frac{61}{59}$ D) $\frac{61}{71}$

E) 1,2



Ejercicio 14 En un triángulo rectángulo BCA (recto en "C") Calcular el lado "b" si

$$\text{Sec } A + \text{Sec } B - \text{tg } A = \frac{8}{ab}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{2}/4$

Ejercicio 15 En un triángulo rectángulo ABC (recto en "C") Hallar el seno de ángulo "A" si se cumple que: $2 \cotg A = 3 \cotg B$

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ E) $\frac{2}{5}$

Ejercicio 16 En un triángulo rectángulo ABC (recto en "B") se sabe que un cateto es el triple del otro

Calcular $K = \cotg^2 A + \text{Cosec}^2 A$, si $\hat{C} > \hat{A}$

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Ejercicio 17 En un triángulo rectángulo ABC (recto en "B") se cumple que $4a = b + 4c$. Calcular $K = \text{Sen } A \cdot \text{Sen } C$

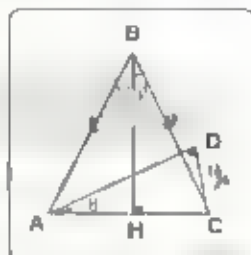
A) $1/2$ B) $1/3$ C) $1/4$ D) $1/5$ E) $1/6$

Ejercicio 18 En un triángulo rectángulo el menor cateto es el triple de la diferencia entre los otros 2 lados. Hallar la tangente del mayor ángulo agudo.

A) $1/2$ B) $1/3$ C) $4/3$ D) $3/4$ E) 2

Ejercicio 19 Si $AB = BC$ y $CD = 2$. Hallar BH en términos de " β " y " θ "

- A) $\text{Sen } \theta + \text{Sen } \beta$
 B) $\cotg \theta \cdot \text{Cosec } \beta$
 C) $\lg \theta \cdot \text{Cosec } \beta$
 D) $\lg \beta \cdot \text{Sen } \theta$
 E) $\cotg \beta \cdot \text{Cosec } \theta$



Ejercicio 20 En un triángulo BAC recto en "C", se tiene

$$\lg B = \cos A (4 - \text{Cosec } A) \text{ Hallar } \text{Sen} \left(\frac{\pi}{3} + A \right)$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

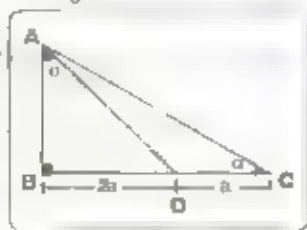
Ejercicio 21 De la figura mostrada Hallar

" $\lg \alpha$ "

A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{5}$

C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



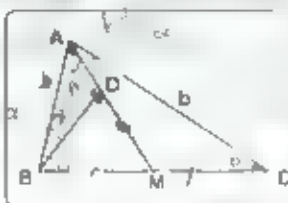
Ejercicio 22 En un triángulo rectángulo ABC, se tiene que el ángulo recto está en "C" y además $(\cos A - \cos B)^{-1} = 5$; Calcule el valor de

$$E = \frac{\text{Sen } A + \text{Sen } B}{\lg B \cdot \lg A}$$

A) $12/5$ B) $7/5$ C) $5/7$ D) $12/7$ E) 2

Ejercicio 23 Hallar \overline{BD} ; si \overline{AM} es mediana

- A) $b \sec \alpha$
 B) $b \operatorname{cosec} \alpha$
 C) $b \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cog} \alpha$
 D) $b \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$
 E) $b \operatorname{tg} \alpha$



Ejercicio 1 Si $K = \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{8} \sec 60^\circ$

Calcular $O = \operatorname{sen} 8K^\circ \sec 22K^\circ \sec 60^\circ$

- A) 3 B) 2 C) 4 D) 6 E) 5

Ejercicio 2 Calcular " x " si (" x " \rightarrow ángulo agudo)

$$\operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{sen} (2x + 5^\circ) \operatorname{tg} 46^\circ \operatorname{cosec} 15^\circ = 2 \operatorname{sen} 30^\circ$$

- A) 3° B) 4° C) 5° D) 6° E) 7°

Ejercicio 3 Si

$$M = \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ \quad y$$

$$R = 3M \operatorname{tg} 30^\circ \sec 60^\circ \quad \text{Hallar } \operatorname{sen} \left\{ \frac{R}{80} \right\}$$

- A) 0.8 B) 0.6 C) $\sqrt{2}/2$ D) $1/2$ E) $\sqrt{3}/2$

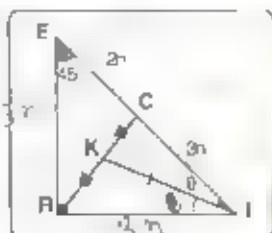
Ejercicio 4 Si se cumple que $\operatorname{sen} (x + 2y) \cos (3x + y) = 0$ Calcular el valor de

$$M = \frac{\operatorname{tg} (2x - 3y)}{\operatorname{cog} (2x + 6y)}$$

- A) $1/2$ B) $1/3$ C) 1 D) 2 E) 0.25

Ejercicio 5 Calcular el valor de " $\operatorname{tg} \theta$ " en la figura mostrada:

- A) $5/11$
 B) $6/13$
 C) $7/12$
 D) $5/13$
 E) $7/10$



Ejercicio 6 Siendo $\cos 40^\circ \sec 2x = 2 \operatorname{sen} y = 1$ Hallar el valor de " $x + y$ " si " x " o " y " son ángulos agudos.

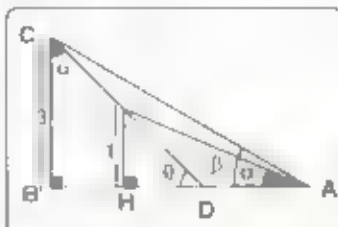
- A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

Ejercicio 7 Si $\cos (x + 20^\circ) = \operatorname{sen} (3x + 10^\circ)$. Calcular el valor de $M = 4 \operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{tg} 3x + \sec 4x$ ($x \rightarrow$ ángulo agudo)

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

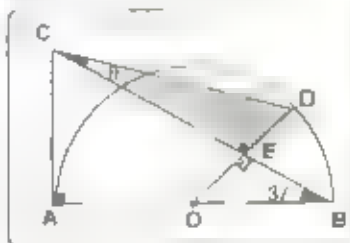
Ejercicio 8 De la figura mostrada Hallar $R = 3 \operatorname{cog} \beta - \operatorname{cog} \alpha$

- A) $\operatorname{cog} \beta$
 B) $2 \operatorname{cog} \beta$
 C) $3 \operatorname{cog} \beta$
 D) $4 \operatorname{cog} \beta$
 E) $5 \operatorname{cog} \beta$



Ejercicio 9 Del gráfico mostrado Calcular " $\operatorname{tg} \theta$ " (O Centro de la semicircunferencia)

- A) $4/7$
 B) $3/7$
 C) $4/17$
 D) $3/17$
 E) $5/17$



Clave de Respuestas

1. B	2. B	3. B	4. C	5. C
6. C	7. E	8. D	9. D	10. A
11. D	12. B	13. C	14. E	15. C
16. A	17. D	18. C	19. B	20. C



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizado por las Academias

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

PROBLEMA 1 De la figura. Calcular BD, si $\text{Sen } \alpha + \text{Cos } \beta = 1$, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{BC} = 4$

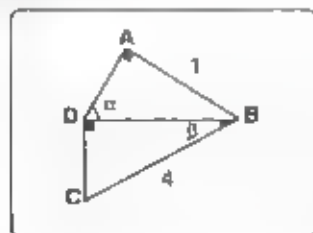
A) 4

B) 2

C) 1

D) 5

E) 3

Resolución

$$\bullet \text{ En el } \triangle DAB \quad \text{Sen } \alpha = \frac{AB}{DB} = \frac{1}{DB} = \frac{1}{\overline{BD}}$$

$$\text{Sen } \alpha = \frac{1}{\overline{BD}} \quad (I)$$

$$\bullet \text{ En el } \triangle CDB \quad \text{Cos } \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{BD}{4}$$

$$\text{Cos } \beta = \frac{\overline{BD}}{4} \quad (II)$$

• (I) y (II), los reemplazamos en la expresión:

$$\text{Sen } \alpha + \text{Cos } \beta = 1 \Rightarrow \frac{1}{\overline{BD}} + \frac{\overline{BD}}{4} = 1, \text{ Resolviendo la ecuación:}$$

$$4 + \overline{BD}^2 = 4\overline{BD}$$

$$\overline{BD}^2 - 4\overline{BD} + 4 = 0 \quad \text{factorizamos aplicando el método del Aspa.}$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{BD} & & 2 \\ \swarrow & & \searrow \\ \overline{BD} & - & 2 \end{array}$$

Donde $(\overline{BD} - 2)(\overline{BD} - 2) = 0$ igualando cada factor a cero, obtenemos.

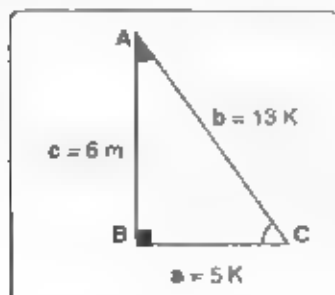
$$I) \quad \overline{BD} - 2 = 0 \Rightarrow \overline{BD} = 2 \quad II) \quad \overline{BD} - 2 = 0 \Rightarrow \overline{BD} = 2 \quad \boxed{\overline{BD} = 2} \text{ Rpta. B}$$

PROBLEMA 2: En un triángulo rectángulo ABC, ($B = 90^\circ$). Se cumple que: $\text{Sen } A = \frac{2x+1}{6x+1}$ y

$\text{Cos } C = \frac{3x-1}{7x-1}$, si el cateto mayor mide 6 m. Calcular el área de dicho triángulo.

A) 12 m²B) 9 m²C) 6 m²D) 7,5 m²E) 8,5 m²

Resolución:



• Por propiedad:

$$\text{Sen } A = \text{Cos } C$$

Donde $\frac{2x+1}{6x+1} = \frac{3x-1}{7x-1}$, resolviendo la ecuación:

$$(2x+1)(7x-1) = (3x-1)(6x+1)$$

$$14x^2 + 5x - 1 = 18x^2 - 3x - 1$$

$$8x = 4x^2 \Rightarrow \therefore x = 2$$

Luego: $\text{Sen } A = \frac{2x+1}{6x+1} = \frac{2(2)+1}{6(2)+1} = \frac{5}{13}$

$$\text{Sen } A = \frac{5}{13} \rightarrow \begin{matrix} 5K & (\text{cateto opuesto}) \\ 13K & (\text{hipotenusa}) \end{matrix}$$

• En el $\triangle ABC$, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow (13K)^2 = (5K)^2 + (6m)^2$$

$$169K^2 - 25K^2 = 36m^2$$

$$144K^2 = 36m^2 \quad \text{extraemos raíz cuadrada a}$$

ambos miembros $\sqrt{144K^2} \quad \sqrt{36m^2} \Rightarrow 12K \quad 6m \Rightarrow K = \frac{1}{2}m$

• Ahora hallamos el área del triángulo ABC

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{\text{Cateto}(BC) \times \text{Cateto}(AB)}{2} = \frac{(5K) \times (6m)}{2}$$

$$\text{Area } \triangle ABC = 15Km \quad \text{y } \left(\frac{1}{2}m\right)m = 7,5m^2$$

$$\text{Area } \triangle ABC = 7,5 \text{ m}^2$$

Rpta. D

PROBLEMA 3 • En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$) se sabe que $\text{tg } A \cdot \text{Cotg } C = 16$. Calcular $P = 17(\text{Sen } C + \text{Cos } A)$

A) $4\sqrt{17}$

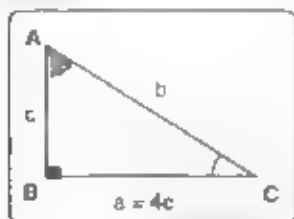
B) $2\sqrt{17}$

C) 17

D) 34

E) N.A

Resolución.



• De la condición: $\operatorname{tg} A = \cotg C = 16$, obtenemos

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{a}{c} = \frac{a}{c} = 16 \end{array}$$

$a^2 = 16c^2$, extraemos raíz cuadrada

a ambos miembros: $\sqrt{a^2} = \sqrt{16c^2} \quad a = 4c$

• En el $\triangle ABC$, aplicamos el Teorema de Pitágoras

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow b^2 = (4c)^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 17c^2 \Rightarrow b = \sqrt{17}c$$

• De la expresión $P = 17 (\operatorname{Sen} C + \operatorname{Cos} A)$ obtenemos

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ P = 17 \left(\frac{c}{b} + \frac{c}{b} \right) \Rightarrow P = 17 \left(\frac{2c}{b} \right) \end{array}$$

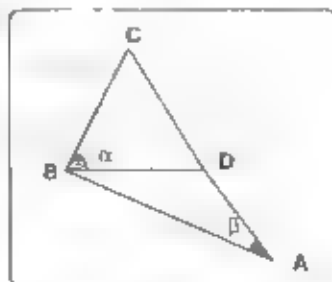
El valor de $b = \sqrt{17}c$ lo reemplazamos en esta última expresión

$$P = 17 \left(\frac{2c}{\sqrt{17}c} \right) = \cancel{17} \left(\frac{2\sqrt{17}}{\cancel{17}} \right) \Rightarrow \underline{P = 2\sqrt{17}} \quad \text{Rpta. B}$$

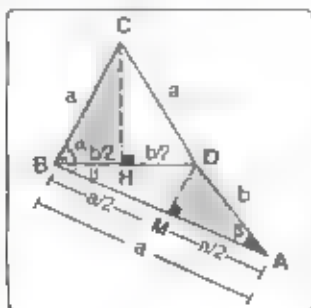
Problema 4 De la figura mostrada $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BD}$. Calcular $^{\circ}\operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} \beta$

A) 0,50 B) 0,35 C) 0,25

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) 0,1



Resolución.



• Hacemos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$ y $\overline{AD} = \overline{BD} = b$

• Como se podrá observar los triángulos BCD y ADB, resultan ser isósceles

• En el $\triangle BHC$

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} = \frac{b/2}{a} \Rightarrow \operatorname{Cos} \alpha = \frac{b}{2a}$$

• En el $\triangle DMA$ $\cos \beta = \frac{MA}{DA} = \frac{a/2}{b} \Rightarrow \cos \beta = \frac{a}{2b}$

Luego: $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{b}{2a} = \frac{a}{2b} \Rightarrow \frac{1}{4} = 0.25 \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta = 0.25$ Rpta. C

PROBLEMA 5 En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$) se cumple que $\lg A = 3 \lg C$. Calcular $Q = 2(\sec A + \sec C)$

A) 3

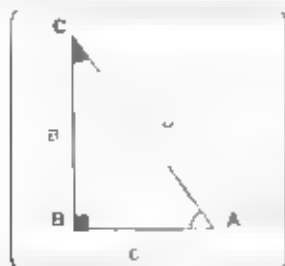
B) 5

C) 6

D) 4

E) 8

Resolución.



• De la expresión $\lg A = 3 \lg C$ obtenemos

$$\frac{a}{c} = 3 \left(\frac{c}{a} \right) \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = 3c^2 \quad (I)$$

• Por el Teorema de Pitágoras $b^2 = a^2 + c^2$ (II)

Reemplazamos (I) en (II):

$$b^2 = 3c^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 4c^2 \Rightarrow \dots b = 2c \dots (III)$$

• De la expresión $Q = 2(\sec A + \sec C)$ obtenemos

$$Q = 2 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right) \Rightarrow Q = 2 \left(\frac{b^2 + c^2}{bc} \right) \quad (IV)$$

Reemplazamos (I) en (IV) $Q = 2 \left(\frac{4c^2 + c^2}{2c \cdot c} \right) = 2 \left(\frac{5c^2}{2c^2} \right) \Rightarrow Q = 5$ Rpta. B

PROBLEMA 6 En un triángulo rectángulo BAC ($A = 90^\circ$) se sabe que $b \operatorname{Cosec} B + a \operatorname{Sen} C = 10$ y $b = 2\sqrt{10}$. Calcular la tangente de mayor ángulo agudo.

A) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

B) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

C) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

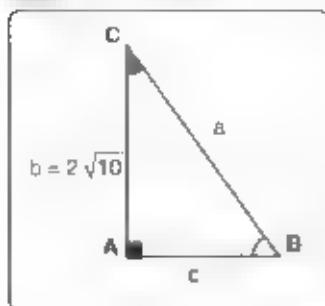
D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

E) N.A

Resolución.

• De la expresión $b \operatorname{Cosec} B + a \operatorname{Sen} C = 10$ obtenemos

$$\cancel{b} \frac{a}{\cancel{b}} + \cancel{a} \frac{c}{\cancel{a}} = 10 \Rightarrow a + c = 10 \quad (I)$$



• Por el Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\underbrace{a^2 - c^2}_{\downarrow} = b^2$$

$$(a + c)(a - c) = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow (a + c)(a - c) = 40 \quad (I)$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$10(a - c) = 40 \Rightarrow \therefore a - c = 4 \quad (III)$$

• De las expresiones (I) y (III) obtenemos

$$\begin{cases} a - c = 10 & (I) \\ a - c = 4 & \dots (III) \end{cases}$$

$$\Sigma \text{ M.A.M.} \quad 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

$$\text{Reemplazamos el valor de } a = 7, \text{ en (I): } a + c = 10 \Rightarrow 7 + c = 10 \Rightarrow c = 3$$

Luego, calculamos la tangente del mayor ángulo agudo, veamos.

$$\operatorname{tg} B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} B = \frac{2\sqrt{10}}{3}} \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 7 : Si en el triángulo rectángulo el cuadrado de uno de sus catetos es 17. Calcular el coseno del mayor ángulo agudo, siendo los lados restantes números enteros

A) $\frac{\sqrt{17}}{8}$

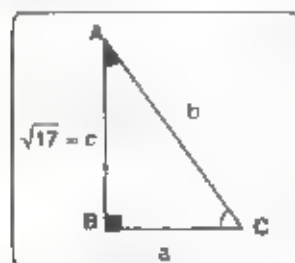
B) $\frac{\sqrt{17}}{9}$

C) $\frac{\sqrt{9}}{17}$

D) $\frac{8}{9}$

E) $\frac{9}{8}$

Resolución:



• Por dato: $c^2 = 17 \Rightarrow \therefore c = \sqrt{17}$

• Por el Teorema de Pitágoras: $m^2 + c^2 = b^2$

$$\downarrow$$

$$a^2 + 17 = b^2$$

Recorda que

A mayor ángulo se opone mayor lado.

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= 17 \\ (b + a)(b - a) &= 17 \times 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} i) & b - a = 17 \\ ii) & b - a = 1 \end{cases}$$

$$\Sigma \text{ M.A.M.} \quad 2b = 18 \Rightarrow \therefore b = 9$$

El valor de $b = 9$; lo reemplazamos en (i) $9 + a = 17 \Rightarrow a = 8$

Luego, calculamos el valor del coseno del mayor ángulo agudo.

$$\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{17}}{9} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{17}}{9} \quad \text{Rpta. B}$$

PROBLEMA 8 : Siendo α y θ los menores valores posibles para los cuales se tiene que: $\text{Sen}(2\alpha + \theta)^\circ = \text{Cos}(2\theta + \alpha)^\circ$ Calcular el valor de $E = \frac{\text{Sen}(3\alpha)^\circ}{\text{Cos}(30)^\circ} + \text{Cosec}^2(\alpha + \theta)^\circ$

Calcular el valor de $E = \frac{\text{Sen}(3\alpha)^\circ}{\text{Cos}(30)^\circ} + \text{Cosec}^2(\alpha + \theta)^\circ$

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Resolución:

- De la condición: $\text{Sen}(2\alpha + \theta)^\circ = \text{Cos}(2\theta + \alpha)^\circ$ obtenemos
 $(2\alpha + \theta)^\circ + (2\theta + \alpha)^\circ = 90^\circ \Rightarrow 3\alpha + 3\theta = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \theta = 30$
- De la expresión: $3\alpha + 3\theta = 90^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ - 3\theta$

Los valores hallados, los reemplazamos en la expresión "E"

Recuerda que:

- $\text{Sen}(90^\circ - x) = \text{Cos } x$
- $\text{Cosec } 30^\circ = 2$

$$E = \frac{\text{Sen}(90 - 3\theta)^\circ}{\text{Cos}(30)^\circ} + \text{Cosec}^2(30)^\circ$$

$$E = \frac{\text{Cos}(3\theta)^\circ}{\text{Cos}(30)^\circ} + (2)^2 = 1 + 4 = 5$$

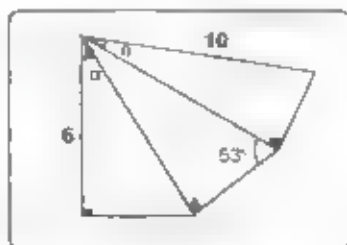
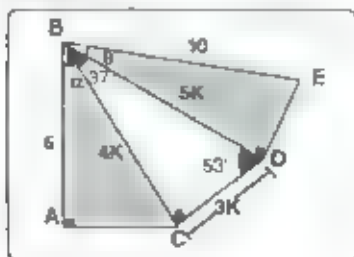
E = 5 Rpta. C

PROBLEMA 9 : Del esquema mostrado, determi-

ne $E = \text{Cos } \alpha \cdot \text{Cos } \theta$

- A) 2/3 B) 4/3 C) 3/2
 D) 3/4 E) 5/3


Resolución:



En el $\triangle BAC$: $\cos \alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

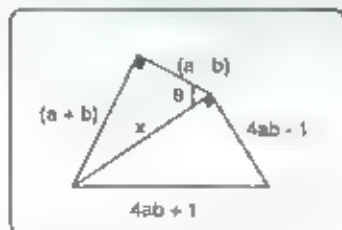
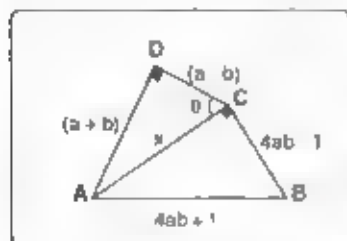
• En el $\triangle BDE$ $\cos \theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{5K}{10} \Rightarrow \cos \theta = \frac{K}{2}$

Luego $E = \cos \theta \cdot \cos \theta = \frac{3}{2K} \cdot \frac{K}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$  Rpta. D

PROBLEMA 10. Del esquema mostrado. Calcule el valor de $E = 2 \operatorname{Cosec}^2 \theta + 3 \cot^2 \theta$

- A) 1 B) 2 C) $3^{1/2}$
D) 4 E) 5

Resolución:



• En el $\triangle ADC$ Por el Teorema de Pitágoras

$$x^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 \Rightarrow \therefore x^2 = 2(a^2 + b^2) \quad (I)$$

• En el $\triangle ACB$ Por el Teorema de Pitágoras

$$(4ab+1)^2 = x^2 + (4ab-1)^2$$

$$16a^2b^2 + 8ab + 1 = x^2 + 16a^2b^2 - 8ab + 1 \Rightarrow 16ab = x^2 \quad (II)$$

Igualemos las expresiones (I) y (II) $2(a^2 + b^2) = 16ab \Rightarrow \therefore a^2 + b^2 = 8ab \quad \dots (III)$

• De la expresión "E", obtenemos

$$E = 2 \operatorname{Cosec}^2 \theta + 3 \cot^2 \theta = 2 \left(\frac{AC}{AD} \right)^2 + 3 \left(\frac{DC}{AD} \right)^2$$

$$E = \frac{2(AC)^2 + 3(DC)^2}{(AD)^2} = \frac{2x^2 + 3(a-b)^2}{(a+b)^2} \Rightarrow E = \frac{2x^2 + 3(a^2 + b^2 - 2ab)}{a^2 + b^2 + 2ab} \quad \dots (IV)$$

• Reemplazamos (III) y (II) en (IV):

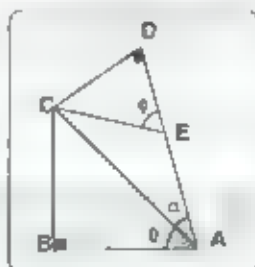
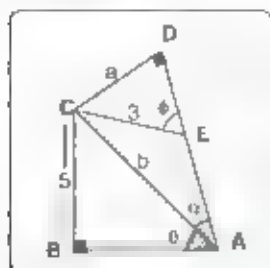
$$E = \frac{2(16ab) + 3(8ab - 2ab)}{8ab + 2ab} = \frac{50ab}{10ab} = 5 \Rightarrow \boxed{E=5} \text{ Rpta. E}$$

PROBLEMA 11 : En la figura mostrada, se tiene que: $CE = 3$ y $BC = 5$. Calcule el valor de

$$E = \frac{\text{Sen } \theta \cdot \text{Sen } \phi + \text{Sen } \alpha}{\text{Sen } \theta \cdot \text{Sen } \phi \cdot \text{Sen } \alpha}$$

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Resolución:



• En el $\triangle ABC$ $\text{Sen } \theta = \frac{5}{b}$... (I)

• En el $\triangle CDE$ $\text{Sen } \phi = \frac{a}{3}$ (II)

• En el $\triangle CDA$ $\text{Sen } \alpha = \frac{a}{b}$ (III)

Reemplazamos (I), (II) y (III) en la expresión "E".

$$E = \frac{\frac{5}{b} \cdot \frac{a}{3} + \frac{a}{b}}{\frac{5}{b} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{\frac{5a}{3b} + \frac{a}{b}}{\frac{5a^2}{3b^2}} = 4 \Rightarrow \underline{E = 4} \text{ Rpta. B}$$

PROBLEMA 12 Se tiene que $\text{Sen } (3x + y)^\circ \cdot \text{Cosec } (x + 3y)^\circ = 1$

Calcule el valor de $E = \frac{\text{Sen } (2x + y)^\circ}{\text{Sen } (2y + x)^\circ} + \frac{\text{Sen } (x + 30)^\circ}{\text{Cos } (60 - y)^\circ}$ A) 1 B) 3 C) 5
D) 4 E) 2

Resolución.

• De la condición

$$\text{Sen } (3x + y)^\circ \cdot \text{Cosec } (x + 3y)^\circ = 1$$

$$\text{Sen } (3x + y)^\circ = \frac{1}{\text{Cosec } (x + 3y)^\circ} \Rightarrow \text{Sen } (3x + y)^\circ = \text{Sen } (x + 3y)^\circ$$

Por comparación: $3x + y = x + 3y \Rightarrow x = y$

Reemplazamos $x = y$, en la expresión "E". $E = \frac{\text{Sen } (2x + x)^\circ}{\text{Sen } (2x + x)^\circ} + \frac{\text{Sen } (x + 30)^\circ}{\text{Cos } (60 - x)^\circ}$

$$E = 1 + \frac{\text{Cos } (90^\circ - (x + 30)^\circ)}{\text{Cos } (60 - x)^\circ} \Rightarrow E = 1 + \frac{\text{Cos } (60 - x)^\circ}{\text{Cos } (60 - x)^\circ} = 1 + 1 = 2 \quad \underline{E = 2} \text{ Rpta. E}$$

Recuerda que:

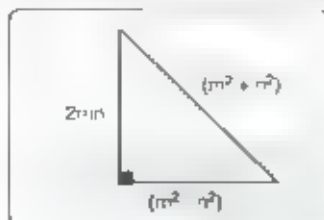
$$\text{Sen } \alpha = \text{Cos } (90^\circ - \alpha)$$

ESTUDIO DEL TRIÁNGULO PITAGÓRICO

- Todo triángulo pitagórico tiene sus lados expresados por números enteros positivos. Dichos lados tienen la siguiente forma

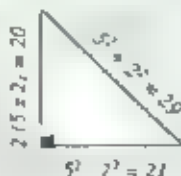
Siendo " m " y " n " números enteros positivos.

Además $m > n$



Observación. Si elegimos valores de " m " y " n " (números primos enteros entre sí) tal que $(m + n)$ resulte un número impar, se obtienen triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados también son números primos entre sí.

Ejemplo: Cuando: $m = 5$ y $n = 2$

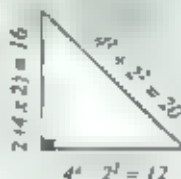


Ejemplo: Cuando: $m = 8$ y $n = 3$

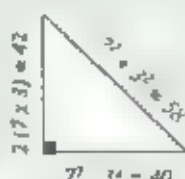


Observación. Cuando los valores de " m " y " n " (no son primos entre sí) o cuyo suma de m y n sea un número par se obtiene triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados está expresada por números que tienen un divisor común.

Ejemplo: Cuando: $m = 4$ y $n = 2$



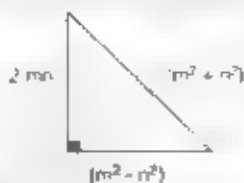
Ejemplo: Cuando: $m = 7$ y $n = 3$



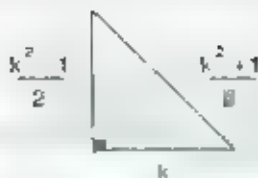
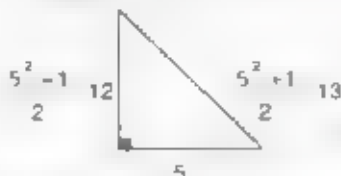
Caso Particular: Cuando se tiene dos números enteros (m y n), pero consecutivos, entonces se cumple:

$$m = \frac{k+1}{2} \quad \text{y} \quad n = \frac{k-1}{2}, \quad \text{Siendo } k \neq \text{impar}$$

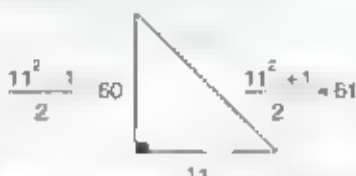
Luego



Ejemplo: Cuando $k = 5$



Ejemplo: Cuando $k = 11$



3.1.4 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DE 45°

- Sean los catetos del $\triangle ABC$ $AB = BC = L$

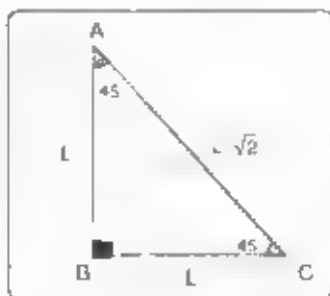
Por el teorema de Pitágoras

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$$

$$AC = \sqrt{2L^2} = \sqrt{2} \sqrt{L^2}$$

$$AC = \sqrt{2} L$$



Luego, calculamos las razones trigonométricas del ángulo de 45°

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{L}{L} = 1 = 1 \Rightarrow \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

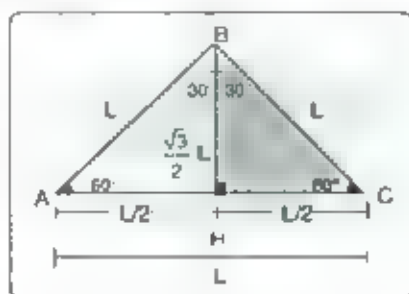
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30° Y 60°

Para hallar las razones trigonométricas de 30° y 60°, construimos un triángulo equilátero, veamos:

En el $\triangle BHC$ calculamos BH por el teorema de Pitágoras

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

$$L^2 = BH^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$



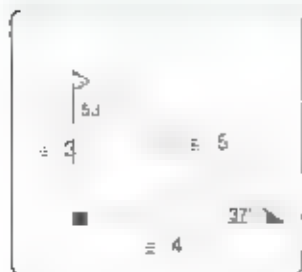
$$L^2 = BH^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = BH^2 \Rightarrow \frac{3L^2}{4} = BH^2$$

$$\sqrt{\frac{3L^2}{4}} = BH \Rightarrow \frac{\sqrt{3} \sqrt{L^2}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3} L}{2} = BH$$

Luego calculamos las razones trigonométricas de 30° y 60° en el BHC

$\rightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$	$\rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\rightarrow \text{cos } 30^\circ = \frac{L}{\frac{L}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow \text{cos } 60^\circ = \frac{L}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \frac{1}{2}$
$\rightarrow \text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\rightarrow \text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
$\rightarrow \text{ctg } 30^\circ = \frac{L}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{1} = 2$	$\rightarrow \text{ctg } 60^\circ = \frac{L}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\rightarrow \text{sec } 30^\circ = \frac{L}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{1} = 2$	$\rightarrow \text{sec } 60^\circ = \frac{L}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{1} = 2$
$\rightarrow \text{cosec } 30^\circ = \frac{L}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{1} = 2$	$\rightarrow \text{cosec } 60^\circ = \frac{L}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 37° Y 53° (APROXIMADAMENTE)



\rightarrow	$\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$	\rightarrow	$\sin 53^\circ = \frac{4}{5}$
\rightarrow	$\cos 37^\circ = \frac{4}{5}$	\rightarrow	$\cos 53^\circ = \frac{3}{5}$
\rightarrow	$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{3}{4}$	\rightarrow	$\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{4}{3}$
\rightarrow	$\operatorname{ctg} 37^\circ = \frac{4}{3}$	\rightarrow	$\operatorname{ctg} 53^\circ = \frac{3}{4}$
\rightarrow	$\sec 37^\circ = \frac{5}{4}$	\rightarrow	$\sec 53^\circ = \frac{5}{3}$
\rightarrow	$\operatorname{cosec} 37^\circ = \frac{5}{3}$	\rightarrow	$\operatorname{cosec} 53^\circ = \frac{5}{4}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 16° Y 74° (APROXIMADAMENTE)

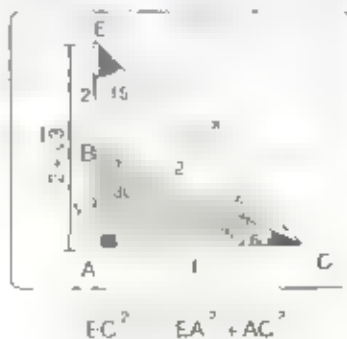


\rightarrow	$\sin 16^\circ = \frac{7}{25}$	\rightarrow	$\sin 74^\circ = \frac{24}{25}$
\rightarrow	$\cos 16^\circ = \frac{24}{25}$	\rightarrow	$\cos 74^\circ = \frac{7}{25}$
\rightarrow	$\operatorname{tg} 16^\circ = \frac{7}{24}$	\rightarrow	$\operatorname{tg} 74^\circ = \frac{24}{7}$
\rightarrow	$\operatorname{ctg} 16^\circ = \frac{24}{7}$	\rightarrow	$\operatorname{ctg} 74^\circ = \frac{7}{24}$
\rightarrow	$\sec 16^\circ = \frac{25}{24}$	\rightarrow	$\sec 74^\circ = \frac{25}{7}$
\rightarrow	$\operatorname{cosec} 16^\circ = \frac{25}{7}$	\rightarrow	$\operatorname{cosec} 74^\circ = \frac{25}{24}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 15° Y 75°

Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de 15° y 75° tomamos como referencia el \triangle Notable de 30° y 60° . luego prolongamos AB (Como se muestra en la figura), hasta obtener un isósceles EBC, siendo $EB = BC = x$.

En el \triangle EAC Calculamos el valor de x por medio del teorema de Pitágoras



$$EC^2 = EA^2 + AC^2$$

$$x^2 = (2 + \sqrt{3})^2 + (1)^2$$

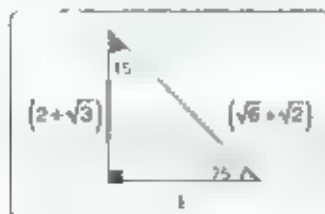
$$x^2 = 4 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 1$$

$$x^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt{6 + \sqrt{2}}$$

Luego, calculamos las razones trigonométricas de 15° y 75°



$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \operatorname{ctg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sec} 15^\circ = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{sec} 75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{cosec} 75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $22^\circ 30'$ Y $67^\circ 30'$

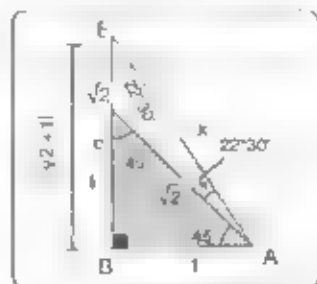
Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de $22^\circ 30'$ y $67^\circ 30'$ tomamos como referencia el \triangle Notable de 45° . Luego procedemos de igual manera que el caso anterior.

En el \triangle EBA Calculamos el valor de "x" por medio del teorema de Pitágoras

$$EA^2 = EB^2 + BA^2$$

$$x^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + (1)^2$$

$$x^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2} = 2(2 + \sqrt{2}) \quad \therefore x = \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$



Luego calculamos las razones trigonométricas de $22^{\circ}30'$ y $67^{\circ}30'$

$$\begin{aligned} \sin 22^{\circ}30' &= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \sin 67^{\circ}30' &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \\ \cos 22^{\circ}30' &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \cos 67^{\circ}30' &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 22^{\circ}30' &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 & \rightarrow \operatorname{tg} 67^{\circ}30' &= \sqrt{2}+1 \\ \operatorname{ctg} 22^{\circ}30' &= \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1 & \rightarrow \operatorname{ctg} 67^{\circ}30' &= \sqrt{2}-1 \\ \sec 22^{\circ}30' &= \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2}) & \rightarrow \sec 67^{\circ}30' &= \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}) \\ \operatorname{cosec} 22^{\circ}30' &= \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}) & \rightarrow \operatorname{cosec} 67^{\circ}30' &= \sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Observación: Haciendo uso de triángulos rectángulos también podemos calcular las razones trigonométricas de un ángulo de uno de sus ángulos agudos, veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1 En un triángulo rectángulo ABC (recto en "C"), donde $a = 8$ y $b = 15$. Calcular $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$

Resolución:

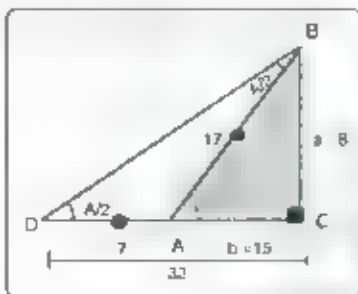
- En el $\triangle BCA$ Calculamos AB por medio del teorema de Pitágoras

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225$$

$$AB^2 = 289 \Rightarrow AB = \sqrt{289} \Rightarrow \therefore AB = 17$$

Luego, en el $\triangle DCB$ Calculamos $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{BC}{DC} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$



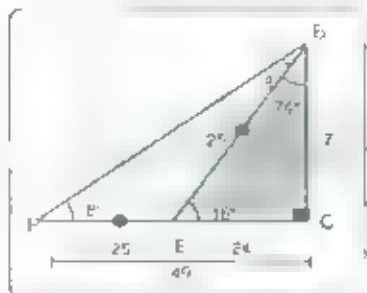
Ejemplo 2 Haciendo uso del triángulo notable de 15° y 74° Calcular $\operatorname{tg} 8^\circ$

Resolución

En el $\triangle BCP$

$$\operatorname{tg} 8^\circ = \frac{BC}{PC} = \frac{7}{49}$$

$$\operatorname{tg} 8^\circ = \frac{1}{7}$$



CASOS DE RACIONALIZACIÓN QUE DEBE TENERSE EN CUENTA EN ESTE CAPÍTULO

1er. Caso. Denominador Monomio. Para racionalizar el denominador de una fracción, siendo dicho denominador un monomio, se multiplican los dos términos de la fracción por el radical de mismo índice que el del denominador, y que multiplicado por el radical que se desea eliminar y da como producto una cantidad racional.

Ejemplos.

$$a) \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$b) \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Esta fórmula sólo se cumple, cuando el denominador es raíz cuadrada.

2do. Caso: Denominador Binomio. Para racionalizar el denominador de una fracción, siendo dicho denominador un binomio de la forma $(a + \sqrt{b})$ se multiplican los dos términos de la fracción por la expresión conjugada $(a - \sqrt{b})$ del denominador y luego se simplifican los resultados.

Ejemplos.

$$a) \frac{5}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{(2^2 - \sqrt{3}^2)}$$

$$\frac{5}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{(4 - 3)} = 5(2 - \sqrt{3})$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(5 - 2)} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$$

$$c) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2)} = \frac{\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{(3 - 2)}$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{1} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{1} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\frac{a}{n + \sqrt{m}} = \frac{a(n + \sqrt{m})}{n^2 - m}$$

$$\frac{b}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \frac{b(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{p - q}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Reducir $Q = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{3}$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) 2 D) $-\sqrt{5}$ E) $-\sqrt{6}$

2. Racionalizar $\frac{10\sqrt{7}}{2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}}$

A) $3 + 2\sqrt{14}$ B) $14 + 2\sqrt{14}$
C) $\sqrt{14}(3 + \sqrt{14})$ D) $2\sqrt{14}$
E) $14 + 2\sqrt{14}$

3. Luego de racionalizar $\frac{1}{2\sqrt{3} + \sqrt{9}}$, dar el denominador

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 18

4. Hallar el valor equivalente de

$$E = \frac{\sqrt{6 + \sqrt{12}}}{\sqrt{3} - \sqrt{3}}$$

A) $0,5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ B) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
C) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ D) $\sqrt{3} + 1$
E) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

5. Dar racionalizar lo siguiente

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $0,5\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $0,5 + \sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

6. Luego de racionalizar y reducir

$$\frac{5}{\sqrt{75} - \sqrt{45}} \text{ el denominador resulta}$$

- A) 5 B) 6 C) 30 D) 3 E) 1

7. Racionalizar
- $P = \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

- A)
- $2\sqrt{3}$
- B)
- $2\sqrt{3}$
- C) 2 D) 0 E) -2

8. Hallar el equivalente, con denominador racionalizado, de
- $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{32}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 D) $\frac{\sqrt{4}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Calcular
- $E = \frac{6}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{6}} - \sqrt[3]{4}$

- A) 1 B) 2 C) 0 D) 1 E) -2

10. Racionalizando
- $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{8}}$
- resulta una

cantidad negativa cuyo denominador es:

- A) 29 B) 39 C) 49 D) 59 E) 69

11. Señalar el factor racionalizante de:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$$

- A) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$
 C) $2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{4} + 2 + \sqrt[3]{2}$
 E) $\sqrt[3]{4} - 2 + \sqrt[3]{2}$

12. Si
- $a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$
- ,
- $b = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$
-
- Dar el valor de
- $E = a^3b - ab^3$

- A) $24\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$
 D) $-6\sqrt{2}$ E) $-24\sqrt{3}$

13. Proporcionar el equivalente de

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

- A) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ B) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ C) $\sqrt{2} - 1$
 D) $\sqrt{2} + 1$ E) $\sqrt{3} - 1$

14. Sean
- $A = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$
- B)
- $\frac{1}{\sqrt{b^3}}$

racionalizar $(aA + bB)^{-1}$, indicando el valor del denominador resultante

- A) $a + b$ B) ab C) $a - b$
 D) $a^2 + b^2$ E) 1

CLAVE DE RESPUESTAS

1. B	2. C	3. E	4. D	5. B
6. B	7. E	8. C	9. C	10. C
11. C	12. A	13. A	14. E	

CUADRO RESUMEN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS NOTABLES

\angle s. R.T.	45°	30°	60°	37°	53°	16°	74°	15°	75°	22°30'	67°30'
Sen	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$
Tg	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{24}{7}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$
Cotg	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{7}{24}$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} - 1$
Sec	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{7}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2})$	$\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})$
Cosec	$\sqrt{2}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{25}{24}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})$	$\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2})$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES



Ejercicio 1 - Calcular el valor de

$$M = \frac{\cos^2 30^\circ \operatorname{Cosec} 45^\circ - \operatorname{Sen} 45^\circ \operatorname{Cotg}^2 30^\circ}{\operatorname{Sen} 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}$$

Resolución:

Sabemos que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{Cotg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Reemplazando dichos valores en la expresión "M" obtenemos.

$$M = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3})^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{4} \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3}}$$

$$M = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{M = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Si "x" es agudo. Hallar "tg x" siendo $\cos (3x - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} 45^\circ}{2}$

Resolución:

Sabemos que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ Donde $\cos (3x - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pero $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$

$$\cos (3x - 60^\circ) = \cos 30^\circ$$

Por comparación $3x - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow 3x = 90^\circ \quad x = 30^\circ$

Luego $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{Rpta.}$

Ejercicio 3 Si $\text{Sen } 30^\circ = a$ $\text{Cos } 60^\circ$ (1) , $\text{Cos } 45^\circ = b$ $\text{cosec } 45^\circ$ (2)
 $\text{Sec } 60^\circ = 4c$ $\text{tg } 45^\circ$ (3) , Hallar "a + b + c"

Resolución:

Sabemos que

$\text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\text{Cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$
$\text{Sec } 60^\circ = 2$	$\text{Cosec } 45^\circ = \sqrt{2}$	$\text{tg } 45^\circ = 1$

Reemplazando valores, obtenemos

De (1) $\frac{1}{2} = a$ $\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ De (2) $\frac{\sqrt{2}}{2} = b \sqrt{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

De (3) $2 = 4c \cdot 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ Luego: $a + b + c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Rpta.

Ejercicio 4 Si $\text{Sen } (2x + 20^\circ) = \text{Cos } (2x - 50^\circ)$, Calcular el valor de:

$$y = \text{Sen } x \cdot \text{Cos } \frac{3x}{2} \cdot \text{tg } 2x$$

Resolución:

Aplicando la propiedad

$$\text{Sen } A = \text{Cos } B \Rightarrow A + B = 90^\circ$$

Obtenemos que: $(2x + 20^\circ) + (2x - 50^\circ) = 90^\circ \Rightarrow 4x = 120^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

Reemplazando el valor de $x = 30^\circ$, en la expresión "y", obtenemos

$$y = \text{Sen } 30^\circ \cdot \text{Cos } \frac{3 \cdot 30}{2} \cdot \text{tg } 2 \cdot 30^\circ$$

$$y = \text{Sen } 30^\circ \cdot \text{Cos } 45^\circ \cdot \text{tg } 60^\circ$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Rpta.



TALLER DE EJERCICIOS N° 8

EJERCICIO 1 Calcular el valor de

$$y = \operatorname{Sen} 60^\circ \operatorname{Cos} 45^\circ + \operatorname{Sen} 30^\circ \operatorname{Sec} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$$

Resolución:

Rpta. $y = \frac{5}{12} \sqrt{6}$

EJERCICIO 2 : Reducir

$$E = \frac{\operatorname{Sen} 30^\circ \operatorname{Cos} 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{Cosec} 60^\circ \operatorname{Sec} 30^\circ}$$

Resolución:

→

Rpta. $E = \frac{3\sqrt{6}}{16}$

EJERCICIO 3 S

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Sen}^2 45^\circ + \operatorname{Cos} 60^\circ, \text{ Hallar "Sen } \alpha"$$

("α" es un ángulo agudo)

Resolución

Rpta. $\operatorname{Sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

EJERCICIO 4 Si $\theta = 10^\circ$ Hallar el valor de

$$M = \frac{\operatorname{Sen} 3\theta \operatorname{Cos} 6\theta \operatorname{Cosec} 9\theta}{\operatorname{tg} 3\theta \operatorname{Sec} 6\theta \operatorname{Colg} 9\theta}$$

Resolución.

Rpta. $M = \frac{\sqrt{6}}{8}$



**EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES TIPO I B M.**



Ejercicio 1 Si $\sin \alpha \sec (\alpha + 60^\circ) = 1$
siendo α ángulo agudo. Calcular:

- A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

$$M = \sin 2\alpha \cos 3\alpha \operatorname{tg} 4\alpha$$

Resolución:

De la expresión $\sin \alpha \sec (\alpha + 60^\circ) = 1$, obtenemos

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sec (\alpha + 60^\circ)} \Rightarrow , \text{ pero } \cos (\alpha + 60^\circ) = \frac{1}{\sec (\alpha + 60^\circ)}$$

$$\sin \alpha = \cos (\alpha + 60^\circ) , \text{ (por Co. Razón trigonométrica)}$$

$$\alpha + (\alpha + 60^\circ) = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha + 30^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{30^\circ}{2} \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

Luego, reemplazamos el valor de α en la expresión M

$$M = \sin 2(15^\circ) \cos 3(15^\circ) \operatorname{tg} 4(15^\circ)$$

$$M = \sin 30^\circ \cos 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \boxed{M = \frac{\sqrt{6}}{4}} \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 2 Calcular

$$Q = \sin 30^\circ \sin 37^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ \sin 53^\circ$$

- A) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{6}}{25}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{25}$ E) $\frac{3\sqrt{6}}{50}$

Resolución:

Reemplazando por el valor de cada razón trigonométrica obtenemos que

$$Q = \sin 30^\circ \sin 37^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ \sin 53^\circ$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{50}$$

$$Q = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{50} = \frac{3\sqrt{6}}{50} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{3\sqrt{6}}{50}} \quad \text{Rpta. E}$$

Ejercicio 3Hallar $K = a + b + ab$

$$a = \sqrt{3} \cos 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ \text{ y}$$

$$b = 2 \sec 45^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ$$

A) 1 B) 1 C) 3 D) 2 E) 0

Resolución:

Reemplazando por el valor de cada razón trigonométrica, obtenemos que

$$a = \sqrt{3} \cos 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ \Rightarrow a = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{1} \Rightarrow a = 1$$

$$b = 2 \sec 45^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \Rightarrow b = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2} \times 2}{2} \Rightarrow b = 1$$

Luego, reemplazamos los valores de "a" y "b" en la expresión "K"

$$K = a + b + ab = 1 + 1 + 1 \times 1 \Rightarrow K = 3 \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 4 Los catetos de un triángulo rectángulo ABC son:

Hallar la tangente del menor ángulo agudo.

$$a = \operatorname{sen}^2 45^\circ \sec 60^\circ$$

$$b = \cos^2 30^\circ \cos 37^\circ$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 1**Resolución:**

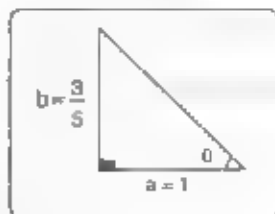
En primer lugar, hallamos el valor numérico de cada cateto veamos.

$$a = \operatorname{sen}^2 45^\circ \sec 60^\circ \Rightarrow a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}^2}{2^2} \frac{2}{1} \Rightarrow \therefore a = 1$$

$$b = \cos^2 30^\circ \cos 37^\circ \Rightarrow b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}^2}{2^2} \frac{4}{5} \Rightarrow \therefore b = \frac{3}{5}$$

Ahora, llevamos los valores de "a" y "b" a un triángulo rectángulo por ser ambos los catetos de dicho triángulo.

$$\text{Luego: } \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \therefore \operatorname{tg} \theta = \frac{3}{5} \quad \text{Rpta. B}$$



Propiedad: En todo triángulo, se cumple que a menor lado, se opone menor ángulo y a mayor lado, se opone mayor ángulo.

Ejercicio 5: Hallar el valor de

$$E = \frac{3 \operatorname{tg}^2 30^\circ \sec^2 45^\circ}{1 \cotg^2 60^\circ}$$

A) 3

B) $2\sqrt{3}$

C) 3

D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

Resolución:

Reemplazamos por los valores de cada razón trigonométrica, obtenemos.

$$E = \frac{3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 (\sqrt{2})^2}{1 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{3 \left(\frac{\sqrt{3}^2}{3^2} \right) (2)}{\frac{(\sqrt{3})^2}{3^2}}$$

$$E = \frac{3 \left(\frac{3}{9} \right) 2}{1 \left(\frac{3}{9} \right)} = \frac{\frac{18}{9}}{\frac{3}{9}} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow \boxed{E=3} \text{ Rpta. C}$$

Ejercicio 6: Si: $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos 60^\circ$
Hallar "sen θ " (θ es un ángulo agudo)

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

Resolución:

De la condición. $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos 60^\circ$ obtenemos:

$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} + \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 1, \text{ pero } t = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Luego, calculemos el valor de: "sen θ "

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} 45^\circ \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rpta. B

Ejercicio 7: Si

$$W = \frac{54 \times \operatorname{cosec} 53^\circ \times \operatorname{cosec} 37^\circ}{5 \times \operatorname{tg} 37^\circ}$$

A) 11

B) 1

C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

Hallar sen (W°)

Resolución.

De la expresión "W", obtenemos

$$W^{\circ} = \frac{54^{\circ} \times \operatorname{cosec} 53^{\circ} \times \operatorname{cosec} 37^{\circ}}{5 \times \lg 37^{\circ}} = \frac{54^{\circ} \times \frac{5}{4} \times 5}{5 \times \frac{3}{4}} = \frac{54^{\circ} \times 5}{3 \times 3}$$

$$W^{\circ} = 6^{\circ} \times 5 \Rightarrow W = 30^{\circ}$$

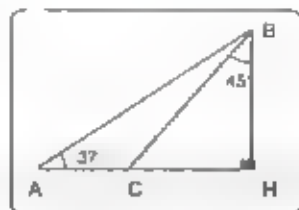
Luego

$$\sin(W^{\circ}) = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

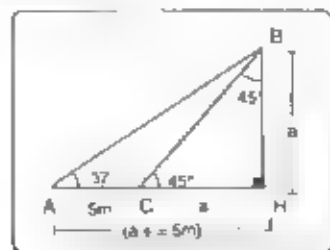
Rpta. E

Ejercicio 8. De la figura mostrada Hallar BH, si AC = 5 m

- A) 10 m B) 11 m C) 12 m
D) 14 m E) 15 m



Resolución:



Incógnita: BH = a = ?

En el $\triangle AHB$

$$\lg 37^{\circ} = \frac{BH}{AH} = \frac{a}{\frac{a}{4} + 5m}$$

$$3(a + 5m) = 4a \Rightarrow 3a + 15m = 4a$$

$$\Rightarrow 15m = a$$

Rpta. E

Ejercicio 9. ¿Cuál es incorrecta?

- A) $\sin 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} \sec 60^{\circ}$ B) $\sin 60^{\circ} = 2 \sin 30^{\circ} \cos 30^{\circ}$
C) $\lg 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} + \sin 60^{\circ}$ D) $\operatorname{colog} 45^{\circ} + \lg 45^{\circ} = 4 \sin 30^{\circ}$
E) $\sec 45^{\circ} \cdot \sin 45^{\circ} = \cos 45^{\circ}$

Resolución.

Calculamos el valor de cada una de las expresiones, veamos.

A) $\sin 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} \sec 60^{\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2$ (Falso)

B) $\operatorname{sen} 60^\circ = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Verdadero)

C) $\operatorname{tg} 60^\circ = \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Verdadero)

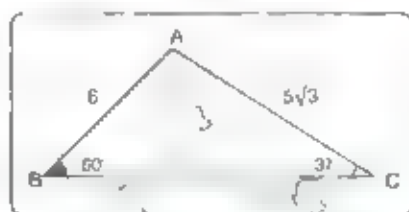
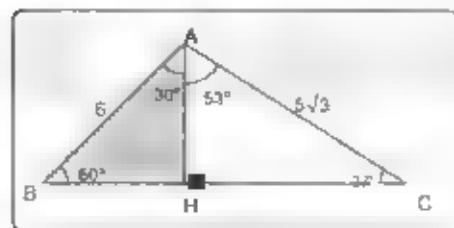
D) $\cotg 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = 4 \operatorname{sen} 30^\circ \Rightarrow 1 + 1 = 4 \times \frac{1}{2}$ (Verdadero)

E) $\sec 45^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Verdadero)

Ejercicio 10 De la figura mostrada Hallar BC

- A) $3 + 4\sqrt{3}$ B) $4 + 3\sqrt{3}$
C) $2 + 4\sqrt{3}$ D) $4 + \sqrt{3}$
E) $2 + 3\sqrt{3}$

Resolución



Trazamos AH perpendicular a BC, obteniéndose así dos triángulos notables, como se muestra en la figura

En el $\triangle BHA$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{BH}{BA} = \frac{BH}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{6}$$

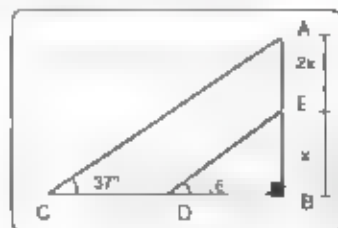
$$BH = \frac{6}{2} \Rightarrow BH = 3$$

- En el $\triangle AHC$ $\cos 37^\circ = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{HC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow HC = 4\sqrt{3}$

De la figura $BC = BH + HC \Rightarrow \underline{BC = 3 + 4\sqrt{3}}$ Rpta. A

Ejercicio 11 De la figura mostrada, hallar "x"

- A) 29 B) 31 C) 33
D) 35 E) 37



Resolución.

- En el $\triangle DBE$

$$\operatorname{tg} 16^\circ = \frac{EB}{DB} = \frac{x}{24} \Rightarrow \frac{7}{24} = \frac{x}{DB}$$

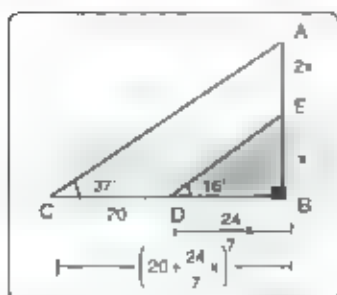
$$DB = \frac{24x}{7}$$

En el $\triangle ABC$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{AB}{CB}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3x}{\left(20 + \frac{24x}{7}\right)} \Rightarrow 3 \left(20 + \frac{24x}{7}\right) = 12x \Rightarrow 20 + \frac{24x}{7} = 4x$$

$$140 + 24x = 28x \Rightarrow 140 = 4x \Rightarrow x = \frac{140}{4} = 35 \quad \text{Rpta. D}$$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES TIPO I.B.M

NIVEL I

Ejercicio 1 Hallar "M" si $a = 15^\circ$

$$\sqrt{3} \sec 2a = 8 + 4 \sec 4a \cdot 2M$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Ejercicio 2 Si $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Sen} 45^\circ + \operatorname{Cos} 60^\circ$
Hallar "Sen n" ("n" es ángulo agudo)A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

Ejercicio 3Cuál es la incorrecta.

- A) $\operatorname{Sen} 30^\circ = \operatorname{Sen}^2 45^\circ$
 B) $\operatorname{Sec} 45^\circ \cdot \operatorname{Cos} 60^\circ = \operatorname{Cos} 45^\circ$
 C) $\operatorname{Sec} 60^\circ \cdot \operatorname{Cotg} 30^\circ = \operatorname{Sen} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$
 D) $\operatorname{Sec} 60^\circ + \operatorname{Cotg} 45^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ$
 E) $\operatorname{Sec} 30^\circ = \operatorname{Sec}^2 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$

Ejercicio 4 Calcular el valor de:

$$E = \frac{\operatorname{Sen} 74^\circ}{8 \operatorname{Cos} 37^\circ} - \frac{3 \operatorname{tg} 16^\circ}{7 \operatorname{Cos} 53^\circ}$$

A) $\frac{-7}{120}$ B) $\frac{7}{120}$ C) $\frac{7}{20}$ D) $\frac{7}{20}$ E) $\frac{20}{7}$ Ejercicio 5 Si $\operatorname{tg} (4x - 8)^\circ = \sqrt{3} \cdot \operatorname{Cotg} 30^\circ$

Hallar el valor de "x"

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 20

Ejercicio 6 Si $W_1 = \operatorname{Sen} (5x)^\circ + \operatorname{Cos} (5x)^\circ$,
Calcular el valor de

$$L = W_1 + W_2 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Sen} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

A) 0 B) 0,1 C) 0,4 D) 0,5 E) 1

Ejercicio Si $a = 30^\circ$. Calcular el valor de

$$P = \operatorname{Sen} a \cdot \operatorname{Cos} a + \operatorname{Sec} B \cdot \operatorname{Tg} a \cdot \operatorname{Sen} 2a$$

- A) $5\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $\frac{7\sqrt{3}}{12}$
D) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ E) $\frac{12}{7}$

Ejercicio ¿Cuál es incorrecta

- A) $\operatorname{Sen} 30^\circ < \operatorname{Sen} 60^\circ$ B) $\operatorname{Cos} 60^\circ < \operatorname{Cos} 30^\circ$
C) $\operatorname{Sen} 30^\circ < \operatorname{Cos} 30^\circ$ D) $\operatorname{Tg} 45^\circ < \operatorname{Sen} 60^\circ$
E) $\operatorname{Tg} 45^\circ < \operatorname{Cotg} 30^\circ$

NIVEL II

Ejercicio Hallar el valor numérico de

$$Q = \frac{\operatorname{Sec} 53^\circ \cdot \operatorname{Cotg} 60^\circ + \operatorname{Sen} 37^\circ \cdot \operatorname{Sen} 60^\circ}{(\operatorname{Cosec}^2 45^\circ - 1) \cdot \operatorname{Tg} 60^\circ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \operatorname{Cosec} 60^\circ$$

- A) $\frac{11}{10}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{13}{17}$ E) $\frac{7}{13}$

Ejercicio Hallar el valor de

$$P = (\operatorname{Tg} 45^\circ \cdot \operatorname{Sen} 30^\circ)^{\operatorname{Sen} 30^\circ \cdot \operatorname{Cotg} 45^\circ}$$

- A) 2 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ E) 0

Ejercicio Siendo los catetos de un triángulo rectángulo

$$a = \operatorname{Sen} 45^\circ \cdot \operatorname{Tg} 30^\circ \cdot \operatorname{Sen} 60^\circ \text{ y}$$

$$b = \operatorname{Sen} 37^\circ \cdot \operatorname{Tg} 53^\circ \cdot \operatorname{Cos} 45^\circ$$

Calcular el valor de la hipotenusa.

Ejercicio ¿Cuál es la incorrecta

- A) $\operatorname{Sen} 60^\circ = 2 \operatorname{Sen} 30^\circ \cdot \operatorname{Cos} 30^\circ$
B) $\operatorname{Sec} 45^\circ \cdot \operatorname{Cosec} 45^\circ = 4 \operatorname{Sen} 30^\circ$
C) $\operatorname{Sen} 30^\circ + \operatorname{Sen} 30^\circ = \operatorname{Sen} 60^\circ$
D) $\operatorname{Tg} 60^\circ = \operatorname{Sen} 60^\circ + \operatorname{Cos} 30^\circ$
E) $\operatorname{Tg} 45^\circ + \operatorname{Cotg} 45^\circ = \operatorname{Cosec} 30^\circ$

Clave de Respuestas

1 E	2 B	3 C	4 A	5 C
6 D	7 C	8 D	9 C	

- A) $\frac{\sqrt{179}}{20}$ B) $\frac{\sqrt{87}}{20}$ C) $\frac{\sqrt{178}}{20}$
D) $\frac{\sqrt{89}}{20}$ E) $\sqrt{178}$

Ejercicio Calcular el valor de "H", Si $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 10^\circ$

$$H = \frac{\operatorname{Cos} (2\alpha - \beta) + \operatorname{Tg} (8\beta - \alpha)}{\operatorname{Cos} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) + \operatorname{Tg} (2\alpha - \beta)}$$

- A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 2

Ejercicio ¿A qué es igual

$$\frac{1}{\operatorname{Sen} 37^\circ + \operatorname{Sen} 45^\circ} \cdot \operatorname{Tg} 45^\circ ?$$

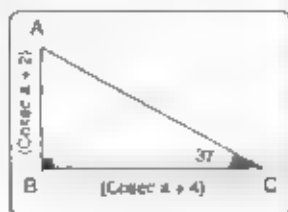
- A) $\operatorname{Tg} 60^\circ$ B) $\operatorname{Tg}^2 37^\circ$
C) $\operatorname{Sen} 60^\circ$ D) $\operatorname{Sen} 45^\circ$
E) $\operatorname{Sen}^2 60^\circ$

Ejercicio Si $\operatorname{Cotg} \alpha = \operatorname{Cos} 45^\circ$ ("α" es agudo) entonces "sec α", es

- A) $\sec 45^\circ$ B) $\operatorname{Cosec} 30^\circ$ C) $\sec 30^\circ$
 D) $\operatorname{tg} 30^\circ$ E) $\operatorname{tg} 60^\circ$

Ejercicio 14 Hallar " $\operatorname{Cotg} a$ " a partir de la figura

- A) $\sqrt{15}$ B) 4
 C) 2 D) $\frac{3}{4}$
 E) $\frac{4}{3}$



Ejercicio 15 Siendo " a " y " b " agudos, además

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{cotg} 20^\circ \text{ y } \operatorname{cotg} 3b = \operatorname{tg} 60^\circ$$

Hallar $\sec(a + b)$

- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) 3 E) 4

Ejercicio 16 Hallar " $\operatorname{Sen} \alpha$ " (α es agudo) siendo

NIVEL III

Ejercicio 17 Siendo

$$A_N = \operatorname{tg}(N - 15^\circ) + \operatorname{Cotg}(N - 15^\circ)$$

Hallar $S = A_2 + A_3 + A_4$

- A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 4 E) 2

Ejercicio 18 Hallar el valor de $y = 70^\circ K$, siendo

$$K = \frac{3 \cos^2 30^\circ - \operatorname{Sen}^2 60^\circ}{4 \operatorname{tg}^2 30^\circ \sec 60^\circ - 1} - \frac{2 \cos^2 45^\circ}{3 - 2 \operatorname{Cotg}^2 60^\circ}$$

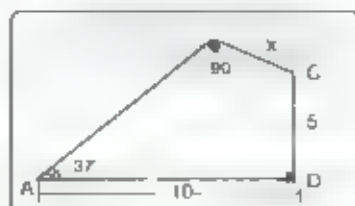
- A) $\frac{33}{70}$ B) $\frac{70}{33}$ C) $\frac{33}{1}$ D) $\frac{1}{33}$ E) 66

$$\operatorname{Sen}(3x + 20^\circ) \sec(2x - 10^\circ) = 1$$

- A) 0.75 B) 0.6 C) 0.28 D) 0.96 E) 0.5

Ejercicio 19 Del gráfico adjunto. Calcular el valor de " x "

- A) 3
 B) 4
 C) 5
 D) 2
 E) 1



Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. C	4. C	5. C
6. E	7. A	8. A	9. C	10. D

Ejercicio 20 ¿Cuál o cuáles son correctas?

- I. Si $30^\circ < 45^\circ \Rightarrow \operatorname{Sen} 30^\circ < \operatorname{Sen} 45^\circ$
 II. Si $45^\circ < 60^\circ \Rightarrow \operatorname{Cos} 45^\circ < \operatorname{Cos} 60^\circ$
 III. Si $37^\circ < 53^\circ \Rightarrow \operatorname{Cotg} 37^\circ < \operatorname{Cotg} 53^\circ$

- A) I B) II C) III D) I y II E) II y III

Ejercicio 21 Para " α " y " θ " ángulos agudos se cumple que

$$3 \operatorname{Sen} \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 45^\circ}$$

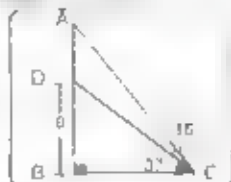
$$4 \operatorname{Cos} \theta = \sqrt{4 \operatorname{Cos} 60^\circ + 4 \operatorname{Sen} 20^\circ \operatorname{Cosec} 20^\circ}$$

Hallar el valor de $M = 2\sqrt{7} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{Sen} \theta$

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{7}$

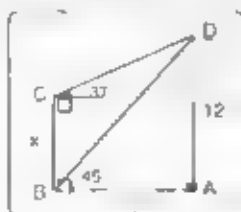
Ejercicio 22 De la figura mostrada, Hallar AD

- A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11



Ejercicio 1. De la figura mostrada, Hallar "x"

- A) 1
B) 1.5
C) 2
D) 2.5
E) 3



Ejercicio 3. Si $\lg(3\alpha + 45) + \lg(2\alpha + 20) = 1$. Calcular el valor de

$$M = \text{Sen } 6\alpha - \text{Cos } 9\alpha - \text{tg } 12\alpha$$

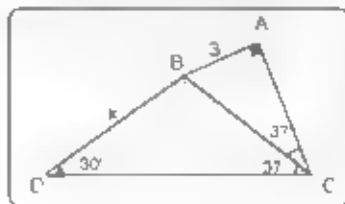
- A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Ejercicio 4. Si $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$, $z = \sqrt{6}$. ¿Cuál es incorrecta?

- A) $\text{Sen } 45^\circ = \frac{1}{x}$ B) $\text{Ig } 60^\circ = \frac{z}{x}$
C) $\text{Sen } 45^\circ = \frac{z}{y}$ D) $\text{Sen } 60^\circ = \frac{y}{x^2}$
E) $\text{tg } 37^\circ = \frac{y}{x^2}$

Ejercicio 5. De la figura mostrada, Hallar "x"

- A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



Ejercicio 6. Si " α " y " θ " son ángulos agudos y se cumple que

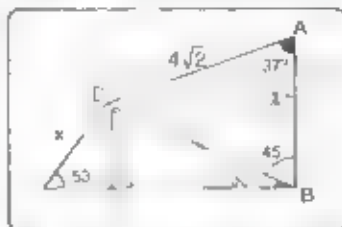
$$\text{Sen}(3\alpha + 20^\circ) = \text{Cos}(60^\circ - \theta) \text{ y } \lg 39 - \lg(5\alpha - 20^\circ) = 1$$

Calcular $\lg\left(28 + \frac{\alpha}{2}\right)$

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{7}{24}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

Ejercicio 7. De la figura mostrada, Hallar "x"

- A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) 2
D) 3
E) 4



Ejercicio 8. Si " α " y " β " son ángulos agudos y se cumple

$$\text{Sen}(\alpha + 20^\circ) = \sqrt{\text{Sen } 30^\circ} \text{ y }$$

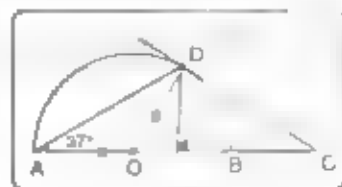
$$\text{tg}(\beta + 5^\circ) = \sqrt{\lg 45^\circ + \text{Sen}^2 45^\circ}$$

Hallar $\text{Cosec}(\beta - \alpha)$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) 2 E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 9. En la figura adjunta AD = 56 u. "O" es centro de la semicircunferencia y "D" punto de tangencia. Hallar BC

- A) 30 u
B) 40 u
C) 60 u
D) 70 u
E) 90 u



Ejercicio 14 Calcular el valor de

$$M = \frac{\operatorname{Sen}^3 22^\circ 30' - \operatorname{Cos}^3 67^\circ 30' + \lg 15^\circ}{2 \operatorname{Cosec} 30^\circ + \operatorname{Sec}^2 45^\circ - 5 \operatorname{Sen} 53^\circ - \sqrt{3}}$$

- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}$ D) 1 E) $3\sqrt{3}$

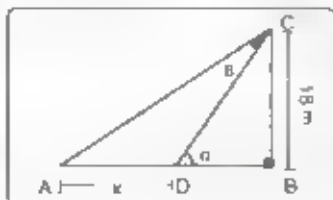
Ejercicio 15 Hallar "Cos x" si se cumple

$$[2 \operatorname{Cos} (x + 7^\circ 30')]^{\operatorname{Sec} 30^\circ} = \sqrt{3} \operatorname{Sec} 30^\circ - \lg 22^\circ 30' - 1$$

- A) 0,8 B) 0,64 C) 0,5 D) 0,75 E) 0,4

Ejercicio 16 Si $\operatorname{Cosec} \alpha = \sqrt{\operatorname{Cosec} 30^\circ}$
Hallar "x" de la figura

- A) 5 m
B) 7 m
C) 6 m
D) 10 m
E) 8 m



Ejercicio 17 Si

$$\operatorname{Cotg} \left(\frac{180}{K+2} \right)^\circ = \left(\sqrt{1 + \operatorname{Sen} 30^\circ} \right) (\operatorname{Sec} 45^\circ)$$

Nota: "K" es un número entero. Calcular

$$P = \operatorname{Sen} (15 K)^\circ \operatorname{Cos} \left(\frac{180}{K+2} \right)^\circ$$

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ejercicio 18 De la figura mostrada Hallar DE

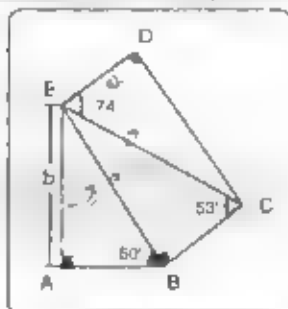
- A) $7\sqrt{3}b$

- B) $\frac{7\sqrt{3}}{30}b$

- C) $\sqrt{3}b$

- D) $\frac{\sqrt{3}}{30}b$

- E) $\frac{7}{30}b$



Ejercicio 19 Si $\operatorname{Sen} \phi = \operatorname{Sen} 45^\circ \lg 30^\circ$
($\phi \Rightarrow$ ángulo agudo).

Calcular el valor de: $\operatorname{Cotg} \left(\frac{\phi}{2} \right)$

- A) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ B) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ C) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$

- D) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ E) $\sqrt{5} + 1$

Ejercicio 20 De la figura mostrada Hallar "tg θ ", si $AC = CD$

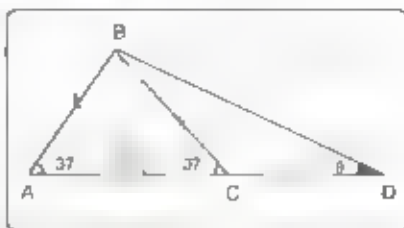
- A) 4

- B) $\frac{1}{4}$

- C) $\frac{1}{2}$

- D) 2

- E) 1



Clave de Respuestas

1. E	2. C	3. E	4. D	5. A
6. E	7. E	8. C	9. E	10. D
11. D	12. E	13. E	14. D	15. C
16. C	17. D	18. B	19. B	20. B

Capítulo

IDENTIDADES

4

TRIGONOMÉTRICAS

4.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Este capítulo por ser amplio e importante y que va a servir como base para capítulos posteriores, está considerado como clave dentro de esta asignatura. Por supuesto que tendremos que demostrar las razones por las cuales se los considera como tal. El estudio de este capítulo lo haremos con la definición:

DEFINICIÓN: Se le define como una igualdad de términos de razones trigonométricas que a diferencia de la igualdad algebraica, se satisface con casi la totalidad de los valores angulares, veamos

$$\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{\text{Variable Angular}} = 1$$

Comprobamos para algunos valores del ángulo " α "

Para $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \underbrace{\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ}_{\text{Variable Angular}} = 1$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{2+2}{4} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

Para $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \underbrace{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}_{\text{Variable Angular}} = 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \frac{1+3}{4} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

Observaciones

- La igualdad $(x-3)(x+3) = 0$ es cierta si y solamente si, cuando $\boxed{x=3}$ o $\boxed{x=-3}$.
Este tipo de igualdad se denominan "Ecuaciones Condicionales".
- En cambio, la igualdad $(x+3)(x-3) \equiv x^2 - 9$ se cumple para todo valor de " x ".
Este tipo de igualdad se denominan "identidades".
- Para indicar una identidad usaremos el símbolo " \equiv " que se lee "identico a".
- Re. uente que no existe la dis. no entre cero porque todo expresion multiplicada entre cero. No es este id.

CLASIFICACIÓN: Para clasificarlos tomaremos como base su definición es decir las particularidades que se presentan en las igualdades

A continuación desarrollaremos un cuadro.

IDENTIDADES

I. FUNDAMENTALES

- a) Recíprocas
- b) Por división
- c) Pitagóricas

II. ÁNGULOS COMPUESTOS

- a) Suma de arcos
- b) Diferencia de arcos

III. ÁNGULOS MÚLTIPLES

- a) Arco mitad
- b) Arco doble
- c) Arco triple

IV. FACTORIZACIÓN TRIGONOMÉTRICA

- a) Transformación de suma y diferencia en producto
- b) Transformación de productos a suma o diferencia

V. ECUACIONES

- a) Aplicación de identidades antes mencionadas
- b) Soluciones principales y generales

4.1.1 IDENTIDADES FUNDAMENTALES.

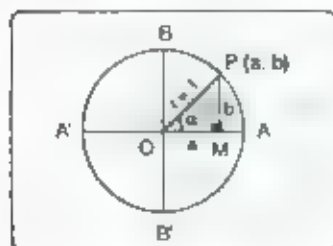
Para obtener dichas identidades, hacemos uso de la circunferencia trigonométrica

a) Identidades Recíprocas.

En el $\triangle OMP$

$$\sin \alpha = \frac{b}{r}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{b}$$



$$\begin{aligned} \text{x M.A.M} \quad \sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{b}{1} \cdot \frac{1}{b} \\ \sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha &= 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Donde

$$1) \sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} \quad , \quad 1) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

- En el mismo $\triangle OMP$:

$$\overline{\cos \alpha} = \frac{a}{1} \quad \overline{\sin \alpha} = \frac{1}{a}$$

x M A M $\cos \alpha \sec \alpha = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \cos \alpha \sec \alpha = 1$ (II)

Donde: I) $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$, II) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

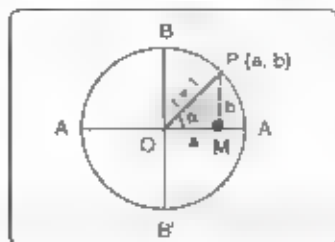
- En el mismo $\triangle OMP$:

$$\overline{\lg \alpha} = \frac{b}{a} \quad \overline{\cotg \alpha} = \frac{a}{b}$$

x M A M $\lg \alpha \cotg \alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \lg \alpha \cotg \alpha = 1$ (III)

Donde: I) $\lg \alpha = \frac{1}{\cotg \alpha}$; II) $\cotg \alpha = \frac{1}{\lg \alpha}$

b) Identidades por División:



En el $\triangle OMP$

$$\overline{\sin \alpha} = \frac{b}{1} \quad \overline{\cos \alpha} = \frac{a}{1}$$

+ M A M

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(\frac{b}{a} \right) \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \lg \alpha \quad (IV)$$

Ahora tomamos la inversa a cada miembro de esta última expresión (IV) obteniendo

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\lg \alpha} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cotg \alpha \quad \text{-(V)}$$

Nota.

x M A M Significa multiplicar miembro a miembro

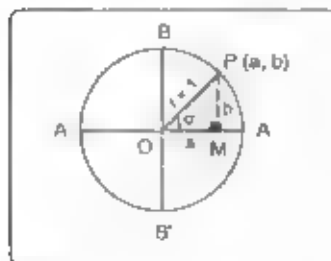
M A M Significa dividir miembro a miembro

c) Identidades Pitagóricas:

- En el $\triangle OMP$ Por el teorema de Pitágoras

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{cateto 1})^2 + (\text{cateto 2})^2$$

$$1^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = a^2 + b^2 \quad (w)$$



Por razones trigonométricas en el $\triangle OMP$ obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{b}{1} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = b \\ \cos \alpha &= \frac{a}{1} \Rightarrow \cos \alpha = a \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

Reemplazamos los valores de (q) en (w)

$$1 = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow 1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \quad (VI)$$

Dividimos " $\cos^2 \alpha$ " a ambos miembros de la expresión (VI)

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 + 1$$

$$(\sec \alpha)^2 = (\operatorname{tg} \alpha)^2 + 1 \Rightarrow \sec^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 \quad (VII)$$

De igual manera, dividimos a ambos miembros de la expresión (VI) entre " $\operatorname{sen}^2 \alpha$ "

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2$$

$$(\operatorname{cosec} \alpha)^2 = 1 + (\cotg \alpha)^2 \Rightarrow \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotg^2 \alpha \quad (VIII)$$

CUADRO DE RESUMEN DE LAS IDENTIDADES

Identidades Recíprocas

$$1. \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$2. \cos \alpha \sec \alpha = 1, \quad \alpha \neq \{n\pi\}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha \cotg \alpha = 1, \quad \alpha \neq \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \alpha \neq \{n\pi\}$$

Identidades por división

$$4. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$5. \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \alpha \neq \{n\pi\}$$

Identidades Pitagóricas

6. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ 7. $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad \alpha \neq \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right\}$
 8. $1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad \alpha \neq \{n\pi\}$

Identidades Auxiliares

9. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ 10. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
 11. $\lg \alpha + \cotg \alpha = \sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha$ 12. $\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha$

Recomendaciones: Las identidades sobre identidad son de 4 tipos:

a) Demostraciones:

Para demostrar una identidad simple a que el primer miembro se pueda reducir al segundo miembro o viceversa o que cada miembro por separado se pueda reducir a una misma forma.

La verificación de identidades se efectúa usando las diferentes transformaciones algebraicas o trigonométricas.

No existe desgraciadamente una regla única que sirva como norma para verificar identidades. Por lo general de los dos miembros se procura reducir el más complicado al más simple. Al efecto el estudiante debe tener presente la expresión a la que pretende llegar, procurar en todas las reducciones únicamente identidades y ver, cuando aquellos que se le permitan obtener la expresión deseada.

Algunas veces es más fácil dar la identidad en términos de senos y cosenos. A continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Demostrar que $\sec \theta - \lg \theta \operatorname{sen} \theta = \cos \theta$

Demostración: Un método muy eficiente en la demostración de identidades es el de expresar el primer miembro de la identidad en función de seno y coseno, así:

$$\begin{aligned} \sec \theta - \lg \theta \operatorname{sen} \theta &= \cos \theta \\ \frac{1}{\cos \theta} - \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \right) \operatorname{sen} \theta &= \cos \theta \end{aligned}$$

Por quebrados homogéneos, en el primer miembro obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta} &= \cos \theta \quad \text{Por identidad } 1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta \\ \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} &= \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \cos \theta \quad \text{I q. q. d.} \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Verifique la identidad: $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{\cos A}{1 - \sin A} = 2 \sec A$

Demostración: Damos común denominador, en el primer miembro, obteniendo $\Rightarrow \frac{\cos A (1 - \sin A) + \cos A (1 + \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} = 2 \sec A$

El denominador tiene la forma $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ (Diferencia de cuadrados)

Luego, $\frac{\cos A (1 - \sin A) + \cos A (1 + \sin A)}{1^2 - \sin^2 A} = 2 \sec A$

$$\frac{\cos A - \cancel{\cos A \sin A} + \cos A + \cancel{\cos A \sin A}}{1 - \sin^2 A} = 2 \sec A$$

$$\frac{2 \cos A}{1 - \sin^2 A} = 2 \sec A \quad \text{Por Identidad} \quad 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$$

$$\frac{2 \cos A}{\cos^2 A} = 2 \sec A$$

$$\frac{2}{\cos A} = 2 \sec A, \quad \text{La expresión del primer miembro, se puede escribir as}$$

$$2 \left(\frac{1}{\cos A} \right) = 2 \sec A \Rightarrow 2 \sec A = 2 \sec A \quad \text{L.q.q.d.}$$

Ejemplo 3 Demostrar que: $(1 - \cos^2 \theta)(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = \operatorname{tg}^2 \theta$

Demostración. De acuerdo a las identidades fundamentales, podemos afirmar que

$$1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$2) 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$$

Lo que nos permite afirmar que:

$$(1 - \cos^2 \theta)(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \sec^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \theta \quad \text{L.q.q.d.}$$

Ejemplo 4 Demostrar que $(\operatorname{tg} \theta + \sec \theta)^2 = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta}$

Demostración Expresando el primer miembro en función de seno y coseno se llega lo siguiente

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta} \Rightarrow \left(\frac{\operatorname{sen} \theta + 1}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta} \text{ Por ley de Exponentes: } \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Por identidad:

$$\frac{(\operatorname{sen} \theta + 1)^2}{(\cos \theta)^2} = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta} \Rightarrow \frac{(\operatorname{sen} \theta + 1)^2}{\cos^2 \theta} = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta} \Rightarrow \begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \sec^2 \theta \\ \cos^2 \theta &= (1 + \sec \theta)(1 - \sec \theta) \end{aligned}$$

$$\frac{(\operatorname{sen} \theta + 1)^2}{(1 + \sec \theta)(1 - \sec \theta)} = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta + 1}{1 - \sec \theta} = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \theta + 1}{1 - \sec \theta} = \frac{1 + \sec \theta}{1 - \sec \theta} \quad \text{I.q.q.d}$$

Ejemplo 5 Demostrar que $(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)^2 + (\cos x - 1)^2 = (1 - \sec x)^2$

Demostración: Partimos del primer miembro para así demostrar la identidad veamos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)^2 + (\cos x - 1)^2 = (1 - \sec x)^2 \\ & \left(\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)^2 + (\cos x - 1)^2 = (1 - \sec x)^2 \\ & \left(\frac{\operatorname{sen} x (\cos x - 1)}{\cos x} \right)^2 + (\cos x - 1)^2 = (1 - \sec x)^2 \\ & \frac{\operatorname{sen}^2 x (\cos x - 1)^2}{\cos^2 x} + (\cos x - 1)^2 = (1 - \sec x)^2 \end{aligned}$$

Factorizamos $(\cos x - 1)^2$, obteniendo

$$\begin{aligned} (\cos x - 1)^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2 x + 1}{\cos^2 x} \right] &= (1 - \sec x)^2 \\ (\cos x - 1)^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right] &= (1 - \sec x)^2 \Rightarrow \frac{(\cos x - 1)^2}{(\cos x)^2} = (1 - \sec x)^2 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(\cos x + 1)}{(\cos x)} \right]^2 = (1 + \sec x)^2 \quad \text{Propiedad: } \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)^2 = (1 + \sec x)^2 \Rightarrow (1 + \sec x)^2 = (1 + \sec x)^2 \quad \text{L.q.q.d.}$$

Ejemplo 6 Demostrar que: $\left[(\sqrt{1 - \sin \alpha}) + (\sqrt{1 + \sin \alpha}) \right]^2 = 2(1 + \cos \alpha)$

Demostración. Aplicando la identidad algebraica $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ obtenemos

$$\left[(\sqrt{1 - \sin \alpha}) \right]^2 + 2 \left[(\sqrt{1 - \sin \alpha})(\sqrt{1 + \sin \alpha}) \right] + \left[(\sqrt{1 + \sin \alpha}) \right]^2 = 2(1 + \cos \alpha)$$

$$(1 - \sin \alpha) + 2 \sqrt{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} + (1 + \sin \alpha) = 2(1 + \cos \alpha)$$

$$2 + 2\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)} = 2(1 + \cos \alpha) \Rightarrow 2 + 2\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)} = 2(1 + \cos \alpha)$$

$$2 + 2\sqrt{(\cos^2 \alpha)} = 2(1 + \cos \alpha) \Rightarrow 2 + 2\cos \alpha = 2(1 + \cos \alpha)$$

$$2(1 + \cos \alpha) = 2(1 + \cos \alpha) \quad \text{L.q.q.d.}$$

Ejemplo 7 Demostrar que $\sin^2 x \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 1$

Demostración: Por identidad: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Luego

$$\sin^2 x \operatorname{tg}^2 x + (1 - \sin^2 x) \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 1$$

$$\underbrace{\sin^2 x \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x}_{\text{}} - \underbrace{\sin^2 x \operatorname{cotg}^2 x}_{\text{}} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 1$$

En el primer miembro, factorizamos " $\sin^2 x$ "

$$\sin^2 x (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x) + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 1$$

$$\sin^2 x \left[\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right] + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 1$$

$$\sin^2 x \left[\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \right] + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 1$$

$$\begin{bmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{bmatrix} \frac{1}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} x \\ 1 & \operatorname{ctg} x \end{bmatrix}^2 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} x \\ 1 & \operatorname{ctg} x \end{bmatrix}^2$$

$$\left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right]^2 = \left[\frac{1 \operatorname{tg} x}{1 \operatorname{ctg} x} \right]^2 \Rightarrow \text{Por propiedad multiplicamos el numerador y denominador por } (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$\left[\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x (\cos x - \operatorname{sen} x)} \right]^2 = \left[\frac{1 \operatorname{tg} x}{1 \operatorname{ctg} x} \right]^2 \Rightarrow \text{La expresión del primer numerador se puede escribir así.}$$

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)}{\left(\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right)} \right]^2 = \left[\frac{1 \operatorname{tg} x}{1 \operatorname{ctg} x} \right]^2 \Rightarrow \text{Separamos fracciones en el numerador y denominador}$$

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)}{\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right)} \right]^2 = \left[\frac{1 \operatorname{tg} x}{1 \operatorname{ctg} x} \right]^2 \Rightarrow \left[\frac{1 \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x - 1} \right]^2 = \left[\frac{1 \operatorname{tg} x}{1 \operatorname{ctg} x} \right]^2$$

Por propiedad $(a-b)^2 = (b-a)^2$ También $\left(\frac{1-a}{b-1} \right)^2 = \left(\frac{1-a}{1-b} \right)^2$

$$\left[\frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x} \right]^2 = \left[\frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x} \right]^2 \quad \text{t.q.q.d.}$$

Ejemplo 9 Demostrar que $\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

Demostración. Haciendo producto de extremos y medios, obtenemos

$$(1-\cos x)(1+\cos x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x$$

$$1-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \Rightarrow 1=1 \quad \text{t.q.q.d.}$$

b) Simplificaciones

Se buscará una expresión reducida de la planteada con ayuda de las identidades fundamentales y/o auxiliares con transformaciones algebraicas. A continuación vemos algunos ejemplos

Ejemplo 1 Simplificar $R = (2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$

Resolución.

Aplicamos $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, obteniendo

$$R = (2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1)^2 - 2 \cdot 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot 1 + (1)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$R = \underbrace{4 \operatorname{sen}^4 \theta - 4 \operatorname{sen}^2 \theta + 1}_{\text{En las expresiones remarcadas factorizamos "4 sen}^2 \theta"} + 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$$

En las expresiones remarcadas factorizamos "4 sen² θ" obteniendo

$$R = 4 \operatorname{sen}^2 \theta \left(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \right) - 4 \operatorname{sen}^2 \theta + 1$$

$$R = \cancel{4 \operatorname{sen}^2 \theta} + \cancel{\operatorname{sen}^2 \theta} + 1 \Rightarrow R = 1 \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 2 Simplificar $A = (1 - \operatorname{sen} x)(\sec x + \operatorname{tg} x)$

Resolución

Transformamos la expresión dada a seno y coseno veamos

$$A = (1 - \operatorname{sen} x) \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$A = (1 - \operatorname{sen} x) \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right) \quad \begin{matrix} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{matrix}$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x \Rightarrow A = \cos x \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 3 Reducir $M = \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{cotg}^2 x) + \operatorname{cotg} x (1 - \operatorname{tg}^2 x)$

Resolución.

Electuando los productos indicados obtenemos

$$M = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x$$

$$M = \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x) \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x \cdot (\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} x$$

$$M = \cancel{\operatorname{tg} x} \cdot \cancel{\operatorname{cotg} x} + \cancel{\operatorname{cotg} x} \cdot \cancel{\operatorname{tg} x} \Rightarrow M = 0 \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 4: Simplificar $S = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)} + \frac{\operatorname{cotg} x}{(1 - \operatorname{cotg} x)}$

Resolución:

Por identidad $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, obtenemos:

$$S = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)} + \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)} \Rightarrow S = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)} + \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)}{\left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x}\right)}$$

$$S = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x - 1)} \quad \text{Hacemos cambio de signos, veamos:}$$

$$S = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x - 1)} = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)} - \frac{1}{(1 - \operatorname{tg} x)}$$

$$S = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{(1 - \operatorname{tg} x)} = \frac{-(1 - \operatorname{tg} x)}{(1 - \operatorname{tg} x)} = 1 \Rightarrow \therefore S = 1. \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 5: Simplificar $P = (\sec \alpha \operatorname{cotg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{cosec} \alpha) (\sec \alpha \operatorname{cotg} \alpha - \cos \alpha \operatorname{cosec} \alpha)$

Resolución:

Llevamos dicha expresión en términos de seno y coseno, veamos

$$P = \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \cos \alpha \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - \cos \alpha \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$$

$$P = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$$

$$P = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$P = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \Rightarrow P = 1 \quad \text{Rpta.}$$

c) Condicionales.

Si la condición es complicada debemos simplificarla y así llegar a una expresión que puede ser la pedida o que nos permita hallar fácilmente a que nos piden. Si la condición es simple inmediatamente se procede a encontrar la expresión pedida. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Si $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{cosec} \theta = a$. Calcular el valor de $E = \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$

Resolución

De la condición $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{cosec} \theta = a$ elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 = a^2$$

$$(\operatorname{sen} \theta)^2 + 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cosec} \theta + (\operatorname{cosec} \theta)^2 = a^2$$

$$(\operatorname{sen}^2 \theta) + 2 \operatorname{sen} \theta \times \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + \operatorname{cosec}^2 \theta = a^2$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta}_E = a^2 - 2 \Rightarrow E = a^2 - 2 \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 2 Si $\operatorname{sen} x + \cos x = b$. Hallar el valor de $R = 2 \operatorname{sen} x \cos x + 1$

Resolución

De la condición $\operatorname{sen} x + \cos x = b$ elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = b^2$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x}_{} = b^2$$

$$(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + 2 \operatorname{sen} x \cos x = b^2$$

$$\rightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x = b^2 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = b^2 - 1 \quad (1)$$

Reemplazamos (1) en la expresión "R"

$$R = 2 \underbrace{\operatorname{sen} x \cos x}_{b^2 - 1} + 1$$

$$R = b^2 - 1 + 1 = b^2 \Rightarrow R = b^2 \quad \text{Rpta.}$$

Recomendación. Estimado alumno, cuando te encuentres con la expresión:

" $1 = \operatorname{sen} x \pm \cos x$ " y te piden "sen
 x o $\cos x$ " vas a elevar al cuadrado
ambos miembros obteniendo:

$$E^2 = (\operatorname{sen} x \pm \cos x)^2$$

$$E^2 = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} \pm 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$E^2 = 1 \pm 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

La que piden

Ejemplo 3. Si $\cos \theta + \sec \theta = p$ Calcular el valor de $E = \cos^3 \theta + \sec^3 \theta$

Resolución.

Por suma de cubos $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$, se obtiene

$$E = \cos^3 \theta + \sec^3 \theta = (\underbrace{\cos \theta + \sec \theta}_p) \left(\underbrace{\cos^2 \theta + \sec^2 \theta}_1 - \underbrace{\cos \theta \sec \theta}_1 \right)$$

$$E = (p) (\cos^2 \theta + \sec^2 \theta - 1) \quad (I)$$

De la condición $\cos \theta + \sec \theta = p$, elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(\cos \theta + \sec \theta)^2 = p^2 \Rightarrow \cos^2 \theta + \underbrace{2 \cos \theta \sec \theta}_2 + \sec^2 \theta = p^2$$

$$\cos^2 \theta + \sec^2 \theta = p^2 - 2 \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I) $E = (p) (p^2 - 2 - 1) \Rightarrow E = p (p^2 - 3)$ **Rpta.**

d) Eliminación del Ángulo

Estos ejercicios consisten en que a partir de ciertas relaciones trigonométricas debemos encontrar relaciones algebraicas en donde no aparezca el ángulo. Por lo general para eliminar el ángulo se utilizan las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \cotg x &= 1 & ; & & \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 & , & & \operatorname{cosec}^2 x - \cotg^2 x &= 1 \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Si $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{a+1}$ (1) $\operatorname{csc} \theta = \sqrt{b+1}$ (2) Eliminar "θ"

Resolución.

Aplicando la propiedad $A \cdot \sqrt{B} = A^2 = B$, obtenemos

De la expresión (1) $\operatorname{sen}^2 \theta = a+1$ (I) De la expresión (2): $\operatorname{csc}^2 \theta = b+1$ (II)

Sumamos miembro a miembro (I) y (II)

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{csc}^2 \theta = a+b+2 \Rightarrow 1 = a+b+2 \Rightarrow a+b+1=0 \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 2 Eliminar "α" de: $\sec \alpha = m+n$ (1) $\lg \alpha = m-n$ (2)

Resolución

Elevarmos al cuadrado ambos miembros las expresiones (1) y (2)

De la expresión (1): $(\sec \alpha)^2 = (m+n)^2 \Rightarrow \sec^2 \alpha = m^2 + 2mn + n^2$ (I)

De la expresión (2): $(\lg \alpha)^2 = (m-n)^2 \Rightarrow \lg^2 \alpha = m^2 - 2mn + n^2$ (II)

Restamos miembro a miembro (II) y (I) $\sec^2 \alpha - \lg^2 \alpha = 4mn$

$$1 - 1 = 4mn \Rightarrow 4mn=1 \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 3 - Eliminar "θ" $a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta = k \operatorname{cosec} \theta$ (1)

$a \operatorname{sen} \theta - b \cos \theta = \operatorname{cosec} \theta \lg \theta$ (2)

Resolución.

De la expresión (1) $a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta = k \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$

$$a \cos \theta \operatorname{sen} \theta + b \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta = k \Rightarrow a \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta = k \quad (I)$$

De la expresión (2) $a \operatorname{sen} \theta - b \cos \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$

$$a \operatorname{sen} \theta \cos \theta - b \cos \theta \cos \theta = 1 \Rightarrow a \operatorname{sen} \theta \cos \theta - b \cos^2 \theta = 1 \quad (II)$$

Restamos miembro a miembro (I) y (II)

$$(a \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta) - (a \operatorname{sen} \theta \cos \theta - b \cos^2 \theta) = k - 1$$

$$b \operatorname{sen}^2 \theta + b \cos^2 \theta = k - 1 \Rightarrow b (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = k - 1$$

$$b = k - 1 \Rightarrow k = b + 1 \quad \text{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS N° 9

A - Demostrar las siguientes identidades

$$1 - \sec x + \lg x)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

Demostración.

$$\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x} \right)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\frac{(1 + \sin x)(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\frac{(1 + \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\frac{(1 + \sin x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad \text{L.q.q.d}$$

$$3. \frac{1}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{colg} x} + \operatorname{colg} x = \operatorname{cosec} x$$

Demostración.

$$2. \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x + \cos x$$

Demostración.

$$4. (1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$$

Demostración.

$$5. \frac{3 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = 3 \cotg x \cos x$$

Demostración:

La fracción del 1er miembro, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{3 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = 3 \cotg x \cos x$$

$$3 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) \frac{\operatorname{sen} x}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)} = 3 \cotg x \cos x$$

$$3 \cotg x \cos x = 3 \cotg x \cos x$$

L.q.q.d

$$7. \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 - \frac{2 \cotg^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta}$$

Demostración

$$6. (1 + \cos x)(\operatorname{cosec} x - \cotg x)^2 = (1 - \cos x)$$

Demostración:

$$8. \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{vers} \theta}} = \cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta$$

Demostración:

B Simplificar cada una de las siguientes expresiones

$$1. \quad R = \frac{\sin^3 x}{\cos x \cos^3 x}$$

Resolución.

La expresión dada se puede escribir de la manera siguiente

$$R = \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos x (1 - \cos^2 x)}$$

$$R = \frac{\cancel{\sin^2 x} \sin x}{\cos x (\cancel{\sin^2 x})} \quad \text{Ig x} \quad \text{Apta.}$$

$$2. \quad P = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \sin \theta \cos \theta$$

Resolución.

Apta. $P = \sin \theta$

$$3. \quad M = \frac{(\operatorname{cosec} x + \cot g x)(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

Resolución.

Apta. $M = \operatorname{cosec} x$

$$4. \quad T = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x + (1 + \cot g^2 x) \sin^2 x$$

Resolución.

Apta. $T = 2$

C Eliminar el ángulo en cada una de las siguientes identidades

1. $x = 3 \cos \theta \dots (1)$ $y = 2 \sin \theta \dots (2)$

Resolución:

Elevamos al cuadrado las expresiones (1) y (2)

De (1)

$$x^2 = (3 \cos \theta)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \cos^2 \theta \quad (3)$$

De (2) $y^2 = 2 \sin \theta)^2 \Rightarrow y^2 = 4 \sin^2 \theta$

$$y^2 = 4 (1 - \cos^2 \theta) \quad (4)$$

Reemplazamos (3) en (4): $y^2 = 4 (1 - \frac{x^2}{9})$

$$9y^2 = 4 (9 - x^2)$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{Rpta.}$$

2. $x = \sin \beta \quad (1)$ $y = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \quad (2)$

Resolución:

3. $1 + \lg x = n \quad (1)$

$$\cos x = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} \quad (2)$$

Resolución.

4. $a \sin x + \cos x = 1 \quad (1)$

$$b \sin x + \cos x = 1 \quad (2)$$

Resolución.

Rpta. $2x^2 + y = 1$

Rpta. $ab = 1$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS TIPO I B.M.

Ejercicio 1 Si $\operatorname{cosec} \alpha \cdot \cos \alpha = 1$ Calcular $T = \frac{\sin^3 \alpha}{1 - \cos \alpha}$

- A) 1 B) 1 C) $\sin \alpha$ D) $-\sin \alpha$ E) $\cos \alpha$

Resolución

En la expresión "T" multiplicamos al numerador y denominador por la conjugada de denominador o sea por " $1 + \cos \alpha$ "

$$T = \frac{\sin^3 \alpha}{(1 - \cos \alpha)} \cdot \frac{(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin^3 \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 - \cos^2 \alpha)} \quad \text{Pero } 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$T = \frac{\sin^3 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \quad T = \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \quad (I)$$

De la condición $\operatorname{cosec} \alpha \cdot \cos \alpha = 1$, obtenemos.

$$\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = 1 \Rightarrow 1 - \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha$$

$$1 = \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow 1 = \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I) $T = \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \Rightarrow T = 1$ Rpta. A

Ejercicio 2 Expresar "R" en términos de " $\cotg \alpha$ " si $R = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sec \alpha} + \frac{\lg \alpha}{\cotg \alpha}$

- A) $\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}$ B) $\frac{\cotg \alpha}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}$ C) $\frac{1 + \cotg^2 \alpha}{\cotg^2 \alpha}$ D) $\frac{2 \cotg \alpha}{1 + \cotg^2 \alpha}$ E) $\frac{1 + \cotg^2 \alpha}{2 \cotg \alpha}$

Resolución.

Sabemos que $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ $\cotg \alpha = \frac{1}{\lg \alpha}$

Reemplazando dichos valores en la expresión "R" se tiene

$$R = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\cos \alpha}} + \frac{\lg \alpha}{\frac{1}{\lg \alpha}} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \lg^2 \alpha$$

$$\begin{pmatrix} A \\ 1 \\ B \end{pmatrix} = A \cdot B$$

$$R = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$R = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \text{Pero } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$R = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Hacemos un artificio, multiplicando y dividiendo por $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, a esta última expresión, veamos.

$$R = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$R = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha)^2}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} \quad \text{Pero } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$R = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + (1)^2}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} \Rightarrow R = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 3 Eliminar "θ" a partir de $p = \sin \theta + \cos \theta$ (1) $q = \sin \theta - \cos \theta$ (2)

A) $p^2 - q^2 = 2 \operatorname{tg} \theta$ B) $p^2 + q^2 = 1$ C) $p^2 + q^2 = 2$ D) $p^2 - q^2 = 1$ E) $(p^2 - q^2)^2 = 2 \operatorname{tg} \theta$

Resolución.

Elevamos al cuadrado ambos miembros tanto de la expresión (1) como (2) Así

$$p^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta & (3) \end{cases}$$

$$q^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta & (4) \end{cases}$$

$$\sum \text{M.A.M. } p^2 + q^2 = 2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$p^2 + q^2 = 2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \Rightarrow p^2 + q^2 = 2 \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 4 Si se cumple la identidad $\operatorname{ctg}^m x \cdot \cos^n x = \operatorname{ctg}^n x \cdot \cos^m x$ Evaluar $\frac{m}{n} + mn$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Resolución

El primer miembro de la expresión dada se puede escribir así $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cos^2 x = \operatorname{colog}^m x \cos^n x$

$$\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) \cos^2 x = \operatorname{colog}^m x \cos^n x \Rightarrow \text{En el primer miembro factorizamos "cos}^2 x"$$

$$\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \operatorname{colog}^m x \cos^n x$$

$$\cos^2 x \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \right) = \operatorname{colog}^m x \cos^n x \Rightarrow \text{Pero } 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\cos^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \operatorname{colog}^m x \cos^n x \Rightarrow \text{Pero } \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{colog}^2 x$$

$$\cos^2 x \operatorname{colog}^2 x = \operatorname{colog}^m x \cos^n x$$

$$\operatorname{colog}^2 x \cos^2 x = \operatorname{colog}^m x \cos^n x \Rightarrow$$

Por comparación de términos en ambos miembros, obtenemos

$$m = 2$$

$$n = 2$$

Luego: $\frac{m}{n} + mn = \frac{2}{2} + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \frac{m}{n} + mn = 5$ Rpta. C

Ejercicio 5 Reducir $Z = \operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}^3 x + 3 \operatorname{ctg} x$

A) $3 \sec x \operatorname{cosec} x$

B) $\sec x + \operatorname{cosec} x$

C) $3 \sec x + 3 \operatorname{cosec} x$

D) $\sec^3 x \operatorname{cosec}^3 x$

E) $\sec^3 x \operatorname{cosec}^3 x$

Resolución.

Ordenando los términos de la expresión se tiene que

$$Z = (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{colog}^3 x) + (3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{colog} x) \quad \text{Pero } A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$Z = (\operatorname{tg} x + \operatorname{colog} x) (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x \operatorname{colog} x + \operatorname{colog}^2 x) + 3 (\operatorname{tg} x + \operatorname{colog} x)$$

Factorizamos $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$

$$Z = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \left[\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x + 3 \right] \quad \text{pero } \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$$

$$Z = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \left[\operatorname{tg}^2 x - 1 + \operatorname{ctg}^2 x + 3 \right]$$

$$Z = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \left[2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \right] \quad \Rightarrow \quad \text{pero } 2 = 1 + 1$$

$$Z = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \left[1 + \underbrace{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x \right]$$

$$Z = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \left[\underbrace{\left(1 + \operatorname{tg}^2 x \right)}_{\substack{\text{Pero } \rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \\ \rightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x}} + \underbrace{\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x \right)} \right]$$

$$Z = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \left[\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \right] \quad \Rightarrow \quad \text{Lo llevamos en función de seno y coseno.}$$

$$Z = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right]$$

$$Z = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} \right) \left[\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} \right] \quad \text{pero } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$Z = \left(\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} \right] = \left(\frac{1}{\cos^3 x} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \right) = \sec^3 x \operatorname{cosec}^3 x$$

$$Z = \sec^3 x \operatorname{cosec}^3 x$$

Rpta. D

Ejercicio 6 : Si $\operatorname{Vers} \theta + \operatorname{cov} \theta = m$. Entonces $\{\operatorname{vers} \theta\} \cdot \{\operatorname{cov} \theta\}$ es igual a

A) $\frac{m^2 + 1}{2}$

B) $\frac{m^2 - 1}{2}$

C) $\frac{(m+1)^2}{4}$

D) $\frac{(m-1)^2}{2}$

E) $\frac{m^2 - 1}{4}$

Resolución

$$\text{Sabemos que: } \text{vers } \theta = 1 - \cos \theta \quad \text{y} \quad \text{cov } \theta = 1 - \sin \theta$$

$$\text{Luego: } (1 - \cos \theta) + (1 - \sin \theta) = m \quad \Rightarrow \quad 2 - m = \sin \theta + \cos \theta \quad (I)$$

Llevamos al cuadrado ambos miembros de esta última expresión

$$(2 - m)^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2$$

$$(2 - m)^2 = \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \Rightarrow \quad (2 - m)^2 - 1 = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{(2 - m)^2 - 1}{2} = \sin \theta \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \text{pero } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

$$\frac{(2 - m) + 1}{2} \frac{(2 - m) - 1}{2} = \sin \theta \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{(3 - m)(1 - m)}{2} = \sin \theta \cos \theta \quad (II)$$

De la expresión $\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta$, obtenemos:

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = (1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta)$$

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = 1 - \underbrace{\sin \theta}_{\text{sen } \theta} - \underbrace{\cos \theta}_{\text{cos } \theta} + \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = 1 - (\sin \theta + \cos \theta) + \sin \theta \cos \theta \quad (III)$$

Reemplazamos las expresiones (I) y (II) en (III)

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = 1 - (2 - m) + \frac{(3 - m)(1 - m)}{2}$$

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = (m - 1) + \frac{(3 - m)(1 - m)}{2}$$

Por propiedad:

$$(3 - m)(1 - m) = (m - 3)(m - 1)$$

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = (m - 1) + \frac{(m - 3)(m - 1)}{2}$$

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = \frac{2(m - 1) + (m - 3)(m - 1)}{2}$$

Factorizamos: " $(m - 1)$ "

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = \frac{(m - 1)[2 + (m - 3)]}{2} = \frac{(m - 1)(m - 1)}{2} = \frac{(m - 1)^2}{2}$$

$$\text{Vers } \theta \cdot \text{cov } \theta = \frac{(m - 1)^2}{2}$$

Rpta. D

Ejercicio Dada la igualdad $3 \cos x - \sin x = 1$. Calcular el valor de $\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x}$

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) -1

Resolución:

La expresión $\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x}$, se puede escribir de la manera siguiente

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x + 1 - \sin x}{(1 - \sin x)}$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} + \frac{(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)}$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} + 1$$

multiplicamos numerador y de
nominador por la conjugada de
(1 - sen x) o sea por (1 + sen x)

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x (1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} + 1$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} + 1$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} + 1 \Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} + 1 \quad (I)$$

De la expresión $3 \cos x - \sin x = 1$ obtenemos que $3 \cos x = 1 + \sin x$ (II)

Reemplazamos (II, en I) $\frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{3 \cos x}{\cos^2 x} + 1$ **Rpta. C**

Ejercicio Hallar "M" para que la siguiente expresión sea una identidad.

$$\frac{\tan^3 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + \frac{\cot^3 \theta}{1 + \cot^2 \theta} + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

- A) $-\sec^2 \theta$ B) $\cos^2 \theta$ C) $\sin \theta \cos \theta$ D) $-\sin \theta \cos \theta$ E) $\sec \theta \operatorname{cosec} \theta$

Resolución

Sabemos que $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$

$$\text{Luego } \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{\sec^2 \theta} + \frac{\operatorname{colog}^3 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta} + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\left(\frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} \right) + \left(\frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta} \right) + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta \rightarrow \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}{\sin \theta \cos \theta} + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} - 2 \sin \theta \cos \theta + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + 2M = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 2M \Rightarrow M = \sin \theta \cos \theta \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio (9) Eliminar "θ" a partir de $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{b+1}$ (I) $\operatorname{tg} \theta + \operatorname{colog} \theta = \frac{1}{a}$ (II)

- A) $a + b = 2$ B) $2b = a + 1$ C) $2a = b + 1$ D) $2a = b$ E) $a = 3b - 1$

Resolución.

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la expresión (I): $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (\sqrt{b+1})^2$

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1} + 2 \sin \theta \cos \theta = b + 1$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = b + 1 \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{b}{2} \quad \text{(I')}$$

De la expresión (II); obtenemos $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{a}$

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{a} \quad \text{pero } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \sin \theta \cos \theta \quad \text{(I')}$$

Reemplazamos (I') en (I): $a = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2a \Rightarrow \text{Rpta. D}$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

NIVEL 1

Ejercicio 1 Reducir $Q = \frac{\sec^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sec^2 \theta}$

- A) $\sec \theta$ B) $\csc \theta$ C) $2 \cos \theta$
D) $2 \csc \theta$ E) $2 \tan \theta$

Ejercicio 2 Reducir

$$R = \frac{2 \cos^2 \alpha + 1}{1 - 2 \sin^2 \alpha} + \frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$$

- A) 0 B) $\sec^2 \alpha$ C) 1 D) $\csc^2 \alpha$ E) 2

Ejercicio 3 Simplificar

$$S = \frac{1 + \sin^2 \theta}{1 + \csc^2 \theta} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{1 + \sec^2 \theta} + \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

- A) 2 B) $\tan^2 \theta$ C) $\sec^2 \theta$
D) $\csc^2 \theta$ E) $\cot^2 \theta$

Ejercicio 4 Señale cuáles son identidades

- I) $\frac{\sec \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sec \theta} = 2 \csc \theta$
II) $\frac{\sec \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sec \theta} = 2 \csc \theta$
III) $\frac{\sec \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sec \theta} = 2 \cot \theta$

- A) I, II B) II C) I, III D) todas E) Ninguna

Ejercicio 5 Simplificar la expresión

$$E = \frac{\sec^4 \theta + \sec^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta}{\sec^6 \theta + 2 \sec^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^6 \theta}$$

- A) 1 B) 0 C) 1 D) $\tan \theta$ E) $\cot \theta$

Ejercicio 6 Dado $\frac{a}{\tan x} + \frac{b}{\cot x}$ Hallar

$$T = \frac{\tan^2 x \cot^2 x}{\sec^2 x + \csc^2 x}$$

- A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a+b}{a-b}$ D) $\frac{a-b}{a+b}$ E) $1 + \frac{a}{b}$

Ejercicio 7 Simplificar la expresión

$$U = \frac{\sec^2 x \tan^2 x}{\cos^2 x \cot^2 x}$$

- A) $\tan^2 x$ B) $\cot^2 x$ C) $\tan^4 x$ D) $\cot^4 x$ E) $\tan^6 x$

Ejercicio 8 Reducir la expresión

$$M = \cos^2 x \left(\frac{\sec^4 x \sec^2 x}{\cos^4 x \cos^2 x} + 1 \right)$$

- A) 2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Ejercicio 9 Reducir la expresión

$$K = \sqrt{\frac{\cos x \sec x}{\sec x \csc x}}$$

- A) $\sec x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$
D) $\cot x$ E) $\sec x \cdot \csc x$

Ejercicio 10 Simplificar la expresión

$$N = \frac{\sec x \tan x + \cos x \cot x}{\sec x + \csc x} + \frac{1}{\tan x + \cot x}$$

- A) $\sec x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$
D) $\cot x$ E) $\tan x \cot x$

Clave de Respuestas

1. B	2. B	3. C	4. A	5. C
6. D	7. E	8. D	9. C	10. E

Ejercicio 1 Simplificar la expresión

$$A = \frac{2 \operatorname{cosec} x \cdot 3 \cotg^2 x - 2}{3 \operatorname{cosec} x + 1} + \operatorname{cosec} x$$

A) 1 B) 0 C) 1 D) $\cotg x$ E) $\operatorname{cosec} x$

Ejercicio 2 Simplificar la expresión

$$Q = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} + \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} - \operatorname{cosec} x (1 + \sec x)$$

A) $\operatorname{sen} x$ B) $\cos x$ C) $\lg x$
D) $\sec x$ E) $\operatorname{cosec} x$ Ejercicio 3 Si: $\lg^2 x + \cotg^2 x = 7$ Calcular el valor de: $P = \lg^3 x + \cotg^3 x$

A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) 28

Ejercicio 4 Si:

$$F = (\lg \alpha + \lg \theta) (1 - \cotg \alpha \cdot \cotg \theta)$$

$$G = (\cotg \alpha + \cotg \theta) (1 - \lg \alpha \cdot \lg \theta)$$

Calcular "F + G"

A) 0 B) 1 C) $\lg \alpha$ D) $\lg \theta$ E) $\lg \alpha \cdot \lg \theta$

Ejercicio 5 Reducir la expresión

$$R = \frac{(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2}{(\lg x + \operatorname{sen} x) (\cotg x + \cos x)}$$

A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Ejercicio 6 Si: $\operatorname{sen} \theta + \cos \theta = n$.Hallar $E = \lg \theta + \cotg \theta + \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta$ A) 1 B) $1 + n$ C) $\frac{2}{(1-n)}$ D) $\frac{1}{(1+n)}$ E) $\frac{2}{(n-1)}$

Ejercicio 7 Simplificar

$$S = (\operatorname{Sen} x \sqrt{\lg x} + \cos x \sqrt{\cotg x})^2$$

A) $\sec x \operatorname{cosec} x$ B) $\lg x \cotg x$
C) $\operatorname{sen} x \cos x$ D) $\operatorname{cosec} x \cotg x$
E) $\sec x \lg x$

Ejercicio 8 Simplificar

$$E = \lg x (1 - \cotg^2 x) + \cotg x (1 - \lg^2 x)$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

Ejercicio 9 Simplificar

$$M = \cos^3 x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen}^5 x$$

A) $2 \sec x$ B) $4 \cotg x$ C) $2 \cos x$
D) $3 \lg x$ E) $4 \operatorname{sen} x$

Ejercicio 10 Reducir

$$Q = \frac{\sec x - \lg x}{\sec x + \lg x} \cdot \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{cosec}^2 x - 1} - \frac{\operatorname{cosec}^2 x - 1}{\operatorname{cosec}^2 x (1 + \cotg^2 x)}$$

A) $\operatorname{sen}^4 x$ B) 0 C) 1
D) $\cos^4 x$ E) $\operatorname{sen}^2 x$

Ejercicio 11 Calcular "M + N" si:

$$M = (\sec x \cdot \operatorname{cosec} x)^2 - (\lg^2 x + \cotg^2 x)$$

$$N = 2 + 2 \sec^2 \theta - \lg^2 \theta - \lg^4 \theta - \sec^4 \theta$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 12 Simplificar

$$E = \operatorname{sen} x (1 + \lg x) + \cos x (1 + \cotg x)$$

A) $\cos x + \sec x$ B) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x$
C) $\operatorname{sen} x + \cos x$ D) $\sec x + \operatorname{cosec} x$
E) $\lg x + \cotg x$ Ejercicio 13 Sabiendo que $A_n = \operatorname{sen}^n \theta + \cos^n \theta$:
a que es igual: $6A_6 - 9A_4 + 10A_2 - 1$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 0

Ejercicio 1 Si $a = \cos \alpha$, $b = \cotg \alpha$. Encontrar el valor de: $R = (1 - a^2)(1 + b^2)$

- A) 1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Ejercicio 2 Si $\frac{\sec x \cdot \lg x}{\operatorname{cosec} x + \cotg x} = 2$

Calcular el valor de $E = \frac{\sec x + \lg x}{\operatorname{cosec} x - \cotg x}$

- A) 0 B) 1 C) 1/2 D) 2 E) 3.4

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. B	4. A	5. C
6. E	7. A	8. A	9. C	10. D
11. A	12. D	13. D	14. A	15. C

NIVEL III

Ejercicio 1 Calcular el valor de

$$P = \frac{(\sen \theta + \cos \theta)^2 + (\sen \theta - \cos \theta)^2}{(\lg \theta + \cotg \theta)^2 - (\lg \theta - \cotg \theta)^2}$$

- A) 0 B) 1 C) 1/2 D) 2 E) 1/4

Ejercicio 2 Reducir

$$P = \frac{(1 + \sen x + \cos x)(\cos x - 1)}{(1 - \sen x - \cos x)(\sen x + 1)}$$

- A) $\sen x$ B) $\cos x$ C) $\lg x$
D) $\cotg x$ E) $\sec x \operatorname{cosec} x$

Ejercicio 3 Calcular el valor de n si

$$\frac{3 \lg \beta - 2 \sec^2 \beta + 1}{2 \lg \beta \sec \beta - \sec \beta} = \cos \beta + n$$

- A) $\sen \beta$ B) $\cos \beta$ C) $\lg \beta$
D) $\cotg \beta$ E) $\cos \beta$

Ejercicio 4 Si

$$\frac{\sec x}{1 + \operatorname{cosec} x} + \frac{\operatorname{cosec} x}{1 + \sec x} = \frac{\operatorname{Vers} x}{A} + \frac{\operatorname{cov} x}{B}$$

Hallar $\frac{B}{A}$

- A) 1 B) $\cotg x$ C) $\cotg^2 x$
D) $\cotg^3 x$ E) $\cotg^4 x$

Ejercicio 5 Si $\cos^2 x - \sen^2 x = a$, Hallar $K = 4(\cos^6 x - \sen^6 x) + 3(\sen^2 x - \cos^2 x)$

- A) $4a^2$ B) a^3 C) $3a^3$ D) $3a^2$ E) $2a$

Ejercicio 6 Reducir

$$P = \sqrt{1 + 2 \sen x \cos x} + \sqrt{1 - 2 \sen x \cos x}$$

- A) $2 \sen x$ B) $4 \cos x$ C) $6 \sen x$
D) $4 \sen x$ E) $7 \cos x$

Ejercicio 7 Calcular $\sec^2 x$ si $\sec x + \lg x = a$

- A) $\frac{a}{a^2 + 1}$ B) $\frac{a^2 + 1}{a}$ C) $\frac{2a}{a^2 + 1}$
D) $\frac{a^2 + 1}{2a}$ E) $\frac{a^2}{a + 1}$

Ejercicio 8 Siendo $A = \frac{\cos x}{1 + \sen x}$, $B = \frac{\sen x}{1 + \cos x}$,

Hallar $K = (A+B) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$

- A) $\sen x \cos x$ B) $2 \sen x \cos x$
C) $\sec x \operatorname{cosec} x$ D) $2 \sec x \operatorname{cosec} x$
E) $N.A.$

Ejercicio 9 Si $P = \sec^n x - \lg^n x$

Hallar Σ

$$\frac{P}{(1)} + \frac{P}{(3)}$$

$$P + P$$

$$(1) \quad (3)$$

- A) $\operatorname{cosec}^2 x$ B) $\sec^2 x$ C) $\cos^2 x$
 D) $\sec^2 x$ E) $\operatorname{tg}^2 x$

Ejercicio 11 Si

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta \cos \theta &= x \\ \operatorname{sen} \theta + \cos \theta &= 1 \end{aligned}$$

es una identidad, calcular el valor de

$$M = \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} + \frac{x+z}{x+y}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) N.A.

Ejercicio 12 Si $a \operatorname{sen} x + b \cos x = a$. Hallar

$$E = a \cos x - b \operatorname{sen} x \quad x \in Q$$

- A) a B) b C) ab

D) $\frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$ E) $\frac{b(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$

Ejercicio 13 Eliminar "b"

$$a(1 - \operatorname{sen} \theta) = b \operatorname{sen} \theta \quad (1)$$

$$a(1 - \cos \theta) = b \cos \theta \quad (2)$$

- A) $a^2 = b^2$ B) $a^2 - b^2 = 1$
 C) $a^2 - b^2 = 2ab$ D) $a^2 + b^2 = 1$
 E) $a^2 = b^2 + 2$

Ejercicio 14 Eliminar "x" en

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{colog} x = a \quad \dots (1)$$

$$\operatorname{sen} x - \cos x = b \operatorname{sen} x - \cos x \quad (2)$$

A) $a^2 + b^2 = \sqrt{2} \sqrt{b^2 + a^2}$

B) $a^2 - b^2 = \sqrt{2} \sqrt{b^2 - a^2}$

C) $a^2 + b^2 = 2\sqrt{2} \sqrt{b^2 + a^2}$

D) $a^2 - b^2 = 2\sqrt{2} \sqrt{b^2 - a^2}$

E) $a^2 - b^2 = 2\sqrt{a^2 + 4}$

Ejercicio 15 Si P, Q, R son constantes que satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{1}{(1 + \operatorname{sen} x)} + \frac{1}{(\operatorname{cosec} x - 1)} = P + Q \operatorname{tg}^R x$$

Calcular "P, Q, R"

- A) 6 B) 2 C) 4 D) 8 E) 5

Ejercicio 16 Si: $\operatorname{Vers} x + \operatorname{cov} x = \frac{5}{2}$ Hallar $P = (\operatorname{Vers} x - \operatorname{cov} x)^2$

- A) 1/4 B) 2/3 C) 1/3 D) 5/4 E) 7/4

Ejercicio 17 Eliminar "0" a partir de

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{a} + \frac{\cos \theta}{b} = \frac{1}{ab} \quad (1)$$

$$y \operatorname{colog} \theta = b/a \quad (2)$$

- A) $a^2 + b^2 = a^2 b^2$ B) $a^2 + b^2 = 2a^2 b^2$
 C) $a^2 + b^2 = 3a^2 b^2$ D) $a^2 + b^2 = 4a^2 b^2$
 E) $a^2 + b^2 = ab$

Ejercicio 18 Si $A = (1 - \sec^2 \theta)^{2n}$

$$B = (1 - \operatorname{cosec}^2 \theta)^{2n+1}, \quad C = \frac{\sec \theta - \cos \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{sen} \theta}$$

Encontrar "A, B, C"

- A) $\sec x$ B) $\operatorname{tg} x$ C) $-\operatorname{tg}^2 x$
 D) $\cos x$ E) $-\operatorname{tg} x$

Ejercicio 1 De las siguientes relaciones eliminar "a"

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = a \quad (1)$$

$$\operatorname{sen}^6 \alpha + \operatorname{cos}^6 \alpha = b \quad (2)$$

- A) $3a(a+b) = 1$ B) $b(a-1) = 2$
C) $a(b-1) = 2$ D) $b^2(1-a) = 3$
E) $a^2(1-b) = 3$

Ejercicio 2 Hallar $\frac{M}{N}$ en la identidad

$$\operatorname{cosec} x (\sec x + \operatorname{tg} x - 1) \operatorname{cotg}^2 x = M \cdot M$$

$$\operatorname{cosec}^2 x \sec x \operatorname{cotg}^2 x = N$$

- A) $\operatorname{tg} \alpha$ B) $\operatorname{cotg} \alpha$ C) $\operatorname{sen} \alpha$ D) $\operatorname{cos} \alpha$ E) $\sec \alpha$

Ejercicio 3 Si:

$$n = \frac{(\operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \beta) (\operatorname{cosec} \beta \cdot \operatorname{cosec} \alpha)}{(\operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta) (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta)}$$

Hallar $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$

- A) 2 B) 1.5 C) 1 D) 0.8 E) 0.5

Ejercicio 4 Si $\operatorname{cotg} KR = K \operatorname{cotg} \theta$ Hallar "(A - B)" en la igualdad

$$\frac{\cos^2 KR}{\cos^2 \theta} = \frac{A}{1+B \cos^2 \theta}$$

- A) K B) K^2 C) 1 D) 1 E) $1-2K^2$

Ejercicio 5 Si $\operatorname{sen} a + \operatorname{cos} a = 1/3$ Hallar $\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a$

- A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) 9 D) $\frac{-9}{2}$ E) $\frac{-9}{4}$

Ejercicio 6 En la siguiente igualdad Hallar "m + n + p"

$$\operatorname{sen}^6 x + \operatorname{cos}^6 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{cos}^4 x + 5 \operatorname{sen}^2 x - 7 = m \operatorname{cos}^2 x (n + p \operatorname{cos}^2 x)$$

- A) 4 B) 8 C) -8 D) -4 E) -5

Ejercicio 7 Hallar el equivalente de

$$M = \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg}^2 \theta + 1$$

- A) $\operatorname{Vers} \theta \sec^2 \theta$ B) $-\operatorname{Vers} \theta \sec^2 \theta$
C) $\operatorname{cov} \theta \sec^2 \theta$ D) $-\operatorname{cov} \theta \sec^2 \theta$
E) $\operatorname{vers} \theta \cdot \operatorname{cov} \theta$

Ejercicio 8 Eliminar "x"

$$\operatorname{cotg} \phi + \operatorname{tg} \phi = x \quad (1)$$

$$y = \operatorname{Vers}^2 \phi + \operatorname{cov}^2 \phi \quad (2)$$

- A) $(x+2)(x-3)y = 4$ B) $x^2 + y^2 = 16$
C) $x(y-3)^2 = 4$ D) $x(y-1)(y-5) = 8$
E) $x(y-2)(y-3) = 16$

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. A	4. E	5. B
6. A	7. C	8. D	9. B	10. D
11. B	12. C	13. D	14. C	15. E
16. D	17. E	18. E	19. B	20. C
21. C	22. E	23. D	24. D	25. D



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

PROBLEMA 1 En la identidad: $(1 + \operatorname{Sen} \theta + \operatorname{Cos} \theta)^2 =$ **A) 3** **B) 2** **C) -1**
 $K(1 + \operatorname{Sen} \theta)(1 + \operatorname{Cos} \theta)$ Hallar el valor de "K" **D) 4** **E) 6**

Resolución:

Aplicando: $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$ obtenemos

$$1 + \operatorname{Sen}^2 \theta + \operatorname{Cos}^2 \theta + 2 \operatorname{Sen} \theta + 2 \operatorname{Cos} \theta + 2 \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta = K(1 + \operatorname{Sen} \theta)(1 + \operatorname{Cos} \theta)$$

$$\text{---} \textcircled{1} \text{---}$$

$$2 + 2(\operatorname{Sen} \theta + \operatorname{Cos} \theta) + 2 \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta = K(1 + \operatorname{Sen} \theta)(1 + \operatorname{Cos} \theta)$$

$$2 \left[\cancel{1 + \operatorname{Sen} \theta + \operatorname{Cos} \theta} + \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta \right] = K \left[\cancel{1 + \operatorname{Sen} \theta + \operatorname{Cos} \theta} + \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta \right]$$

$$\Rightarrow \therefore \boxed{K = 2} \text{ Rpta. B}$$

PROBLEMA 2 : Encontrar el valor de "K" para que **A) 4/3** **B) 3** **C) 2/3**
 se verifique la identidad: **D) 3/4** **E) 1**

$$\operatorname{Sen}^6 \alpha + \operatorname{Cos}^6 \alpha = 1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

Resolución.

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$(\operatorname{Sen}^2 \alpha)^3 + (\operatorname{Cos}^2 \alpha)^3 = 1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

$$\underbrace{(\operatorname{Sen}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha)}_{=1} \left[(\operatorname{Sen}^2 \alpha)^2 + (\operatorname{Cos}^2 \alpha)^2 - \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha \right] = 1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

$$(\operatorname{Sen}^4 \alpha + \operatorname{Cos}^4 \alpha - \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha) = 1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

$$(\operatorname{Sen}^4 \alpha + \operatorname{Cos}^4 \alpha + 2 \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha - 3 \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha) = 1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

$$\underbrace{(\operatorname{Sen}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha)^2}_{=1} - 3 \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

$$\underbrace{1 - 3 \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha}_{=1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha} = 1 - K \operatorname{Sen}^2 \alpha \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

Por comparación de términos $\Rightarrow \boxed{K = 3} \text{ Rpta. B}$

PROBLEMA 5. Si $\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^4 x = m$. Hallar
 $K = \text{Sen}^4 x + \text{Cos}^4 x$

- A) $2m$ B) $2m + 1$ C) $2(m + 1)$
 D) $2m - 1$ E) $1 - m$

Resolución.

Por identidad auxiliar $\boxed{\text{Sen}^4 x + \text{Cos}^4 x = 1 - 2 \text{Sen}^2 x \text{Cos}^2 x}$ $K = 1 - 2 \text{Sen}^2 x \text{Cos}^2 x$ (I)

• De la condición: $\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^4 x = m$

$$\text{Sen}^2 x + (\text{Cos}^2 x)^2 = m, \text{ pero } \boxed{\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sen}^2 x}$$

$$\text{Sen}^2 x + (1 - \text{Sen}^2 x)^2 = m$$

$$\text{Sen}^2 x + (1 - 2 \text{Sen}^2 x + \text{Sen}^4 x) = m \Rightarrow \text{Sen}^4 x - \text{Sen}^2 x = m - 1 \quad \text{(II)}$$

• De la expresión (I): $K = 1 - 2 \text{Sen}^2 x \text{Cos}^2 x$

$$K = 1 - 2 \text{Sen}^2 x (1 - \text{Sen}^2 x) = 1 - 2 (\text{Sen}^2 x - \text{Sen}^4 x)$$

$$K = 1 + 2 (\text{Sen}^4 x - \text{Sen}^2 x) \quad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II): $K = 1 + 2(m - 1) \Rightarrow K = 2m - 1$ Rpta. D

PROBLEMA 6 Reducir la expresión.

- A) $\text{Cos } x$ B) $1/2 \text{ Sen } x$ C) $1/2 \text{ Cos } x$
 D) $\text{Sen } x$ E) $\text{tg } x$

$$E = \text{Cosec } x - \sqrt{\text{Cotg}^2 x - \text{Cos}^2 x}$$

Resolución.

$$E = \frac{1}{\text{Sen } x} \sqrt{\frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Sen}^2 x} - \text{Cos}^2 x} = \frac{1}{\text{Sen } x} \sqrt{\text{Cos}^2 x \left(\frac{1}{\text{Sen}^2 x} - 1 \right)}$$

$$E = \frac{1}{\text{Sen } x} \sqrt{\text{Cos}^2 x \left(\frac{1 - \text{Sen}^2 x}{\text{Sen}^2 x} \right)} \quad \text{pero } 1 - \text{Sen}^2 x = \text{Cos}^2 x$$

$$E = \frac{1}{\text{Sen } x} \sqrt{\text{Cos}^2 x \left(\frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Sen}^2 x} \right)} = \frac{1}{\text{Sen } x} \cdot \frac{\text{Cos } x \cdot \text{Cos } x}{\text{Sen } x}$$

$$E = \frac{1 \cdot \text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x} = \frac{\text{Sen}^2 x}{\text{Sen } x} = \text{Sen } x \Rightarrow E = \text{Sen } x \quad \text{Rpta. D}$$

PROBLEMA 7 Dado: $\text{Sec } x \text{ tg } x = \frac{2}{3}$ Calcu-

lar el valor de $E = \text{Sec } x \text{ tg } x$

- A) $\frac{15}{64}$ B) $\frac{25}{81}$ C) $\frac{35}{49}$ D) $\frac{65}{108}$ E) $\frac{65}{144}$

Resolución.

• De la condición $\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$ obtenemos $\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{2}{3}$

Elevamos al cuadrado a ambos miembros de esta última expresión

$$\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \Rightarrow \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{1 + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9 + 18 \operatorname{sen} x + 9 \operatorname{sen}^2 x = 4 - 4 \operatorname{sen}^2 x$$

$$13 \operatorname{sen}^2 x - 18 \operatorname{sen} x + 5 = 0$$

Factorización por el Método del Aspa:

$$\begin{array}{ccc} 13 \operatorname{sen} x & & -5 \\ \swarrow & \searrow & \\ \operatorname{sen} x & & -1 \end{array}$$

Factorizamos por el Método del Aspa

Donde: $(13 \operatorname{sen} x - 5)(\operatorname{sen} x - 1) = 0$

i) $13 \operatorname{sen} x - 5 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 5/13$ ii) $\operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1$

• El valor de $\operatorname{sen} x = 5/13$ lo llevamos a un triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen} x = \frac{5}{13} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Cateto opuesto} \\ \text{Hipotenusa} \end{array}$$

• Calculamos el valor de 'a', aplicando el Teorema de Pitágoras

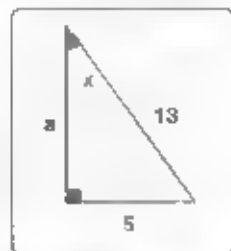
$$13^2 = a^2 + 5^2 \Rightarrow 169 - 25 = a^2 \Rightarrow a = 12$$

Luego

$$i) \sec x = \frac{13}{a} = \frac{13}{12} \Rightarrow \sec x = \frac{13}{12} \quad ii) \operatorname{tg} x = \frac{5}{a} = \frac{5}{12} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \sec x + \operatorname{tg} x = \frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Rpta. E



PROBLEMA 81 Reducir la expresión:

$$K = \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

A) $\sec x$

D) $\cos x$

B) $\operatorname{cosec} x$

E) 1

C) $\operatorname{sen} x$

Resolución

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente $\Rightarrow K = \frac{2 \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x - 1)} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{(1 - \cos x)}$

$$K = \frac{2 \cos x (1 + \sin x + \cos x + 1) - \sin x (1 + \cos x)}{(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x + 1) - (1 + \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$K = \frac{2 \cos x (\sin x + \cos x + 1) - \sin x (1 + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2 - 1 - 1 - \cos^2 x}$$

$$K = \frac{2 \cos x (\sin x + \cos x + 1) - \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1 - 1 - \cos^2 x}$$

$$K = \frac{2 \cos x (\sin x + \cos x + 1) - (1 + \cos x)}{2 \sin x \cos x}$$

$$K = \frac{\sin x + \cos^2 x + 1 - 1 - \cos x}{\sin x} \Rightarrow \boxed{K = 1} \quad \text{Rpta. E}$$

PROBLEMA 9 Dada la expresión

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

$5 \cos x + \sin x = 1$ Calcular $E = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

Resolución:

• De la condición $5 \cos x + \sin x = 1 \Rightarrow 5 \cos x = (1 - \sin x) \Rightarrow \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} = \frac{1}{5}$

El denominador del primer miembro, racionalizamos por su conjugada o sea por $(1 + \sin x)$, veamos

$$\Rightarrow \frac{\cos x (1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\cos x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\cos x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{5}$$

Invertimos ambos miembros de esta última expresión, obteniendo

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{5}{1} \Rightarrow \boxed{E = 5} \quad \text{Rpta. C}$$

PROBLEMA 10 Simplificar

$$R = \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}$$

A) $\sqrt{2(1 + \sin x)}$ B) $\sqrt{2(1 - \sin x)}$

C) $\sqrt{2 + \sin x}$ D) $\sqrt{2 - \sin x}$

E) $\sqrt{2 + \sin x}$

Resolución:

• Elevamos al cuadrado ambos miembros de la expresión "R"

$$R^2 = (\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x})^2$$

$$R^2 = (\sqrt{1 - \cos x})^2 + (\sqrt{1 + \cos x})^2 - 2\sqrt{1 - \cos x} \sqrt{1 + \cos x}$$

$$R^2 = 1 - \cos x + 1 + \cos x - 2\sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$R^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \cos^2 x} \quad ; \text{ pero: } 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$R^2 = 2 - 2\sqrt{\sin^2 x} \Rightarrow R^2 = 2 - 2 \sin x \Rightarrow R = \sqrt{2 - 2 \sin x} \quad \text{Rpta. B}$$

PROBLEMA 11 : Simplificar

A) 1

B) 2

C) -1

D) -2

E) Vers x

$$P = \frac{\text{Vers}^2 x + \text{Cov}^2 x}{\text{Vers} x - \text{Sen} x}$$

Resolución:

Aplicando: $\text{Vers} x = 1 - \cos x$ A $\text{Cov} x = 1 - \sin x$

Obtenemos: $P = \frac{(1 - \cos x)^2 + (1 - \sin x)^2}{(1 - \cos x) - \sin x} = \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x + 1 - 2\sin x + \sin^2 x}{1 - \cos x - \sin x}$

$$P = \frac{2 - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x}{1 - \cos x - \sin x} = \frac{2 - 2\cos x - 2\sin x}{1 - \cos x - \sin x}$$

$$P = \frac{2(1 - \cos x - \sin x)}{(1 - \cos x - \sin x)} \Rightarrow P = 2 \quad \text{Rpta. B}$$

PROBLEMA 12 : Eliminar θ de

A) $ab = 1$

B) $a - b = 1$

C) $a + b = 1$

$$a \sin \theta = b \sin \theta + \cos \theta \quad (I)$$

D) $a^2 + b^2 = 1$

E) $a^2 - b^2 = 1$

$$b \cos \theta = \sin \theta - a \cos \theta \quad (II)$$

Resolución:

• De la expresión (I):

$$a \sin \theta = b \sin \theta + \cos \theta$$

$$a \sin \theta - b \sin \theta = \cos \theta$$

$$(a - b) \sin \theta = \cos \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{(a - b)}$$

$$\text{tg} \theta = \frac{1}{(a - b)} \quad (1)$$

• De la expresión (II):

$$b \cos \theta = \sin \theta - a \cos \theta$$

$$b \cos \theta + a \cos \theta = \sin \theta$$

$$(a + b) \cos \theta = \sin \theta$$

$$\frac{a + b}{1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(a + b) = \text{tg} \theta \quad (2)$$

Iguando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$\frac{1}{a - b} = a + b \Rightarrow 1 = (a + b)(a - b) \Rightarrow 1 = a^2 - b^2 \quad \text{Rpta. E}$$



¿SABÍAS QUE...

uno de los primeros intereses científicos del hombre fue el estudio de la Astronomía?

Egiptios y babilonios hicieron grandes contribuciones a esta ciencia, muchos siglos antes de Cristo, que luego ampliaron los griegos.

Los estudios de astronomía exigieron conocimientos relativos a triángulos. Dicha rama de la Matemática pasó a denominarse **TRIGONOMETRÍA** (*tri = tres, gono = ángulo y metría = medida*). Ya en época de Euclides (siglo III AC) aparecen propiedades y fórmulas utilizadas en Trigonometría.

Capítulo

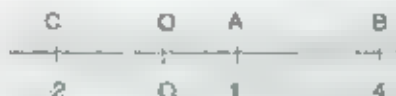
5

RAZONES TRIGONÓMETRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD

5.1 RAZONES TRIGONÓMETRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD

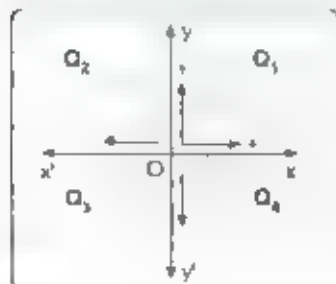
- **ESCALA NUMÉRICA** Una recta dirigida es una recta en la que se han señalado dos sentidos, uno positivo y otro negativo. El sentido se indica con una flecha.

Se determina una escala numérica cuando se escogen un punto O (véase la figura) llamado origen, y una unidad de medida $OA = 1$ en una recta dirigida. En esta escala "B" está situado a 4 unidades a la derecha de O (esto es, en el sentido positivo a partir de O) y "C" está a dos unidades a la izquierda de O (esto es, en el sentido negativo a partir de O).



La distancia dirigida $OB = +4$ y la distancia dirigida $OC = -2$. Es importante observar que puesto que la recta está dirigida $OB \neq BO$ y $OC \neq CO$. La distancia dirigida $BO = -4$ porque se mide en sentido contrario al que se ha tomado como positivo y la distancia dirigida $CO = +2$. Entonces $CB = CO + OB = 2 + 4 = 6$ y $BC = BO + OC = (-4) + (-2) = -6$.

- **SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES (S.C.R.)** Es un plano que se forma al cortarse perpendicularmente dos rectas, una de las rectas se designa como eje "x" y la otra como "y", veamos la figura.



Ejes de Coordenadas

- $x'x$ Es el eje de las abscisas o eje de las "x"
- $y'y$ Es el eje de las ordenadas o eje de las "y"
- O Es el origen de coordenadas

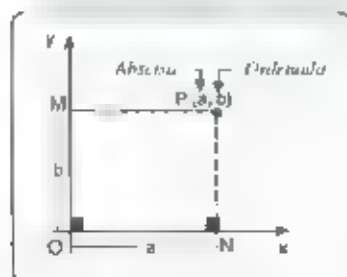
Semi Ejes

- Ox Es el semieje (+) de las abscisas
- Ox' Es el semieje (-) de las abscisas
- Oy Es el semieje (+) de las ordenadas
- Oy' Es el semieje (-) de las ordenadas

Cuadrantes	El primer cuadrante es xOy (Q_1)	El segundo cuadrante es yOx' (Q_2)
	El tercer cuadrante es $x'Oy'$ (Q_3)	El cuarto cuadrante es xOy' (Q_4)

Posición de un Punto o Coordenadas de un Punto.

Se llama así a la localización de un punto en el plano cartesiano. Así:



Abscisa de un Punto

Es la distancia de un punto al eje de las ordenadas

De la figura: $MP = ON \Rightarrow$ **Abscisa**

Ordenada de un Punto:

Es la distancia de un punto al eje de las abscisas

De la figura: $OM = NP \Rightarrow$ **Ordenada**

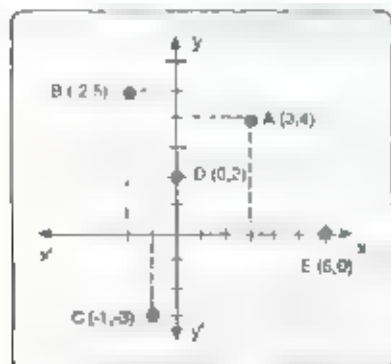
Análiticamente un punto se representa así:

$P(a, b)$ donde "a" es la abscisa y "b" la ordenada del punto

Observación: Al punto $P(a, b)$ también se llama "Par Ordenado" de números, es un par en el cual el orden es importante. Así, el par ordenado $(2, 5)$ no es igual que el par ordenado $(5, 2)$. Además a, b pertenecen al campo de los números reales.

Determinación de un Punto por sus Coordenadas

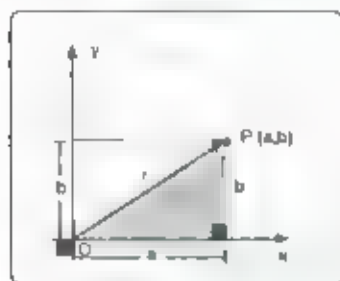
Localice los puntos: A (3, 4), B (2, 5), C (-1, 3), D (0, 2) y E (6, 0)



- En primer lugar se trazan dos rectas dadas, perpendiculares entre sí.
- En segundo lugar marcamos sobre ellas unidades de tamaño adecuado, (vea la figura).
- El punto "A", tiene abscisa 3 positiva y ordenada 4 positiva.
- El punto "B", tiene abscisa 2 negativa y ordenada 5 positiva.
- El punto "C", tiene abscisa 1 negativa y ordenada 3 negativa.
- El punto "D", tiene abscisa cero y ordenada 2 positiva.
- El punto "E", tiene abscisa 6 positiva y ordenada cero.

Radio Vector (r): Es el segmento dirigido que va del origen al punto $P(a, b)$ y se representa por " r " y es siempre positiva, su valor está dado por la fórmula $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Demostración:



Ubicamos el punto $P(a, b)$ en el plano cartesiano

Por el teorema de Pitágoras, calculamos " r "

$$r^2 = a^2 + b^2$$

Donde

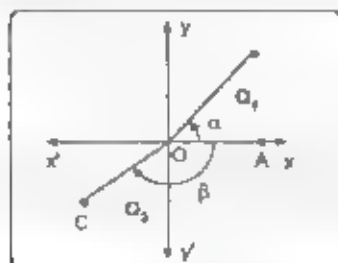
$$|r| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Siendo,

$$\begin{cases} a = \text{abscisa} \\ b = \text{ordenada} \\ r = \text{radio vector, } (r > 0) \end{cases}$$

5.1.1 ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Un ángulo está en posición normal si su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas y su lado final en cualquier parte del plano. Si el lado final coincide con un eje, el ángulo es múltiplo de 90°



α : ángulo en posición normal (+)

β : ángulo en posición normal (-)

OA : coincide con el eje (+) Ox

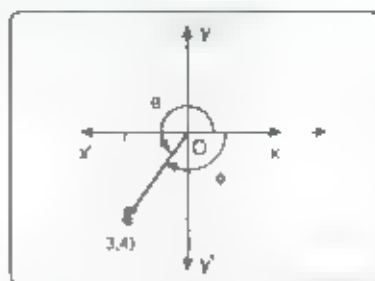
α : ángulo de Q_1 (Primer cuadrante)

β : ángulo de Q_3 (tercer cuadrante)

Ejemplo: Trace en posición normal un ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto $(-3, -4)$.

Resolución.

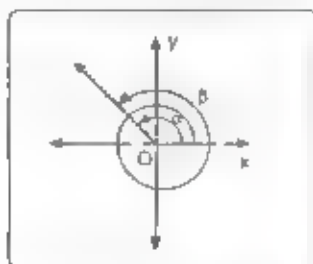
Según la figura "B" es un ángulo positivo y " ϕ " es un ángulo negativo. Donde los dos ángulos cumplen con la condición del problema.



5.1.2 ÁNGULOS COTERMINALES

Dos o más ángulos en posición normal son coterminales cuando sus lados finales coinciden. Si dos ángulos son coterminales, su diferencia debe dar un número entero de vueltas o revoluciones.

ÁNGULOS COTERMINALES QUE TIENEN ORIENTACIÓN POSITIVA



En la figura α y β son coterminales, además se observa que

$$\beta = 1 \text{ vuelta} + \alpha$$

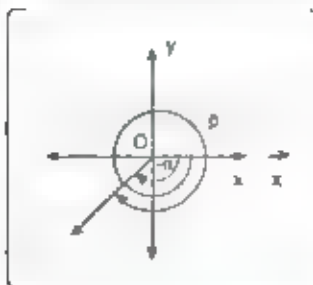
Donde: $\beta - \alpha = 1 \text{ vuelta}$

En general: si: " x " y " y " son coterminales

$$x - y = n \text{ vueltas} \quad \text{o} \quad x - y = n \text{ revoluciones}$$

Luego: $x - y = n \text{ rev} = 2n \pi \text{ rad.} = n \times 360^\circ$

ÁNGULOS COTERMINALES QUE TIENEN ORIENTACIÓN NEGATIVA



En la figura $-\alpha$ y $-\beta$ son coterminales, además se observa que:

$$\beta = -\alpha - 360^\circ$$

Donde: $360^\circ = \beta - \alpha$

En General: Si: " x " y " y " son coterminales

$$\text{Entonces } x - y = n \text{ rev.} = 2n \pi \text{ rad} = n \times 360^\circ$$

Siendo: " n " número entero

ÁNGULOS CUADRANTALES Un ángulo en posición normal, es cuadrantal, cuando su lado final coincide con cualquiera de los semiejes de un sistema de coordenadas rectangulares. Los ángulos cuadrantes no pertenecen a ningún cuadrante y son de la

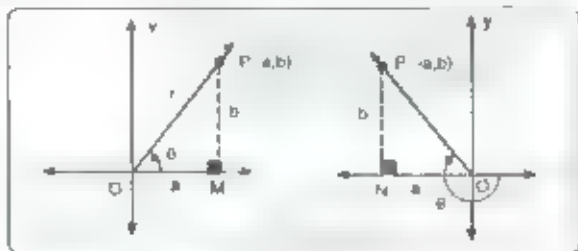
forma: $n \times 90^\circ$ ó $n \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$)

n (# entero)	$n \times 90^\circ$ ó $n \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	Ángulo
1	$(-1) \times 90^\circ = (-1) \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$-90^\circ = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
0	$0 \times 90^\circ = 0 \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$0^\circ = 0 \text{ rad}$
1	$1 \times 90^\circ = 1 \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$
2	$2 \times 90^\circ = 2 \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$180^\circ = \pi \text{ rad}$
3	$3 \times 90^\circ = 3 \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
4	$4 \times 90^\circ = 4 \times \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

5.1.3 Razones Trigonométricas de un Ángulo en Posición Normal

Las razones trigonométricas del ángulo " θ " se definen como se muestra en la tabla en las definiciones que siguen se va a establecer el dominio y el recorrido de las razones trigonométricas aunque deberían ser evidentes.

Sea " θ " un ángulo en posición normal y sea " P " un punto cualquiera (distinto de O) en el lado terminal de " θ ".



TABLA

RAZON TRIGON.	REGLA DE CORRESPONDENCIA	DOMINIO	RECORRIDO
$\text{sen } \theta =$	Ordenada de $P = b$ Radio vector de $P = r$	Todos los ángulos	$-1 \leq \text{todos los números reales} \leq 1$
$\text{cos } \theta =$	Abscisa de $P = a$ Radio vector de $P = r$	Todos los ángulos	$-1 \leq \text{todos los números reales} \leq 1$
$\text{tg } \theta =$	Ordenada de $P = b$ Abscisa de $P = a$	Todos los ángulos para los cuales $a \neq 0$	Todos los números reales
$\text{cotg } \theta =$	Abscisa de $P = a$ Ordenada de $P = b$	Todos los ángulos para los cuales $b \neq 0$	Todos los números reales
$\text{sec } \theta =$	Radio vector de $P = r$ Abscisa de $P = a$	Todos los ángulos para los cuales $a \neq 0$	Todos los números reales ≤ -1 o ≥ 1
$\text{cosec } \theta =$	Radio vector de $P = r$ Ordenada de $P = b$	Todos los ángulos para los cuales $b \neq 0$	Todos los números reales ≤ -1 o ≥ 1

Propiedad Fundamental: Las razones trigonométricas de dos o más ángulos coterminales son iguales. veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 $\text{Sen } 400^\circ = ?$

Resolución:

$$\text{sen } (400^\circ) = \text{sen } \underbrace{(360 + 40^\circ)}_{1 \text{ vuelta}} = \text{sen } 40^\circ \Rightarrow \text{sen } 400^\circ = \text{sen } 40^\circ$$

Ejemplo 2, $\cos 730^\circ = ?$

Resolución:

$$\cos (730^\circ) = \cos \underbrace{(2 \times 360^\circ + 10^\circ)}_{2 \text{ vueltas}} = \cos 10^\circ$$

$$\cos 730^\circ = \cos 10^\circ$$

Ejemplo 3 $\operatorname{tg} 1120^\circ = ?$

Resolución:

$$\operatorname{tg} (1120^\circ) = \operatorname{tg} \underbrace{(3 \times 360^\circ + 40^\circ)}_{3 \text{ vueltas}} = \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} 1120^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ$$

EN GENERAL: Si α y θ son coterminales ($\alpha > \theta$), entonces

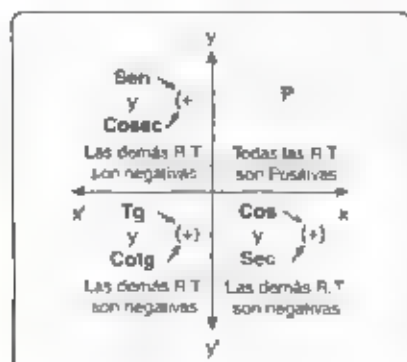
Razón trigonométrica $\alpha =$ Razón trigonométrica ($n \times \text{vueltas} + \theta$) = R.T. (θ)

$$\text{R.T. } (\alpha) = \text{R.T. } (n \times \text{Rev.} + \theta) = \text{R.T. } (\theta)$$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En el presente cuadro se ofrece el signo de cada razón trigonométrica para cada cuadrante

Razón Trigonométrica	Q1 (1° cuadrante)	Q2 (2° cuadrante)	Q3 (3° cuadrante)	Q4 (4° cuadrante)
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
cotg	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
cosec	+	+	-	-



Siendo

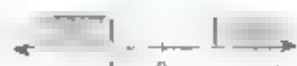
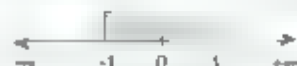
- P : Primer cuadrante
 S : Segundo cuadrante
 T : Tercer cuadrante
 C : Cuarto cuadrante
 R.T. : Razón trigonométrica

VALORES QUE PUEDEN TOMAR LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

I. $1 \leq \frac{\text{sen}(\text{ángulo})}{\text{cos}(\text{ángulo})} \leq 1 \Rightarrow$

II. $-\infty < \frac{\text{tg}(\text{ángulo})}{\text{cog}(\text{ángulo})} < +\infty \Rightarrow$

III. $\frac{\text{sec}(\text{ángulo})}{\text{cosec}(\text{ángulo})} \geq 1$
 \vee
 $\frac{\text{sec}(\text{ángulo})}{\text{cosec}(\text{ángulo})} \leq 1 \Rightarrow$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 10

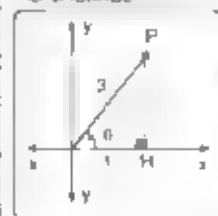
Ejercicio 1 Siendo $\cos \theta = 0,3$ ($\theta \in Q_1$), Calcular "tg θ ".

Resolución:

• De la condición: $\cos \theta = 0,3 = \frac{3}{10} = \frac{1}{3}$

$\cos \theta = \frac{1}{3} \rightarrow$ *Carrito Aritm. entre Hipotenusa*

• Graficando



• Por el teorema de Pitágoras

$OP^2 = PH^2 + OH^2$

$3^2 = PH^2 + 1^2$

$8 = PH^2 \Rightarrow \sqrt{8} = PH$

$2\sqrt{2} = PH$

Luego:

$\text{tg } \theta = \frac{PH}{OH} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \text{tg } \theta = 2\sqrt{2}$

Rpta.

Ejercicio 2 Siendo $\sec \alpha = 16$ ($\alpha \in Q_1$), Calcular "sen α ".

Resolución:

Rpta. $\text{sen } \alpha = 4/5$

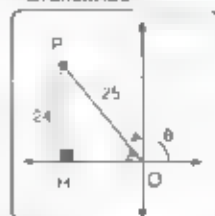
Ejercicio 3. Siendo $\sin \theta = 0,96$, ($\theta \in Q_2$)
Calcular $E = \sec \theta - \operatorname{tg} \theta$

Resolución.

• De la condición: $\sin \theta = 0,96 = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

$$\sin \theta = \frac{24}{25} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

• Graficando



• Por el teorema de Pitágoras

$$OP^2 = PH^2 + OH^2$$

$$25^2 = 24^2 + OH^2$$

$$\therefore 7 = OH$$

Luego

$$E = \sec \theta - \operatorname{tg} \theta$$

$$E = \frac{OP}{OH} - \frac{PH}{OH} = \frac{25}{7} - \frac{24}{7} \Rightarrow E = \frac{1}{7}$$

Rpta.

Rpta. | $M = 7/5$

TALLER DE EJERCICIOS N° 11

Ejercicio 1 Hallar el equivalente de $\sin 1470^\circ$

Resolución:

• En primer lugar realizamos la siguiente operación

$$\begin{array}{r} 1470^\circ \\ 1440^\circ \\ \hline 30^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} | 360^\circ \\ 4 \end{array} \Rightarrow 1470^\circ = 4 \times 360^\circ + 30^\circ$$

4 vueltas

$$\text{Luego: } \sin 1470^\circ = \sin (4 \times 360^\circ + 30^\circ)$$

4 vueltas *30°*

$$\therefore \sin 1470^\circ = \sin 30^\circ = 1/2 \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Hallar el equivalente de $\operatorname{tg} 2580^\circ$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \operatorname{tg} 2580^\circ = \sqrt{3}$$

Ejercicio 3 Hallar el equivalente de $\operatorname{cosec} 3256^\circ$

Resolución:

Ejercicio 4 Hallar el equivalente de $\operatorname{ctg} 4365^\circ$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{cosec} 3256^\circ = 25/7$

Rpta. $\operatorname{ctg} 4365^\circ = 1$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD TIPO I.B.M.

Ejercicio 1 Si el punto $P (12, 5)$, pertenecen al lado final del ángulo en posición normal " θ " ($\theta \in Q_2$). Hallar " $\cos \theta$ "

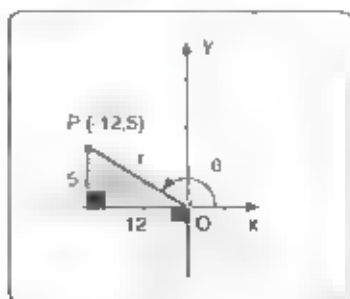
A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{5}{12}$

C) $-\frac{12}{5}$

D) $-\frac{13}{12}$

E) $\frac{13}{5}$

Resolución:



Ubicamos el punto $P (12, 5)$ en el plano cartesiano, veamos la figura

Por el teorema de Pitágoras, calculamos " r "

$$r^2 = (5)^2 + (-12)^2$$

$$r^2 = 25 + 144 = 169$$

$$r = \sqrt{169} \Rightarrow r = 13$$

Luego $\cos \theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{12}{13}$

$\therefore \cos \theta = \frac{12}{13}$

Rpta. A

Ejercicio 2 Si el punto P (-24, 7), es un punto que pertenece al lado final del ángulo en posición normal θ . Calcular "cosec θ - cotg θ "

A) $\frac{1}{7}$

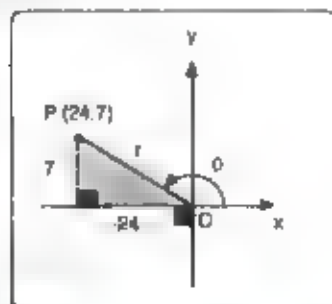
B) 7

C) $-\frac{1}{7}$

D) $-\frac{24}{7}$

E) $\frac{24}{7}$

Resolución:



Ubicamos el punto P (-24, 7), en el plano cartesiano, veamos

Por el teorema de Pitágoras, calculamos "r"

$$r^2 = (-24)^2 + (7)^2$$

$$r^2 = 576 + 49 = 625$$

$$r = \sqrt{625} \Rightarrow \therefore R = 25$$

Luego $\text{cosec } \theta = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{25}{7} \Rightarrow \text{cotg } \theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{-24}{7}$

Los valores hallados, lo reemplazamos en la expresión incógnita:

$$\text{cosec } \theta - \text{cotg } \theta = \frac{25}{7} - \frac{-24}{7} \Rightarrow \text{cosec } \theta - \text{cotg } \theta = \frac{25+24}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

$$\Rightarrow \text{cosec } \theta - \text{cotg } \theta = 7 \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 3 Si, $\text{cotg } \alpha = -\frac{3}{4}$ y cumpliéndose que $\alpha \in Q_4$, hallar el valor de "R = sen α + cos α "

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $-\frac{3}{5}$

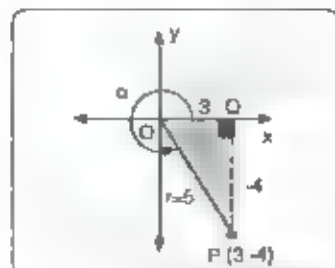
E) $-\frac{4}{5}$

Resolución:

Sabemos que:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{3}{4} = \frac{3}{-4}$$

Abscisa
Ordenada



Por el teorema de Pitágoras, calculamos OP

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2$$

$$OP^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$OP = \sqrt{25} \Rightarrow OP = 5$$

Luego $R = \sin \alpha + \cos \alpha$

$$R = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} + \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}}$$

$$R = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow R = \frac{7}{5}$$

Rpta. B

Ejercicio 4 Si el punto P (3, 4) es un punto que pertenece al lado final del ángulo "θ" en posición normal. Calcular $R = \sqrt{\sin \theta - \cos \theta} \cdot \lg \theta$

A) 3/4

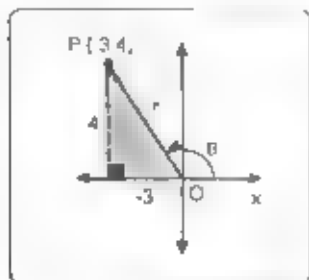
B) 4/5

C) 3/5

D) - 3/5

E) N.A

Resolución.



Ubicamos el punto P (3, 4) en el plano cartesiano, veamos

Por el teorema de Pitágoras calculamos "r"

$$r^2 = 4^2 + (-3)^2$$

$$r^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$$

$$\text{Luego } \sin \theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \quad \lg \theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Reemplazamos los valores hallados en la expresión "R"

$$R = \sqrt{\sin \theta - \cos \theta} \cdot \lg \theta \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{16}{5}} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{15}$$

Rpta. B

Ejercicio 5 Siendo $5 \cos^2 \alpha - 13 \cos \alpha + 6 = 0$ ($\alpha \in Q_1$) Calcular el valor de $E = \sin \alpha \cdot \lg \alpha$

A) $\frac{5}{5}$

B) $-\frac{5}{6}$

C) $\frac{5}{6}$

D) $-\frac{3}{5}$

E) N.A.

Resolución.

De la expresión $5 \cos^2 \alpha - 13 \cos \alpha + 6 = 0$, Factorizamos por el método del Aspa



Donde $(3 \cos \alpha - 2)(2 \cos \alpha - 3) = 0$; Ahora cada factor lo igualamos a cero

1) $3 \cos \alpha - 2 = 0$

$$3 \cos \alpha = 2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

Como " α " $\in Q_1$, este valor para el $\cos \alpha$, sí cumple ya que el coseno en el Q_1 es positivo.

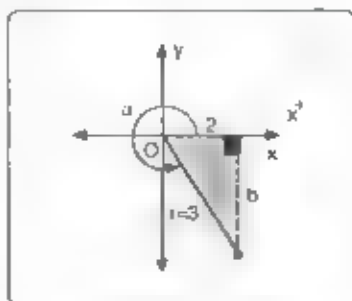
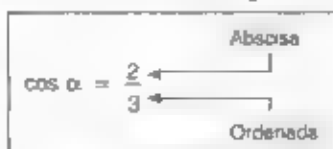
2) $2 \cos \alpha - 3 = 0$

$$2 \cos \alpha = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{2}$$

Es absurdo pues la descartamos ya que el valor de coseno tiene que ser menor que 1

Luego, graficamos el valor de: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ en el cuarto cuadrante, veamos

Sabemos que:



Por el teorema de Pitágoras, calculamos "b"

$$b^2 + 2^2 = 3^2$$

$$b^2 + 4 = 9 \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

Luego $\sin \alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\lg \alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Reemplazamos los valores hallados en la expresión "E"

$$E = \sin \alpha \lg \alpha$$

$$E = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{25}}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow \boxed{E = \frac{5}{6}} \text{ Rpta. C}$$

Ejercicio 6 De la figura calcular

$$E = \frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}$$

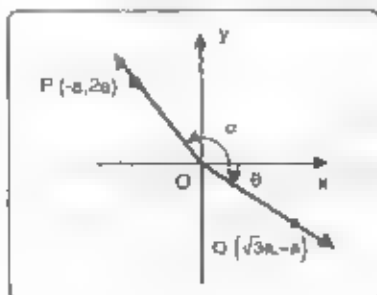
A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

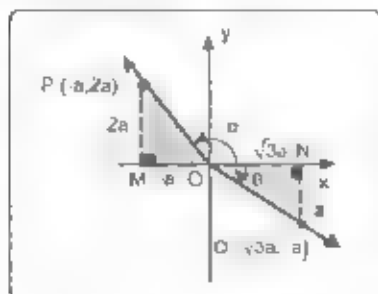
C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) N.A



Resolución.



- En el 2° cuadrante calculamos OP por medio del teorema de Pitágoras

$$OP^2 = PM^2 + MO^2$$

$$OP^2 = (2a)^2 + (-a)^2 = 4a^2 + a^2$$

$$OP^2 = 5a^2 \Rightarrow OP = \sqrt{5a^2}$$

$$OP = \sqrt{5} \sqrt{a^2} \Rightarrow OP = \sqrt{5}a$$

En el $\triangle OMP$ $\sin \alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos \alpha = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{-a}{\sqrt{5}a} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

En el 4° cuadrante calculamos OQ por medio del teorema de Pitágoras

$$OQ^2 = ON^2 + NQ^2$$

$$OQ^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (-a)^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow OQ = \sqrt{4a^2}$$

$$OQ = \sqrt{4} \sqrt{a^2} \Rightarrow OQ = 2a$$

Luego $\sin \theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$, $\cos \theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Reemplazamos los valores hallados en la expresión "E"

$$E = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \cdot \frac{3 \cos \alpha}{\sqrt{3} \cos \theta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}$$

$$E = \frac{\frac{5}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{4}} = \frac{-5}{2\sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{2(5)} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow E = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 7 Entre que valores debe estar "n" para que se cumpla que $\cos x = \frac{2n-1}{3}$

- A) $-1 \leq n \leq 1$ B) $1 < n \leq 2$ C) $1 \leq n \leq 2$ D) $0 \leq n \leq 2$ E) N.A.

Resolución.

Sabemos que " $\cos x$ " toma valores desde -1 hasta 1

Luego $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$-1 \leq \frac{2n-1}{3} \leq 1 \quad , \text{multiplicamos "x 3" a cada miembro}$$

$$-3 \leq 2n-1 \leq 3 \quad , \text{sumamos "1" a cada miembro}$$

$$-3+1 \leq 2n-1+1 \leq 3+1$$

$$-2 \leq 2n \leq 4 \quad ; \text{dividimos "2" a cada miembro}$$

$$\frac{-2}{2} \leq \frac{2n}{2} \leq \frac{4}{2} \Rightarrow \left[-1 \leq n \leq 2 \right] \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 6 Si " β " pertenece al Q_2 (segundo cuadrante), para que se pueda cumplir que $\sin \beta = \frac{2n+1}{3}$, los límites de " n " deben ser

A) $2 < n < 1$ B) $-\frac{1}{2} < n < 1$ C) $\frac{1}{2} \leq n \leq 1$ D) $-1 < n < \frac{1}{2}$ E) N.A.

Resolución.

Sabemos que " $\sin \beta$ " toma valores desde -1 hasta 1 pero como " β " está en el segundo cuadrante el " $\sin \beta$ " debe tomar valores desde 0 hasta 1 veamos:

$$0 \leq \sin \beta \leq 1$$

$$0 \leq \frac{2n+1}{3} \leq 1 \quad \text{multiplicamos "x 3" cada miembro}$$

$$0 \leq 2n+1 \leq 3 \quad ; \text{restamos "1" a cada miembro}$$

$$0-1 \leq 2n+1-1 \leq 3-1$$

$$-1 \leq 2n \leq 2 \quad , \text{dividimos "2" a cada miembro}$$

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{2n}{2} \leq \frac{2}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2} \leq n \leq 1 \right] \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 9 Hallar el signo del producto

I. $\sin 160^\circ \cos 200^\circ$

II. $\cos 260^\circ \sec 300^\circ$

III. $\lg 210^\circ \cotg 310^\circ$

A) (+) (+) (+)

B) (+) (+) (-)

C) (-) (-) (+)

D) (-) (-) (-)

E) (-) (+) (-)

Resolución.

Sabemos que

i) $\sin 160^\circ \Rightarrow$ seno en el 2º cuadrante es (+)

\downarrow
 \in al Q_2

ii) $\cos 200^\circ \Rightarrow$ coseno en el 3º cuadrante es (-)

\downarrow
 \in al Q_3

iii) $\cos 260^\circ \Rightarrow$ coseno en el 3º cuadrante es (-)

\downarrow
 \in al Q_3

iv) $\sec 300^\circ \Rightarrow$ secante en el 4º cuadrante es (+)

\downarrow
 \in al Q_4

v) $\lg 210^\circ \Rightarrow$ tangente en el 3º cuadrante es (+)

\downarrow
 \in al Q_3

vi) $\cotg 310^\circ \Rightarrow$ cotangente en el 4º cuadrante es (-)

\downarrow
 \in al Q_4

I. $\sin 160^\circ \cos 200^\circ = (+) (-) = (-)$

II. $\cos 260^\circ \sec 300^\circ = (-) (+) = (-)$

III. $\lg 210^\circ \cotg 310^\circ = (+) (-) = (-)$

Luego, los signos de cada producto son

$\{-, -, -\}$

Apta. D

Ejercicio 10 ¿Cuáles ángulos son coterminales?

I. $\frac{823}{3} \pi$ rad.

II. $\frac{775}{3} \pi$ rad.

III. $\frac{677}{3} \pi$ rad.

A) Ninguno

B) Todos

C) I y II

D) II y III

E) I y III

Resolución.

Dos ángulos serán coterminales cuando su diferencia sea de la forma: $2n \pi$ rad. siendo "n" un número entero.

De (I) y (II)

$$\frac{823 \pi}{3} - \frac{775 \pi}{3} = 2n \pi$$

$$\frac{823 \pi}{3} - \frac{775 \pi}{3} = 2n \pi \Rightarrow \frac{48 \pi}{3} = 2n$$

$$\frac{48}{6} = n \Rightarrow n = 8$$

• Como "n" ha resultado ser un número entero, esto quiere decir que I y II son coterminales

De (I) y (III)

$$\frac{823 \pi}{3} - \frac{677 \pi}{3} = 2n \pi$$

$$\frac{823 \pi}{3} - \frac{677 \pi}{3} = 2n \pi \Rightarrow \frac{146 \pi}{3} = 2n \pi$$

$$\frac{146}{6} = n \Rightarrow n = 24,3$$

Ejercicio 1. ¿Cuáles son cuadrantales?

I. $\frac{636 \pi}{8}$

II. $\frac{648 \pi}{8}$

III. $\frac{1\,827 \pi}{6}$

A) Todos

B) Ninguno

C) I y II

D) I y III

E) II y III

Resolución.

Para que dichos ángulos sean cuadrantales deben tomar la siguiente forma: $\frac{n \pi}{2}$ siendo "n" un número entero.

$$I. \quad \frac{n \pi}{2} = \frac{636 \pi}{8} \Rightarrow n = \frac{636}{4} \Rightarrow n = 159$$

• Como "n" ha resultado ser un número entero, quiere decir que $\frac{636 \pi}{8}$ sí es cuadrantal.

$$II. \quad \frac{n \pi}{2} = \frac{648 \pi}{8} \Rightarrow n = \frac{648}{4} \Rightarrow n = 162$$

• Como "n" ha resultado no ser un número entero, esto quiere decir que I y III, no son coterminales

De (II) y (III)

$$\frac{775 \pi}{3} - \frac{677 \pi}{3} = 2n \pi$$

$$\frac{775 \pi}{3} - \frac{677 \pi}{3} = 2n \pi \Rightarrow \frac{98 \pi}{3} = 2n \pi$$

$$\frac{98}{6} = n \Rightarrow n = 16,3$$

• Como "n" ha resultado no ser un número entero, esto quiere decir que II y III no son coterminales

Son coterminales I y II Rpta. C

• Como "n" ha resultado ser un número entero, quiere decir que $\frac{648 \pi}{8}$ sí es cuadrantal.

$$III. \quad \frac{n \pi}{2} = \frac{1\,827 \pi}{6} \Rightarrow n = \frac{1\,827}{3}$$

$$n = 609$$

Todos son cuadrantales Rpta. A

Ejercicio 12 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? Coloca una V dentro de los paréntesis? ¿Cuáles son falsas? coloca una F dentro de los paréntesis?

- A) En el Q_3 la tangente es negativa y la cosecante positiva ()
 B) En el Q_2 y Q_3 el coseno y la secante, son negativos ()
 C) En el Q_4 el seno es negativo y cotangente positivo ()
 D) En el Q_2 la cotangente y la secante son negativos ()

Resolución

- A) En el Q_3 la tangente es negativa y la cosecante positiva (F)
 Lo verdadero es que en el Q_3 la "tg" es positiva y la cosecante negativa
 B) En el Q_2 y Q_3 el coseno y la secante, son negativos (V)
 C) En el Q_4 el seno es negativo y cotangente positivo (F)
 Lo verdadero es que en el Q_4 el seno es negativo y cotangente negativo
 D) En el Q_2 la cotangente y la secante son negativos (V)



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD

NIVEL 1

Ejercicio 1 Si el punto P (1, 2) pertenece al lado final del ángulo en posición normal "θ" ($\theta \in Q_2$). Hallar $E = \sqrt{5} \sec \theta - \lg \theta$

- A) 1 B) 6 C) 7 D) 2 E) 3

Ejercicio 2 Si el punto Q ($\sqrt{3}$, 1) pertenece al lado final del ángulo en posición normal "α" ($\alpha \in Q_1$). Hallar $\sec \alpha \cdot \csc \alpha$

- A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$
 D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 3 Si $\sin \theta = 1/3$, $\theta \in Q_2$. Calcular "cotg θ - sec θ"

- A) $2\sqrt{2}$ B) -3 C) 3 D) $2\sqrt{2}$ E) $1/3$

Ejercicio 4 Siendo: $\lg \beta = 0,75$, $\beta \in Q_2$. Calcular: $K = \csc \beta + \cotg \beta$

- A) 1 B) -1 C) -3 D) $-1/3$ E) $1/3$

Ejercicio 5 Siendo P (-3, 1) un punto del lado final de "ángulo θ" en posición normal. Hallar el valor de

$$E = \cotg \theta + \csc^2 \theta - 3 \lg \theta$$

- A) 9 B) 8 C) 10 D) 12 E) 11

Ejercicio 6 Los cuadrantes en que el cos θ y lg θ tienen el mismo signo son:

- A) I y II B) I y III C) II y III
 D) I y IV E) I y IV

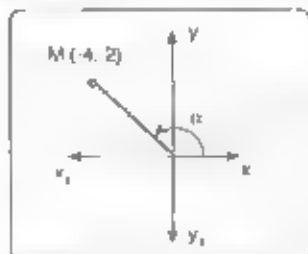
Ejercicio 7 Si $\alpha \in Q_2$, $\beta \in Q_3$ señala el signo

$$R = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sec \beta} \cdot \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

- A) (+) B) (-) C) (+) ó (-)
D) (+) y (-) E) no se precisa

Ejercicio 1 Del gráfico, Hallar " $\sec^2 \alpha + \operatorname{colog} \alpha$ "

- A) 3/4
B) 1/2
C) 3/4
D) 4/3
E) N.A



Ejercicio 2 Si se tiene: $\operatorname{cosec} \alpha = 2,6$, ($\alpha \in Q_2$) Determinar el valo. de $R = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$

- A) 1 B) -1 C) $\frac{60}{169}$ D) $\frac{169}{60}$ E) 2

NIVEL II

Ejercicio 3 Si el punto P (5, 2) es un punto que pertenece al lado final del ángulo en posición normal " α ". Calcular

$$E = \sqrt{29} \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$$

- A) $\frac{27}{5}$ B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{5}{27}$ D) $\frac{-23}{5}$ E) $\frac{21}{5}$

Ejercicio 4 Si el punto P (5, -3) es un punto que pertenece al lado final del ángulo " θ " en posición normal. Calcular

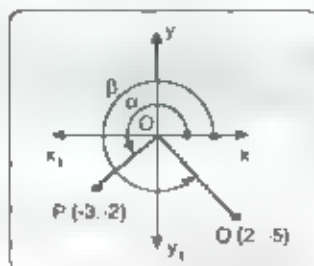
$$S = \sqrt{\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \theta}$$

- A) $\frac{3}{\sqrt{34}}$ B) $\frac{\sqrt{34}}{3}$ C) $\frac{5}{\sqrt{34}}$
D) $\frac{3}{\sqrt{34}}$ E) N.A

Ejercicio 5 Del gráfico, Hallar

$$\sqrt{29} \cos \beta - \sqrt{13} \cos \alpha$$

- A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 8



Clave de Respuestas

1. E	2. D	3. C	4. E	5. B
6. A	7. A	8. C	9. D	10. C

Ejercicio 6 Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{2}$, y cumpliéndose que: $\alpha \in Q_2$. Hallar el valor de:

$$R = (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2$$

- A) 13 B) 1/13 C) 2/13 D) 5/13 E) N.A

Ejercicio 7 Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{-15}{17}$ siendo " α " del

$$Q_4 \text{ Hallar } T = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha}{\sec \alpha \cdot \operatorname{colog} \alpha}$$

- A) $\frac{8}{17}$ B) $\frac{8}{17}$ C) $\frac{17}{15}$ D) $\frac{-5}{7}$ E) $\frac{-15}{17}$

Ejercicio 8 Si $\theta \in Q_2$ y $\alpha \in Q_4$ tal que

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ y } \operatorname{Tg} \alpha = \frac{4}{3} \text{ Hallar el valor de:}$$

$$K = \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \alpha + \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

- A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{24}{25}$ C) $\frac{2}{25}$ D) $\frac{4}{25}$ E) N.A.

Ejercicio 10: Sabiendo que $\sin \alpha = -0,8$, $\alpha \in Q_3$, Evaluar

$$K = 32 \cotg \alpha + 50 \cos \alpha$$

- A) 16 B) -10 C) -6 D) -8 E) N.A

Ejercicio 11: Si $\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{5}} + 13 \cos \beta} = 1$

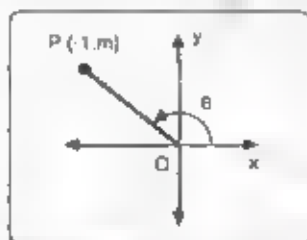
Hallar $M = \sec \beta - \lg \beta$ $\beta \in IV Q$

- A) 1/5 B) 5 C) -1/5 D) -5 E) 1

Ejercicio 12: En la figura mostrada. Hallar el

valor de $R = \left(\sqrt{m^2 + 1} \right) \cos \theta - \left(\frac{\sqrt{m^2 + 1}}{m} \right) \sin \theta$

- A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2



Ejercicio 13: Siendo

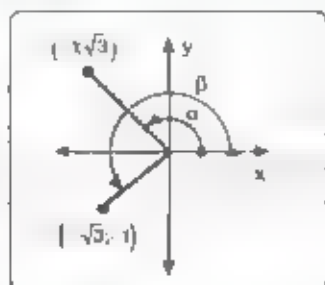
$$4 \sin^2 \alpha - 13 \sin \alpha + 3 = 0, (\alpha \in Q_2)$$

Calcular el valor de $M = \frac{1}{15} \cotg \alpha \cos \alpha$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Ejercicio 14: De la figura. Calcular el valor de " $\sin \alpha \lg \beta$ "

- A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{4}$
C) 2
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{2}{3}$



Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. B	4. E	5. B
6. A	7. B	8. A	9. C	10. A

NIVEL III

Ejercicio 15: Dado $\lg \phi < 0$ y $\sqrt{\sin \phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Calcular $E = \operatorname{cosec} \phi - \sqrt{3} \cotg \phi$

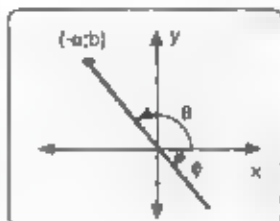
- A) -1 B) 5 C) 1 D) 2 E) 3

Ejercicio 16: Dado la expresión. $5^{9 \sin \theta} = 125$
con $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ Calcular $E = \sec \theta - \operatorname{cosec} \theta$

- A) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $-\sqrt{5}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Ejercicio 17: De la figura mostrada; Hallar $\sin \theta \sin \phi$

- A) $\frac{a^2}{a^2 + b^2}$
B) $\frac{b^2}{a^2 + b^2}$



- C) $\frac{b^2}{a^2 + b^2}$ D) $\frac{b^2}{a^2 - b^2}$ E) N.A.

Ejercicio 1. Dado la expresión.

$$3\sqrt[3]{\sec^{12} \alpha} = (\sec \alpha)^{\cos \alpha}$$

Si $\alpha \in Q_2$. Calcular $R = \lg \alpha + \sec \alpha$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 2

Ejercicio 2. Hallar el signo de cada producto

I. $\sin 190^\circ \cos 290^\circ$ II $\lg 160^\circ \sec 200^\circ$

III. $\cos 120^\circ \sec 200^\circ$

A) (-) (+) (+) B) (-) (-) (+) C) (+) (+) (+)

D) (-) (+) (-) E) (-) (-) (-)

Ejercicio 3. Determinar los límites de "K" para que se cumpla la siguiente igualdad

$$4 \sin \alpha + 5 = 2K$$

A) $K \in \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right]$ B) $K \in \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right)$ C) $K \in \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right)$

D) $K \in \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right]$ E) N.A.

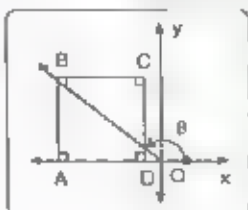
Ejercicio 4. Sabiendo que " α " es del Q_2 y que $4 \cos \alpha + 3 = 5K$. ¿Cuáles son los límites de "K"?

A) $K \in \left[\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right]$ B) $K \in \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right)$

C) $K \in \left[\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right)$ D) $K \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right]$ E) N.A.

Ejercicio 5. SE C (-2; 3) Calcular $\lg 8^\circ$, siendo ABCD un cuadrado

- A) 1/5 B) 2/5
C) 5/2 D) 5/3
E) 3/5



Ejercicio 6. ¿Cuáles son ángulos coterminales?

- I. $\frac{65\pi}{4}$ rad II. $\frac{25\pi}{4}$ rad III. $\frac{105\pi}{4}$ rad

- A) I y II B) I y III C) II y III
D) todos E) Ninguno

Ejercicio 7. ¿Cuáles de los ángulos son cuadrantales?

- I. $\frac{47\pi}{8}$ rad II. $\frac{133\pi}{8}$ rad III. $\frac{153\pi}{8}$ rad

- A) I y I B) I y II C) II y III
D) todos E) ninguno

Ejercicio 8. ¿Cuál es incorrecto?

- A) $372^\circ \in Q_1$ B) $9\pi/7$ rad $\in Q_3$ C) $250^\circ \in Q_2$
D) $-666^\circ \in Q_1$ E) $17\pi/10$ rad. $\in Q_3$

Ejercicio 9. ¿Cuáles de los ángulos son cuadrantales?

- I. $\frac{38\pi}{4}$ rad II. 1360° III. $\frac{42\pi}{4}$ rad.

- A) Ninguno B) todos C) I y III
D) II y III E) I y II

Ejercicio 10. ¿Cuáles de los ángulos son coterminales?

- I. $\frac{80\pi}{7}$ rad II. $\frac{45\pi}{7}$ rad III. $\frac{59\pi}{7}$ rad

- A) todos B) II y III C) Ninguno
D) I y II E) I y II

Clave de Respuestas

1. B	2. D	3. B	4. B	5. D
6. A	7. B	8. E	9. D	10. D
11. E	12. C	13. B		

Capítulo

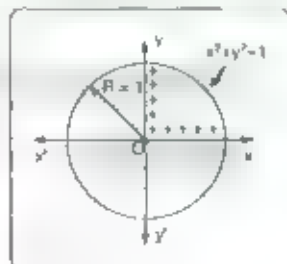
6

ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

6.1 ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

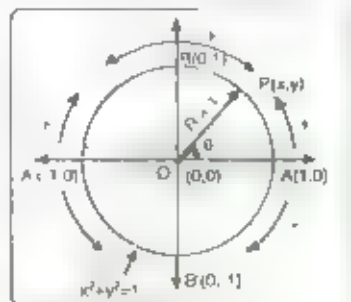
6.1.1 CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA Es una circunferencia inscrita en un sistema de coordenadas rectangulares cuyo centro coincide con el origen de dicho sistema, esta circunferencia tiene como característica fundamental, el valor del radio que es la UNIDAD ($R = 1$). Esta circunferencia trigonométrica sirve para representar a las líneas trigonométricas.

Nota: La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es la expresión algebraica de la circunferencia de $R = 1$, centro $O(0,0)$.



6.1.2 ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA Se tiene los siguientes elementos

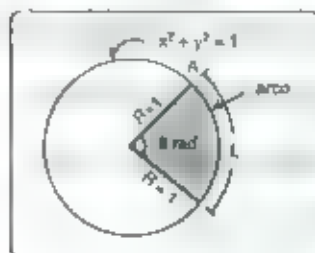
- $O(0,0)$ Origen de la circunferencia.
- $A(1,0)$ Origen de Arcos a partir del cual se miden los ángulos trigonométricos es decir ángulos positivos, negativos y de cualquier magnitud.
- $B(0,1)$ Origen de complementos
- $A'(-1,0)$ Origen de suplementos
- $B'(0,-1)$ Sin denominación específica
- $P(x,y)$ Punto "P" de coordenadas (x,y)



6.1.3 PROPIEDADES CONVENCIONALES

- Radio de la circunferencia igual a la UNIDAD
- Cuatro cuadrantes numerados, cada uno de los cuales mide 90° , 100° g ó $\pi/2$ rad.
- Se adoptan los signos de los ejes coordenados o sea los segmentos OA y OB son positivos y OA' y OB' son negativos.

Características de la Circunferencia Trigonométrica.



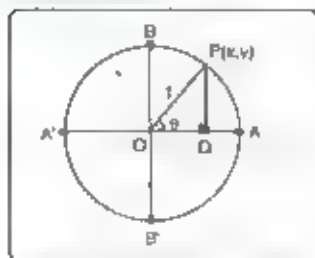
Por fórmula: $\theta = \frac{L}{R}$; $R=1$

$$\theta = \frac{L}{1} \Rightarrow \Delta \theta = L \quad (\text{Sólo se cumple numéricamente})$$

"Es decir que el número de radianes del ángulo central es igual a la longitud de arco pero sólo como arco numérico"

$\lg 45^\circ$	=	$\lg \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$	=	$\lg \frac{\pi}{4}$	=	$\lg 0,7854 \approx 1$
Angulo en grados Sexagesimales		Angulo en Radianes		Arco Numérico		Número Real (R)

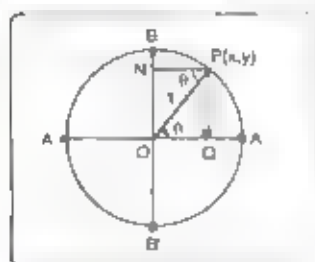
6.1.4 Líneas Trigonométricas.

- Línea Seno**Representación:**

Se representa por la perpendicular trazada desde el extremo del arco, hacia el diámetro horizontal

- En el $\triangle OQP$ $\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin \theta = y$

De la figura: $\sin \widehat{AP} = \sin \theta = PQ = y$

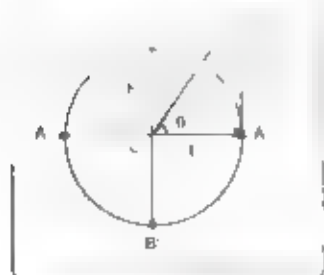
- Línea Coseno**Representación:**

Se representa por la perpendicular trazada desde el extremo del arco, hacia el diámetro vertical;

- En el $\triangle PNO$ $\cos \theta = \frac{NP}{OP} = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos \theta = x$

De la figura: $\cos \widehat{AP} = \cos \theta = NP = x$

- Línea Tangente



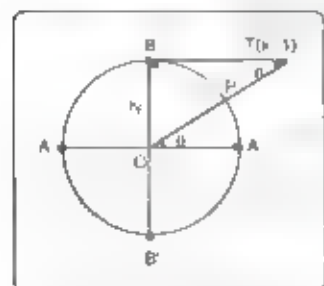
Definición:

Una línea tangente a una circunferencia es una línea recta que toca a la circunferencia en un solo punto. Se empieza a medir de este punto y termina en la intersección de la tangente geométrica con el radio prolongado que pasa por el extremo del arco.

En el $\triangle OAP$: $\tan \theta = \frac{AP}{OA} = \frac{y}{1} \Rightarrow \tan \theta = y$

De la figura: $\widehat{AP} = \tan \theta = AP = y$

- Línea Cotangente



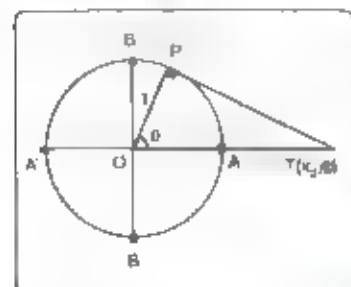
Representación:

Es una parte de la tangente que pasa por el origen de complementos B(0 1), se empieza a medir a partir de ese origen y termina en la intersección de la tangente mencionado con radio prolongado que pasa por el extremo del arco.

En el $\triangle OBP$: $\cot \theta = \frac{BP}{OB} = \frac{x}{1} \Rightarrow \cot \theta = x$

De la figura: $\widehat{BP} = \cot \theta = BP = x$

- Línea Secante



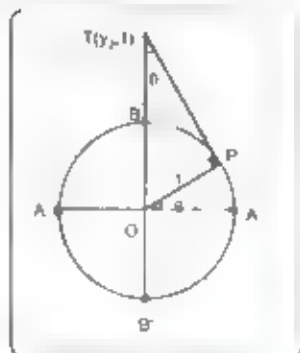
Representación:

Es una parte del diámetro prolongado que pasa por el origen del arco, se empieza a medir del centro de la circunferencia y termina en la intersección del diámetro prolongado con la tangente geométrica trazada por el extremo del arco.

En el $\triangle OAP$: $\sec \theta = \frac{OP}{OA} = \frac{\sec \theta}{1} \Rightarrow \sec \theta = x$

De la figura: $\widehat{AP} = \sec \theta = OP = x$

- Línea Cosecante



Representación.

Es una parte del diámetro prolongado que pasa por el origen de complementos. Se empieza a medir en el centro de la circunferencia y termina en la intersección del diámetro prolongado con la tangente geométrica trazada por el extremo del arco.

- En el $\triangle OPT$ $\operatorname{cosec} \theta = \frac{OT}{OP} = \frac{y_2}{1} \Rightarrow \operatorname{cosec} \theta = y_2$

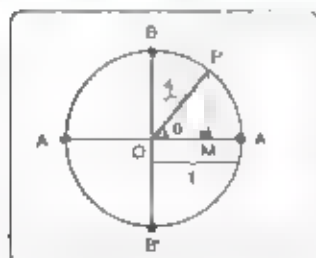
De la figura $\operatorname{cosec} \widehat{AP} = \operatorname{cosec} \theta = OT = y_2$

Otras Líneas Auxiliares en la Circunferencia Trigonométrica

- Línea Seno Verso o Verso (Vers)

Es lo que le falta al coseno de un arco para valer a unidad.

Es verso se empieza a medir a partir del origen de versos que viene a ser el origen de arcos $A(1,0)$, y termina en el pie de la perpendicular trazada desde el extremo de arco al diámetro horizontal. El verso es siempre positivo.



Por definición: $\operatorname{Vers} \theta = 1 - \cos \theta$ (I)

De la figura: $\operatorname{Vers} \theta = MA$

- En el $\triangle OMP$ $\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1}$

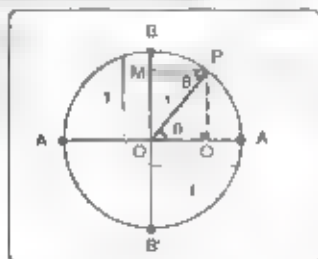
$\cos \theta = OM$ (II)

Reemplazamos (II) en (I): $\operatorname{Vers} \theta = 1 - OM \Rightarrow \operatorname{Vers} \theta = MA$

- Línea Coseno Verso o Coverno (Cov):

Es lo que le falta al seno de un arco para valer la unidad.

El covernos se empieza a medir en el origen de covernos que viene a ser el origen de complementos $B(0,1)$, y termina en el pie de la perpendicular trazada desde el extremo de arco al diámetro vertical de la circunferencia trigonométrica. El covernos es siempre positivo.



Por definición: $\cos \theta = 1 - \sin \theta$ (I)

De la figura: $\cos \theta = BM$

En el $\triangle OMP$: $\sin \theta = \frac{MO}{OP} = \frac{MO}{1}$
 $\sin \theta = MO$ (II)

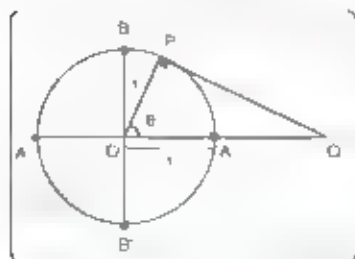
Reemplazamos (II) en (I): $\cos \theta = 1 - MO \Rightarrow \cos \theta = BM$

- Línea Ex-Secante o Externa (Ex-Sec):

Es el exceso de la secante respecto a la unidad.

La exsecante se mide a partir del origen de exsecantes que viene a ser el origen de arcos y termina en el punto donde termina la secante de ese arco.

Si la secante se mide hacia la derecha del origen de exsecantes es positiva y en caso contrario es negativa.



Por definición: $\text{ex-sec } \theta = \sec \theta - 1$ (I)

De la figura: $\text{ex sec } \theta = \overline{AQ}$

En el $\triangle OPQ$: $\sec \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1}$
 $\sec \theta = OQ$ (II)

Reemplazamos (II) en (I): $\text{ex-sec } \theta = OQ - 1 \Rightarrow \text{ex sec } \theta = AQ$

Nota: Para la resolución de los problemas de este capítulo hay que tener presente los siguientes conceptos:

Circunferencia: Línea curva cerrada cuyos puntos están todos a igual distancia de un punto interior llamado centro.

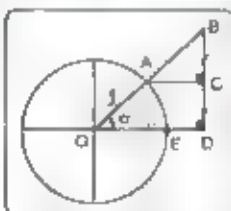
Círculo: Superficie comprendida dentro de la circunferencia.





TALLER DE EJERCICIOS Nº 12

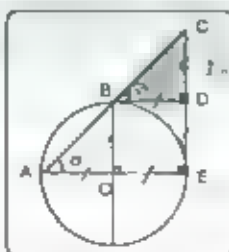
Ejercicio 1 En la circunferencia trigonométrica $BC = CD$. Hallar ED .



Resolución:

Rpta. $\{ \overline{ED} = 2 \cos \alpha - 1 \}$

Ejercicio 2 Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

Rpta. $\{ \text{Área } \triangle BDC = \left(\tan \alpha - \frac{1}{2} \right) u^2 \}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA TIPO I.B.M.

Ejercicio 1 En la circunferencia trigonométrica (C.T.), $QC = 3/4$, Hallar OD .

A) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

B) $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

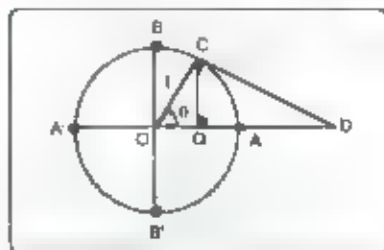
D) 3

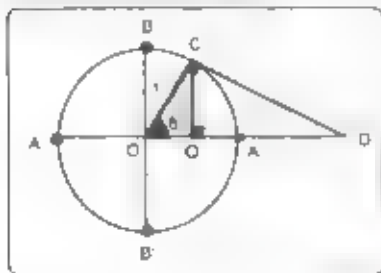
E) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Resolución:

En el $\triangle OQC$: $\sin \theta = \frac{QC}{OC} = \frac{3/4}{1} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\sin \theta = \frac{3}{4}$ (Este valor lo llevamos a un \triangle vemos.)





$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{3}{4} \leftarrow \text{Cateto Opuesto} \\ &\quad 4 \leftarrow \text{Hipotenusa} \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras.

$$x^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + 9 = 16$$

$$x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

Luego $\sec \theta = \frac{4}{x} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

$$\sec \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7} \quad (I)$$

- En el $\triangle OCD$: $\sec \theta = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1}$

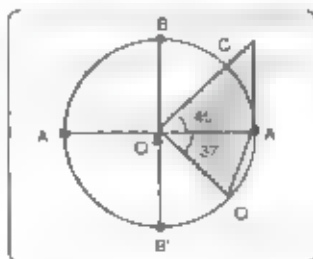
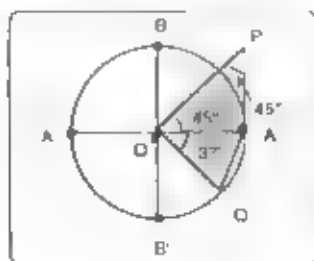
$$\sec \theta = OD \quad (II)$$

Iguando las expresiones (I) y (II) obtenemos que $\frac{4\sqrt{7}}{7} = OD \Rightarrow OD = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ Rpta. B

Ejercicio 2 Hallar el área sombreada en el círculo trigonométrico mostrado

- A) 0,4 B) 0,5 C) 0,6
D) 0,7 E) 0,8

Resolución.



- Por definición de circunferencia trigonométrica

$$OA = 1 \text{ y } OQ = 1$$

Como el $\triangle OAP$ es isósceles $OA = AP = 1$

$$\text{Luego } 1) \text{ Area } \triangle OAP = \frac{OA \times AP}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1) \text{ Area } \triangle OQA = \left(\frac{OQ \times OA}{2} \right) \text{ sen } 37^\circ \Rightarrow \text{Area } \triangle OQA = \frac{1 \times 1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

Ahora, calculamos el área sombreada

$$\text{Área sombreada} = \text{Área } \triangle OAP + \text{Área } \triangle OQA = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$$

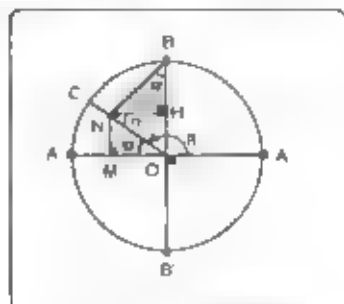
$$\text{Área sombreada} = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

Rpta. E

Ejercicio 19 En la circunferencia trigonométrica. Hallar MN.

- A) $\sin \theta$ B) $2 \sin \theta$ C) $\sin^2 \theta$
 D) $1 + \sin \theta$ E) $1 - \sin \theta$

Resolución:



Igualemos (I) y (II):

$$\overline{MN} \cotg \alpha = \overline{BH} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BH} \operatorname{tg} \alpha}{\cotg \alpha} \quad (II)$$

Reemplazamos (IV) en (III): $\overline{MN} = \frac{(1 - \overline{MN}) \operatorname{tg} \alpha}{\cotg \alpha} \Rightarrow \overline{MN} (\cotg \alpha + \operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

$$\overline{MN} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \overline{MN} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\overline{MN} \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \overline{MN} = \sin^2 \alpha \quad (V)$$

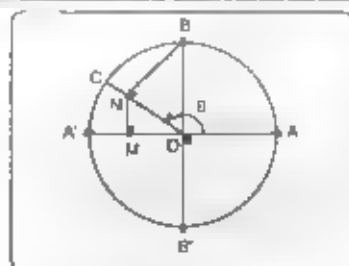
De la figura: $\theta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = (180^\circ - \theta)$

En esta última expresión tomamos la función "Sen" a ambos miembros

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \theta) \Rightarrow \sin \alpha = \sin \theta \quad (VI)$$

Reemplazamos (VI) en (V), obteniendo:

$$\overline{MN} = \sin^2 \theta \quad \text{Rpta. C}$$



• Sabemos que $OB = 1$

*) En el $\triangle NMO$: $\cotg \alpha = \frac{\overline{MO}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{NH}}{\overline{MN}}$

$$\overline{MN} \cotg \alpha = \overline{NH} \quad (I)$$

**) En el $\triangle NBH$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{NH}}{\overline{BH}}$

$$\overline{BH} \operatorname{tg} \alpha = \overline{NH} \quad (II)$$

• De la figura:

$$\overline{BH} = \overline{BO} - \overline{OH} \Rightarrow \overline{BH} = 1 - \overline{MN} \quad (IV)$$

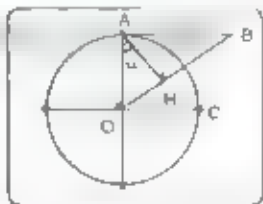


EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

NIVEL 1

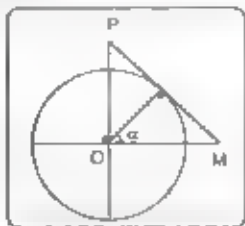
Ejercicio 1 En la circunferencia trigonométrica. Hallar BH.

- A) $\sin \alpha \cdot \cotg \alpha$
- B) $\cos \alpha \cdot \tg \alpha$
- C) $\cos \alpha \cdot \cotg \alpha$
- D) $\sin \alpha \cdot \tg \alpha$
- E) $\sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$



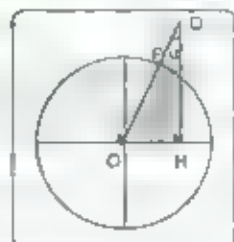
Ejercicio 2 Indicar verdadero o falso en la C.T.

- I) $\overline{MN} = \tg \alpha$
 - II) $\overline{OM} = \sec \alpha$
 - III) $\overline{OP} = \operatorname{cosec} \alpha$
- A) VVF B) VVV
C) FFF D) VFV
E) FFV



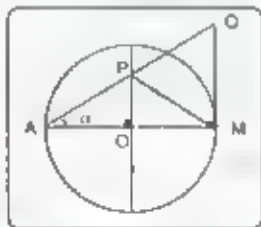
Ejercicio 3 En el círculo trigonométrico. Hallar el área de la región sombreada. ($OP = PQ$)

- A) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- B) $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- C) $4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- D) $\tg \alpha \cdot \sin \alpha$
- E) $\cotg \alpha \cdot \cos \alpha$



Ejercicio 4 Indicar verdadero o falso en la C.T.

- I) $\overline{PQ} = \sec \alpha$
 - II) $\overline{PO} = \tg \alpha$
 - III) $\overline{MO} = 2 \tg \alpha$
- A) VVF B) VVV
C) FFF D) FVV
E) VFV



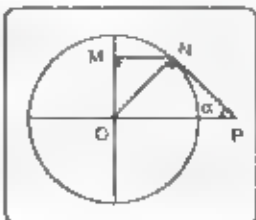
Clave de Respuestas

1. C 2. B 3. B 4. B

NIVEL 2

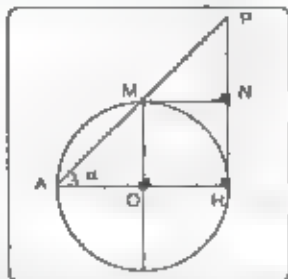
Ejercicio 1 En la circunferencia trigonométrica. Hallar HP.

- A) $\operatorname{cosec} \alpha \cdot \cotg \alpha$
- B) $\cos \alpha \cdot \tg \alpha$
- C) $\sin \alpha \cdot \cotg \alpha$
- D) $\cos \alpha \cdot \cotg \alpha$
- E) $\sec \alpha \cdot \tg \alpha$



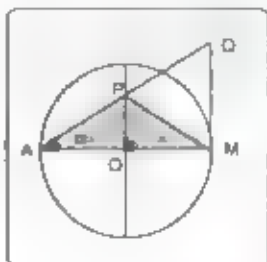
Ejercicio 2 En la circunferencia trigonométrica. Hallar PN.

- A) $\cotg \alpha - 1$
- B) $\tg \alpha$
- C) $\cotg \alpha + 1$
- D) $\tg \alpha + 1$
- E) $1 - \tg \alpha$

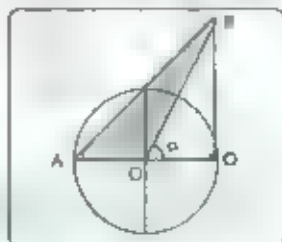


Ejercicio 3 En el círculo trigonométrico. Hallar el área de la región sombreada.

- A) $(\sec \alpha) u^2$
 B) $(\lg \alpha) u^2$
 C) $(\lg^2 \alpha) u^2$
 D) $(\operatorname{cosec} \alpha) u^2$
 E) $(\sec^2 \alpha) u^2$



- A) $(\lg \alpha) u^2$
 B) $(\operatorname{cotg} \alpha) u^2$
 C) $(1/2 \lg \alpha) u^2$
 D) $(\operatorname{cosec} \alpha) u^2$
 E) $(1/2 \sec \alpha) u^2$



Clave de Respuestas

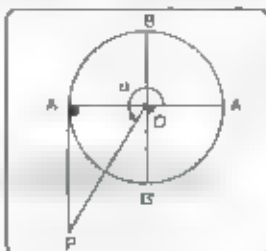
1 D | 2 B | 3 B | 4 C

Ejercicio 1. En el círculo trigonométrico. Hallar el área de la región sombreada.

NIVEL III

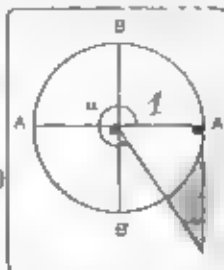
Ejercicio 1. En la circunferencia trigonométrica, Halle $\lg \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$. Si $A'P = 2x + 1$ y $OP = 4x + 1$

- A) $4/3$
 B) $13/12$
 C) $25/12$
 D) $12/13$
 E) $25/3$

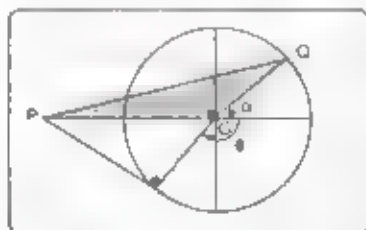


Ejercicio 2. En el siguiente C T Hallar el área sombreada ($\alpha \Rightarrow$ radianes)

- A) $0,5 (\alpha + \lg \alpha - 2\pi)$
 B) $0,5 (\alpha + \operatorname{cotg} \alpha - 2\pi)$
 C) $0,5 (\alpha + \lg \alpha + \pi)$
 D) $0,5 (\alpha + \operatorname{cotg} \alpha + 2\pi)$
 E) $0,5 (\alpha - \lg \alpha - 2\pi)$



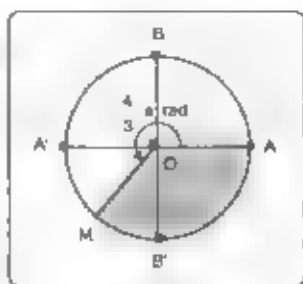
Ejercicio 3. En el círculo trigonométrico adjunto; determinar el área del ΔPOQ .



- A) $-0,5 \sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$ B) $-0,5 \sin \alpha \cdot \sec \alpha$
 C) $0,5 \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$ D) $0,5 \sin \alpha \cdot \sec \alpha$
 E) $0,5 \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$

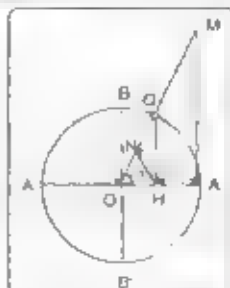
Ejercicio 4. Con ayuda del siguiente C T Hallar el área de la región sombreada.

- A) $\frac{\pi}{3} u^2$
 B) $\frac{\pi}{6} u^2$
 C) $\frac{2\pi}{3} u^2$
 D) $5\pi u^2$
 E) $\frac{\pi}{2} u^2$



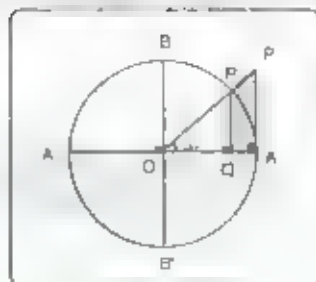
Ejercicio 5. Indicar en la circunferencia trigonométrica. La expresión falsa

- A) $OM = \sec \alpha$
 B) $OH = \cos^2 \alpha$
 C) $NO = \sec^2 \alpha$
 D) $NH = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
 E) $AH = \operatorname{cosec} \alpha$



Ejercicio Hallar el área de la región sombreada en el CT

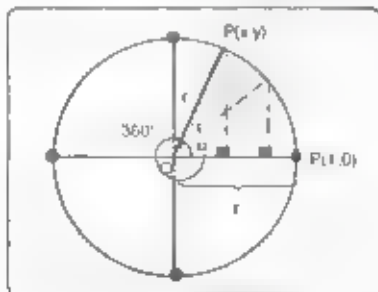
- A) $\frac{17}{100} u^2$
 B) $\frac{17}{200} u^2$
 C) $\frac{27}{100} u^2$
 D) $\frac{27}{200} u^2$
 E) $\frac{21}{200} u^2$



Clave de Respuestas

1. C | 2. E | 3. B | 4. A | 5. E | 6. D

6.5 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 0° Y 360°



- Sea "α" un ángulo en posición normal si este ángulo disminuye de valor hasta reducirse a 0°

Entonces el lado final coincide con el lado inicial donde el punto P(x,y), se convierte en P(1,0)

O sea $P(x,y) = P(1,0)$

Donde $x=1$ (abscisa) ; $y=0$ (ordenada)

α Nos indica que "α" va disminuyendo su valor hasta que tome valor 0°

En consecuencia:

$\alpha = 0^\circ$

$x = 1 \Rightarrow$ Abscisa

$y = 0 \Rightarrow$ Ordenada

$r = 1 \Rightarrow$ Radio Vector

Según la figura los ángulos de 0° y 360° son coterminales por tener el mismo lado inicial y final.

Luego

$\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

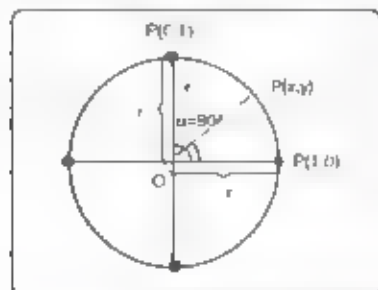
$\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$\operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{tg} 360^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 0^\circ = \cot 360^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = (\text{No definido})$

$\sec 0^\circ = \sec 360^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$

$\csc 0^\circ = \csc 360^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = (\text{No definido})$

6.1.6 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 90° 

Luego:

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \text{ (No definido)}$$

Si el ángulo " α " en posición normal, crece de 0° a 90° el radio vector que se encuentra en el semieje " x " positivo coincide con el semieje positivo " y " entonces las coordenadas del punto $P(1,0)$ se convierten en $P(0,1)$, es decir la abscisa " x " se reduce a cero la coordenada " y " es positiva e igual a 1 y el radio vector " r " es igual a 1

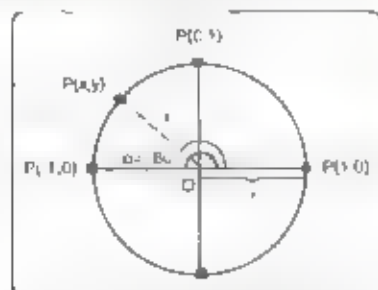
$$\alpha = 90^\circ$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{Abscisa} \\ y = 1 \Rightarrow \text{Ordenada} \\ r = 1 \Rightarrow \text{Radio Vector} \end{cases}$$

$$\cot 90^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{ (No definido)}$$

$$\csc 90^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

6.1.7 Razones Trigonómicas de 180° 

Luego:

$$\operatorname{sen} 180^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

Si el ángulo " α " en posición normal crece de 90° a 180° , el radio ubicado en el semieje positivo " y " coincide con el semieje negativo " x " entonces las coordenadas del punto $P(0,1)$ se convierten en $P(-1,0)$ es decir la abscisa " x " es negativa e igual a -1 la coordenada " y " se reduce a cero y el radio vector $r = 1$, en consecuencia:

$$\alpha = 180^\circ$$

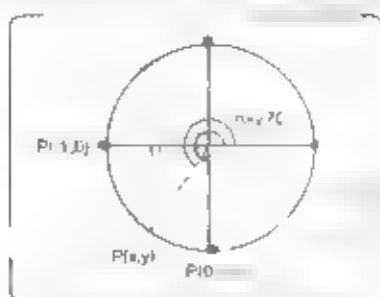
$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow \text{Abscisa} \\ y = 0 \Rightarrow \text{Ordenada} \\ r = 1 \Rightarrow \text{Radio Vector} \end{cases}$$

$$\cot 180^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} \text{ (No defn.)}$$

$$\sec 180^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\csc 180^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \text{ (No defn.)}$$

6.1.8 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 270°



Luego

$$\sin 270^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio vector}} = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tg} 270^\circ = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = (\text{No defin.})$$

Si el ángulo " α " en posición normal, crece de 180° a 270° el radio vector ubicado en el semieje negativo " x " coincide con el semieje negativo " y ". Entonces el punto $P(-1,0)$, se convierte en $P(0, -1)$, es decir la abscisa se reduce a cero la ordenada " y " es negativa e igual a -1 y el radio vector $r = 1$.

En consecuencia $\alpha = 270^\circ$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{Abscisa} \\ y = -1 \Rightarrow \text{Ordenada} \\ r = 1 \Rightarrow \text{Radio Vector} \end{cases}$$

$$\cot 270^\circ = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec 270^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = (\text{No defin.})$$

$$\csc 270^\circ = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

CUADRO RESUMEN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS 0° , 90° , 180° , 270° Y 360°

Ángulo R.T.	0°	$90^\circ \text{ o } \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$	$180^\circ \text{ o } \pi \text{ rad.}$	$270^\circ \text{ o } \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$	$360^\circ \text{ o } 2\pi \text{ rad.}$
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tg	0	∞	0	∞	0
Co tg	∞	0	∞	0	∞
Sec	1	∞	-1	∞	1
Cosec	∞	1	∞	-1	∞

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 Hallar el valor de

$$E = \frac{4 (\operatorname{cosec} 270^\circ - \cos 0^\circ)}{\sec 180^\circ} = 7$$

Resolución:

Reemplazando valores, obtenemos

$$E = \frac{4 \{ (-1) - (1) \}}{(-1) - 7} = \frac{4 \{ -2 \}}{-8} = \frac{8}{8} = 1$$

Ejercicio 2 Hallar el valor de

$$M = \frac{3 (\sin 270^\circ - 1)^2}{\sec 0^\circ + \cos 360^\circ}$$

Resolución:

Reemplazando valores obtenemos

$$M = \frac{3 \cdot (-1 - 1)^2}{(1) + (1)} = \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} = \frac{3 \cdot (4)}{2} = 6$$



Ejercicio 3 Hallar el valor de

$$R = \frac{\sec^2 180^\circ + 5}{\cos 360^\circ - \cos 180^\circ}$$

Resolución:

Reemplazando valores obtenemos

$$R = \frac{(-1)^2 + 5}{(1) - (-1)} = \frac{(-1) + 5}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejercicio 4 Hallar el valor de

$$Q = \frac{6 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} + 2 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2}}{4 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2}}$$

Resolución:

Reemplazando valores obtenemos

$$Q = \frac{6 (1) + 3 (-1) + 2 (1)}{4 (0) (-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

TALLER DE
EJERCICIOS Nº 13

Ejercicio 1 Hallar el valor numérico de

$$E = (1 + \sin 360^\circ) (2 + \cos 180^\circ)$$

Resolución:Sabemos que $\sin 360^\circ = 0$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\text{Luego: } E = (1 + (0)) (2 + (-1))$$

$$E = (1) (1) = 1$$

$$E = 1 \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Hallar el valor numérico de

$$P = 2 \cos^2 270^\circ - 3 \sin 360^\circ + \operatorname{tg}^2 180^\circ$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } P = \text{Cero}$$

Ejercicio 3 Hallar el valor numérico de

$$A = \frac{(6 \cos 180^\circ) \sec^2 180^\circ}{\cotg 270^\circ + \cos 360^\circ}$$

Resolución:

Ejercicio 4 Hallar el valor numérico de

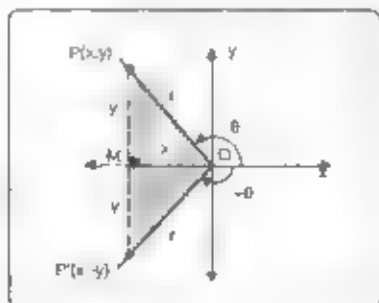
$$Q = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos 2\pi}{\sec \pi + \operatorname{tg} 2\pi}$$

Resolución:

Rpta. $A = 7$

Rpta. $Q = 3/2$

6.1.9 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO NEGATIVO (-θ)



La determinación de las razones trigonométricas de un ángulo negativo se puede lograr mediante la regla de Reproducción al primer cuadrante, conviene sin embargo, disponer de una relación especial. Trace ángulos igual a θ y -θ en posición normal y escoja P(x, y) y P(x, -y) como se muestra en la figura, obteniendo dos triángulos iguales

Luego, hallamos las razones trigonométricas del $\triangle OMP$ y del $\triangle OMP'$

R.T. en el $\triangle OMP$ R.T. en el $\triangle OMP'$

i) $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}$, $\operatorname{sen} (-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} \Rightarrow \operatorname{sen} (-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$

ii) $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{r}$, $\cos (-\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos (-\theta) = \cos \theta$

iii) $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tg} (-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \operatorname{tg} (-\theta) = -\operatorname{tg} \theta$

Por razones trigonométricas recíprocas obtenemos

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta \leftarrow$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \leftarrow$$

$$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta \leftarrow$$

$$\operatorname{colog}(-\theta) = -\operatorname{colog} \theta \leftarrow$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta \leftarrow$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta \leftarrow$$

Nota. Las razones trigonométricas de los ángulos negativos son negativas a excepción del coseno y la secante

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 Hallar el valor numérico de.

$$E = \frac{\operatorname{sen}(-270^\circ) + 2 \cos(-180^\circ)}{3 \operatorname{sen}(-90^\circ) - \cos(-360^\circ)}$$

Resolución.

Sabemos que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(-270^\circ) = -\operatorname{sen} 270^\circ = -(-1) = 1 \\ \cos(-180^\circ) = \cos 180^\circ = -1 \\ \operatorname{sen}(-90^\circ) = -\operatorname{sen} 90^\circ = -(1) = -1 \\ \cos(-360^\circ) = \cos 360^\circ = 1 \end{cases}$$

Reemplazando valores obtenemos

$$E = \frac{(1) + 2(-1)}{3(-1) - 1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Hallar el valor numérico de:

$$M = \frac{4 \cos(-60^\circ) - 3 \operatorname{tg}(-45^\circ)}{\operatorname{tg}(-360^\circ) - \sec(-60^\circ)}$$

Resolución:

Sabemos que:

$$\begin{cases} \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2 \\ \operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -(1) = -1 \\ \operatorname{tg}(-360^\circ) = \operatorname{tg} 360^\circ = (0) = 0 \\ \sec(-60^\circ) = \sec 60^\circ = 2 \end{cases}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$M = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right) - 3(-1)}{0 - 2} = \frac{2 + 3}{-2} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3 Hallar el valor numérico de

$$E = \operatorname{sen}^2(-30^\circ) - 4(\operatorname{tg}(-45^\circ))$$

Resolución

$$\text{Sabemos que } \begin{cases} \operatorname{sen}(-30^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -1/2 \\ \operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -(1) = -1 \end{cases}$$

Reemplazando valores, obtenemos.

$$E = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4(-1) = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \quad \text{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 14

Ejercicio 1 : Hallar el valor numérico de

$$E = \frac{3 \lg^2 60^\circ - 2 \operatorname{cosec} (-270^\circ)}{4 \operatorname{cotg} (-60^\circ)}$$

Resolución

Sabemos que:

$$i) \lg 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\lg^2 60^\circ = 3}$$

$$ii) \operatorname{cosec} (-270^\circ) = -\operatorname{cosec} 270^\circ = -(-1)$$

$$\boxed{\operatorname{cosec} (-270^\circ) = 1}$$

$$iii) \operatorname{cotg} (-60^\circ) = -\operatorname{cotg} 60^\circ = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} (-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{Luego } E = \frac{3(3) - 2(1)}{4\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{-21}{4\sqrt{3}} = \frac{-21\sqrt{3}}{4 \cdot 3}$$

$$E = \frac{7}{4}\sqrt{3} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 : Hallar el valor numérico de

$$R = \frac{\cos (-60^\circ) + 2 \operatorname{cotg} (-45^\circ)}{\operatorname{cosec} (-30^\circ) - \lg (-360^\circ)}$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } R = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 3 Hallar el valor numérico de

$$Q = \frac{\cos (180^\circ) + \cos^2 (45^\circ)}{\sec^2 (180^\circ) - \lg^2 (-180^\circ)}$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } Q = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 4 Hallar el valor numérico de

$$M = \frac{6 \operatorname{cotg}^2 (-60^\circ) - 2 \cos^2 (-30^\circ)}{3 \operatorname{cotg} (-30^\circ)}$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } M = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

6.2 REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

6.2.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE LA FORMA $(n \cdot 180^\circ \pm \alpha)$ ó $(n\pi \pm \alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$ **Casos Particulares**

$$FT(180^\circ \pm \alpha) = \pm FT(\alpha) \quad \text{ó} \quad FT(\pi \pm \alpha) = \pm FT(\alpha)$$

$$FT(360^\circ \pm \alpha) = \pm FT(\alpha) \quad \text{ó} \quad FT(2\pi \pm \alpha) = \pm FT(\alpha)$$

- Para estos casos la función trigonométrica (FT) inicial no varía el signo de la FT resultante, depende de la FT dada y del cuadrante al que pertenece el ángulo $(180^\circ \pm \alpha)$ ó $(\pi \pm \alpha)$, $(360^\circ \pm \alpha)$ ó $(2\pi \pm \alpha)$, siendo " α " un ángulo agudo (ángulo agudo es aquel ángulo que mide menos de 90°)

Ejemplo 1 Reducir $\cos(180^\circ + \alpha)$ **Resolución:**

El ángulo $(180^\circ + \alpha)$ es al Q_3 , la FT coseno en dicho cuadrante es negativa, luego al resultado se colocará el signo (-), veamos:

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

\in al Q_3 **Resultado**

Ejemplo 3 Reducir $\sec(360^\circ - \alpha)$ **Resolución:**

El ángulo $(360^\circ - \alpha)$ es al Q_4 , la FT, secante en dicho cuadrante es positiva, luego al resultado se colocará el signo (+), veamos:

$$\sec(360^\circ - \alpha) = +\sec \alpha$$

\in al Q_4 **Resultado**

Ejemplo 2 Reducir $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$ **Resolución:**

El ángulo $(\pi + \alpha)$ es al Q_3 , la FT, tangente en dicho cuadrante es positiva, luego al resultado se colocará el signo (+), veamos:

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = +\operatorname{tg} \alpha$$

\in al Q_3 **Resultado**

Ejemplo 4 Reducir $\operatorname{sen}(360^\circ + \alpha)$ **Resolución:**

El ángulo $(360^\circ + \alpha)$ es al Q_1 , la FT, seno en dicho cuadrante es positiva, luego al resultado se colocará el signo (+), veamos:

$$\operatorname{sen}(360^\circ + \alpha) = +\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha$$

\in al Q_1 **Resultado**

El signo (+) se sobreentiende



TALLER DE EJERCICIOS Nº 15

A Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Sen } (180^\circ - \alpha) =$
2. $\text{Cos } (180^\circ - \alpha) =$
3. $\text{Tg } (180^\circ - \alpha) =$
4. $\text{Cotg } (180^\circ + \alpha) =$
5. $\text{Sec } (180^\circ + \alpha) =$
6. $\text{Cosec } (180^\circ + \alpha) =$

C Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Sen } (360^\circ - \alpha) =$
2. $\text{Cos } (360^\circ - \alpha) =$
3. $\text{Tg } (360^\circ - \alpha) =$
4. $\text{Cotg } (360^\circ + \alpha) =$
5. $\text{Sec } (360^\circ + \alpha) =$
6. $\text{Cosec } (360^\circ + \alpha) =$

B Reducir al primer cuadrante:

1. $\text{Cotg } (\pi - \alpha) = -\text{cotg } \alpha$
2. $\text{Sec } (\pi - \alpha) = -\text{sec } \alpha$
3. $\text{Cosec } (\pi - \alpha) = \text{cosec } \alpha$
4. $\text{Sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$
5. $\text{Cos } (\pi - \alpha) = -\text{cos } \alpha$
6. $\text{Tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

D Reducir al primer cuadrante:

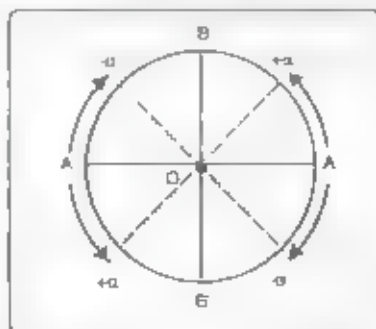
1. $\text{Cotg } (2\pi - \alpha) = -\text{cotg } \alpha$
2. $\text{Sec } (2\pi - \alpha) = \text{sec } \alpha$
3. $\text{Cosec } (2\pi - \alpha) = -\text{cosec } \alpha$
4. $\text{Sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha$
5. $\text{Cos } (2\pi - \alpha) = \text{cos } \alpha$
6. $\text{Tg } (2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

Caso General: $\text{FT } (n \cdot 180^\circ \pm \alpha) = \pm \text{FT } (\alpha)$ ó $\text{FT } (n \cdot \pi \pm \alpha) = \pm \text{FT } (\alpha)$

Este caso es similar a los casos particulares, pero hay que tener en cuenta que:

$n (180^\circ)$, Si "n" es impar se encuentra en la posición A' (ver figura)

$n (180^\circ)$, Si "n" es par se encuentra en la posición A. (ver figura)



EJEMPLO 1: $(3\pi + \alpha)$ pertenece al Q_2 , se sabe que 3π está en A y como " α " gira en sentido horario, lo que nos lleva al segundo cuadrante (Q_2).

EJEMPLO 2: $(5\pi + \alpha)$ pertenece al Q_3 , se sabe que 5π está en A y como " α " gira en sentido antihorario, lo que nos lleva al Q_3 .

EJEMPLO 3: $(540^\circ + \alpha)$ esta expresión se puede escribir así: $[3(180^\circ) + \alpha]$ pertenece al Q_3 , pues se sabe que $3(180^\circ)$ está en A y como " α " gira en sentido antihorario, lo que nos lleva al Q_3 .

EJEMPLO 4: $(4\pi + \alpha)$ pertenece al primer cuadrante (Q_1), se sabe que 4π está en A y como " α " gira en sentido antihorario, lo que nos lleva al primer cuadrante (Q_1).

EJEMPLO 5: $(720^\circ - \alpha)$ esta expresión se puede escribir así: $[4(180^\circ) - \alpha]$ pertenece al Q_4 , se sabe que $4(180^\circ)$ está en A y como " α " gira en sentido horario, lo que nos lleva al cuarto cuadrante (Q_4).



TALLER DE EJERCICIOS N° 16

A Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Sen}(3\pi + \alpha) =$

2. $\text{Cos}(5\pi - \alpha) =$

3. $\text{Tg}(7\pi - \alpha) =$

4. $\text{Cotg}(3\pi - \alpha) =$

5. $\text{Sec}(9\pi + \alpha) =$

6. $\text{Cosec}(5\pi + \alpha) =$

C Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Sen}(7\pi + \alpha) =$

2. $\text{Cos}(11\pi + \alpha) =$

3. $\text{Tg}(13\pi + \alpha) =$

4. $\text{Cotg}(9\pi - \alpha) =$

5. $\text{Sec}(11\pi - \alpha) =$

6. $\text{Cosec}(13\pi - \alpha) =$

B Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Sen}(6\pi + \alpha) =$

2. $\text{Cos}(8\pi - \alpha) =$

3. $\text{Tg}(4\pi + \alpha) =$

4. $\text{Cotg}(6\pi - \alpha) =$

5. $\text{Sec}(3\pi + \alpha) =$

6. $\text{Cosec}(10\pi - \alpha) =$

D Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Sen}(10\pi + \alpha) =$

2. $\text{Cos}(12\pi + \alpha) =$

3. $\text{Tg}(14\pi + \alpha) =$

4. $\text{Cotg}(12\pi - \alpha) =$

5. $\text{Sec}(14\pi - \alpha) =$

6. $\text{Cosec}(16\pi - \alpha) =$

6.2.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE LA FORMA:

$$\left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \pm \alpha \right] \quad \text{ó} \quad \left[(2n+1) 90^\circ \pm \alpha \right] \quad n \in \mathbb{Z}$$

CASOS PARTICULARES:

$$F T [90^\circ \pm \alpha] = \pm \text{Co } F T (\alpha) \quad \text{ó} \quad F T \left[\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right] = \pm \text{Co } F T (\alpha)$$

$$F T [270^\circ \pm \alpha] = \pm \text{Co } F T (\alpha) \quad \text{ó} \quad F T \left[\frac{3\pi}{2} \pm \alpha \right] = \pm \text{Co } F T (\alpha)$$

En estos casos para reducir es similar a los anteriores, teniendo en cuenta que cada signo del resultado depende a función inicial, veamos algunos ejemplos

Ejercicio 1: Reducir $\cos (90^\circ + \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(90^\circ + \alpha) \in$ al Q_2 , la FT coseno en dicho cuadrante es negativa, luego al resultado se colocará el signo (-), acompañado de la **cofunción** trigonométrica de la FT inicial así:

$$\cos (90^\circ + \alpha) = -\text{Co } F T (\alpha) \rightarrow \text{Co } F T = \text{Cofunción trigonométrica}$$

$$\begin{array}{c} \cos (90^\circ + \alpha) = \underline{\text{Sen } \alpha} \\ \text{ó al } Q_2 \quad \text{Resultado} \end{array}$$

Ejercicio 2: Reducir $\sin (270^\circ + \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(270^\circ + \alpha) \in$ al Q_3 , la FT seno en dicho cuadrante es negativa, luego al resultado se colocará el signo (-), acompañado de la **cofunción** trigonométrica de la FT inicial así:

$$\begin{array}{c} \sin (270^\circ + \alpha) = \underline{\cos \alpha} \\ \text{ó al } Q_3 \quad \text{Resultado} \end{array}$$

Ejercicio 3: Reducir $\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$

Resolución:

El ángulo $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \in$ al Q_2 , la FT tangente en dicho cuadrante es positiva, luego al resultado se colocará el signo (+) acompañado de la **cofunción** trigonométrica de la FT inicial así:

$$\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = + \text{cotg } \alpha$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 17

A Reducir al primer cuadrante.

1. $\text{Sen } (90^\circ - \alpha) =$
2. $\text{Cos } (90^\circ - \alpha) =$
3. $\text{Tg } (90^\circ - \alpha) =$
4. $\text{Cotg } (90^\circ - \alpha) =$
5. $\text{Sec } (90^\circ - \alpha) =$
6. $\text{Cosec } (90^\circ - \alpha) =$

C Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Sen } (3\pi/2 - \alpha) =$
2. $\text{Cos } (3\pi/2 - \alpha) =$
3. $\text{Tg } (3\pi/2 - \alpha) =$
4. $\text{Cotg } (3\pi/2 + \alpha) =$
5. $\text{Sec } (3\pi/2 + \alpha) =$
6. $\text{Cosec } (3\pi/2 + \alpha) =$

B Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Cotg } (\pi/2 - \alpha) =$
2. $\text{Sec } (\pi/2 - \alpha) =$
3. $\text{Cosec } (\pi/2 - \alpha) =$
4. $\text{Sen } (\pi/2 + \alpha) =$
5. $\text{Cos } (\pi/2 + \alpha) =$
6. $\text{Tg } (\pi/2 + \alpha) =$

D Reducir al primer cuadrante

1. $\text{Cotg } (270^\circ - \alpha) =$
2. $\text{Sec } (270^\circ - \alpha) =$
3. $\text{Cosec } (270^\circ - \alpha) =$
4. $\text{Sen } (270^\circ + \alpha) =$
5. $\text{Cos } (270^\circ + \alpha) =$
6. $\text{Tg } (270^\circ + \alpha) =$

CASOS GENERALES:

$$F T (2n+1) 90 \pm \alpha, \quad \pm Cc F T (2n) \pm T T (2n+1) \frac{\pi}{2} \pm \alpha, \quad \pm Cc F T (\alpha),$$

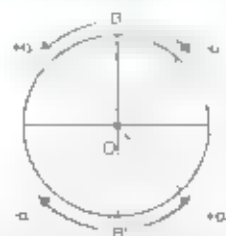
En este caso $(2n+1) 90^\circ$ representa un número impar

$$(2n+1) 90^\circ$$

Si $(2n+1)$ es $4 \cdot k + 1$ (múltiplo de cuatro, más 1) entonces $(2n+1) 90^\circ$ ó $(2n+1) \pi/2$ está en la posición B. (Ver Figura)

$$(2n+1) 90^\circ$$

Si $(2n+1)$ es $4 \cdot k - 1$ (múltiplo de cuatro, menos 1) entonces $(2n+1) 90^\circ$ ó $(2n+1) \pi/2$ está en la posición B'. (Ver Figura)



EJEMPLO 1 $\frac{5\pi}{2}$ esta expresión se puede escribir así $5 \left(\frac{\pi}{2} \right)$ ahora como 5 es $(4 + 1)$ entonces, está en B.

EJEMPLO 2 $\frac{11\pi}{2}$ esta expresión se puede escribir así $11 \left(\frac{\pi}{2} \right)$ ahora como 11 es $(4 + 1)$ entonces $11 \left(\frac{\pi}{2} \right)$ está en B

EJEMPLO 3 $\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha \right)$ sabemos que 9 es $(4 + 1)$, entonces está en B, y como " α " gira en sentido antihorario lo que nos lleva al segundo cuadrante (Q_2).

EJEMPLO 4 Reducir $\sin \left(\frac{11\pi}{2} + \alpha \right)$

Resolución.

• El ángulo $\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha \right) \in \text{al } Q_4$, porque 11 es $(4 + 1)$, donde $\frac{11\pi}{2}$ está en B y como " α " gira en sentido antihorario, entonces, $\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha \right) \in \text{al } Q_4$.

$$\sin \left(\frac{11\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$$

$\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha \right) \in \text{al } Q_4$

EJEMPLO 5 Reducir $\lg \left(\frac{19\pi}{2} - \alpha \right)$

Resolución.

El ángulo $\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha \right) \in \text{al } Q_3$, porque 19 es $(4 + 1)$, donde $\frac{19\pi}{2}$ está en B' y como " α " gira en sentido horario, entonces $\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha \right) \in \text{al } Q_3$.

$$\lg \left(\frac{19\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{cog} \alpha$$

$\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha \right) \in \text{al } Q_3$

EJEMPLO 6 Reducir $\sin \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right)$

Resolución.

El ángulo $\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right) \in \text{al } Q_1$, porque 5 es $(4 + 1)$, donde $\frac{5\pi}{2}$ está en B y como " α " gira en sentido horario, entonces $\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right) \in \text{al } Q_1$.

$$\sin \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 18

- Reducir al primer cuadrante

Ejercicio 1' - $\text{Sen} \left(7 \frac{\pi}{2} + \alpha \right)$

Resolución:

Rpta. $\cos \alpha$

Ejercicio 4' - $\text{Sen} \left(\frac{9\pi}{2} + \alpha \right)$

Resolución:

Rpta. $\cos \alpha$

Ejercicio 2 - $\cos (630^\circ + \alpha)$

Resolución:

Rpta. $\sin \alpha$

Ejercicio 5' - $\cos \left(\frac{13\pi}{2} + \alpha \right)$

Resolución:

Rpta. $-\sin \alpha$

Ejercicio 3 - $\text{tg} (990^\circ + \alpha)$

Resolución:

Rpta. $-\cotg \alpha$

Ejercicio 6' - $\text{tg} \left(\frac{17\pi}{2} + \alpha \right)$

Resolución:

Rpta. $-\cotg \alpha$

6.2.3 REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Consiste en comparar el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud con respecto al valor de la función trigonométrica de un ángulo del primer cuadrante (Ángulo agudo).

Para reducir al primer cuadrante se presentan los siguientes casos

PRIMER CASO

Reducción para ángulos positivos menores de una vuelta

Sabemos que todo ángulo positivo menor de una vuelta (360°) se puede descomponer como un ángulo cuadrantal, más o menos un ángulo agudo, dependiendo del cuadrante al que pertenece.

- a) Si el ángulo pertenece al Q_2 lo descomponemos como $(180^\circ - \alpha)$ ó $(\pi - \theta)$
- b) Si pertenece al Q_3 lo descomponemos como $(180^\circ + \alpha)$ ó $(\pi + \theta)$
- c) Si pertenece al Q_4 lo descomponemos como $(360^\circ - \alpha)$ ó $(2\pi - \theta)$, siendo α y θ ángulos agudos.

Por Ejemplo

$$100^\circ \in \text{al } Q_2 \Rightarrow 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow \frac{5\pi}{9} \in Q_2 \Rightarrow \pi - \frac{4\pi}{9}$$

$$150^\circ \in \text{al } Q_2 \Rightarrow 180^\circ - 30^\circ \Rightarrow \frac{5\pi}{6} \in Q_2 \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$200^\circ \in \text{al } Q_3 \Rightarrow 180^\circ + 20^\circ \Rightarrow \frac{10\pi}{9} \in Q_3 \Rightarrow \pi + \frac{\pi}{9}$$

$$250^\circ \in \text{al } Q_3 \Rightarrow 180^\circ + 70^\circ \Rightarrow \frac{25\pi}{18} \in Q_3 \Rightarrow \pi + \frac{7\pi}{18}$$

$$300^\circ \in \text{al } Q_4 \Rightarrow 360^\circ - 60^\circ \Rightarrow \frac{5\pi}{3} \in Q_4 \Rightarrow 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Luego } FT(180^\circ \pm \alpha) = \pm FT(\alpha) \text{ ó } FT(\pi \pm \theta) = \pm FT(\theta)$$

$$FT(360^\circ \pm \alpha) = \pm FT(\alpha) \text{ ó } FT(2\pi \pm \theta) = \pm FT(\theta)$$

Ejemplo 1. Reducir al primer cuadrante $\sin 240^\circ$. Luego

Resolución.

El ángulo $240^\circ \in \text{al } Q_3$, lo descomponemos como $(180^\circ + 60^\circ)$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ$$



La función seno en el tercer cuadrante (Q_3) es negativa, entonces al resultado se colocará (-), también se debe tener en cuenta que no es la única respuesta ya que $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ por el complemento que dice así:

Cualquier función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción del ángulo complementario. Si " α " es un ángulo agudo entonces:

$$\text{Función}(\alpha) = \text{Cofunción}(\text{complemento de } \alpha)$$

Ejemplos

$$a) \sin 10^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$b) \cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ$$

$$c) \lg 40^\circ = \text{cotg}(90^\circ - 40^\circ) = \text{cotg } 50^\circ$$

Ejemplo 2 Reducir al primer cuadrante $\cos(140^\circ)$

Resolución:

El ángulo $140^\circ \in$ al Q_2 , lo descomponemos como $(180^\circ - 40^\circ)$

Luego

$$\cos(140^\circ) = \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ$$

$\rightarrow \in$ al Q_2

Aplicando el criterio de cofunción, el resultado puede ser también así:

$$\cos(140^\circ) = -\cos 40^\circ = -\sin 50^\circ$$

Ejemplo 3 Reducir al primer cuadrante $\lg 105^\circ$

Resolución:

El ángulo $105^\circ \in$ al Q_2 , lo descomponemos como $(180^\circ - 75^\circ)$

$$\text{Luego, } \lg 105^\circ = \lg(180^\circ - 75^\circ) = -\lg 75^\circ$$

$\rightarrow \in$ al Q_2

Aplicando el criterio de cofunción, el resultado puede ser también así:

$$\lg 105^\circ = -\lg 75^\circ = -\text{cotg } 15^\circ$$

Ejemplo 4 Reducir al primer cuadrante $\text{cosec } \frac{3\pi}{4}$

$$\text{cosec } \frac{3\pi}{4}$$

Resolución:

El ángulo $\frac{3\pi}{4} \in$ al Q_2 , lo descomponemos como $\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{como } \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

Luego

$$\text{cosec } \frac{3\pi}{4} = \text{cosec} \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \text{cosec } \frac{\pi}{4}$$

$$\text{cosec } \frac{3\pi}{4} = \text{cosec } \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 5 Reducir al primer cuadrante $\sec 210^\circ$

Resolución

El ángulo $210^\circ \in$ al Q_3 , lo descomponemos como $(180^\circ + 30^\circ)$

Luego,

$$\sec 210^\circ = \sec(180^\circ + 30^\circ) = -\sec 30^\circ$$

$\rightarrow \in$ al Q_3

$$\sec 210^\circ = -\sec 30^\circ$$

Ejemplo 6 Reducir al primer cuadrante $\operatorname{sen} 300^\circ$

Resolución.

El ángulo $300^\circ \in \text{al } Q_4$, lo descomponemos como: $(360^\circ - 60^\circ)$

Luego

$$\operatorname{sen} 300^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ - 60^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ$$

$\xrightarrow{\quad} \in \text{al } Q_1$

Por cofunción: $\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ$

$$\operatorname{sen} 300^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ$$

Ejemplo 7 Reducir al primer cuadrante $\cotg 280^\circ$

Resolución.

El ángulo $280^\circ \in \text{al } Q_4$, lo descomponemos como: $(360^\circ - 80^\circ)$.

Luego

$$\cotg 280^\circ = \cotg (360^\circ - 80^\circ) = -\cotg 80^\circ$$

$\xrightarrow{\quad} \in \text{al } Q_1$

Por cofunción: $\cotg 80^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ$

$$\cotg 280^\circ = -\cotg 80^\circ = -\operatorname{tg} 10^\circ$$

Ejemplo 8 Reducir al primer cuadrante $\operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}$

Resolución:

El ángulo $\frac{8\pi}{5} \in \text{al } Q_4$, lo descomponemos

$$\text{como } \left(2\pi - \frac{2\pi}{5} \right)$$

Luego

$$\operatorname{sen} \frac{8\pi}{5} = \operatorname{sen} \left(2\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = -\operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$$

$\xrightarrow{\quad} \in \text{al } Q_1$

$$\operatorname{sen} \frac{8\pi}{5} = -\operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$$

Observación: Existe otra métrica que se utiliza con frecuencia, para reducir al primer cuadrante las funciones trigonométricas de un ángulo positivo y menor de una vuelta (360°); este método consiste en usar al ángulo referencial que se explicará a continuación.

Ángulo Referencial:

Se denomina así al ángulo agudo que forma el lado final de un ángulo mayor de 90° con respecto al eje abscisas y se le representa por Q_R .

Ejemplo 1 130° pertenece al segundo cuadrante (Q_2), su ángulo referencial (Q_R) es 50°

De la figura, el ángulo referencial (Q_R) es

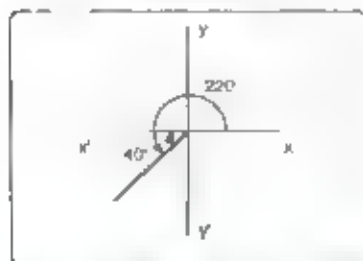
$$Q_R = 50^\circ$$

Nota. Recordar que ángulo agudo es aquel ángulo que mide menos de 90°

Ejemplo ② 220° pertenece al tercer cuadrante (Q_3), su ángulo referencial (Q_R) es 40°

De la figura, el ángulo referencial (Q_R) es

$$Q_R = 40^\circ$$



A. Reducir al primer cuadrante:

Ejercicio 1. $\operatorname{tg} 225^\circ$

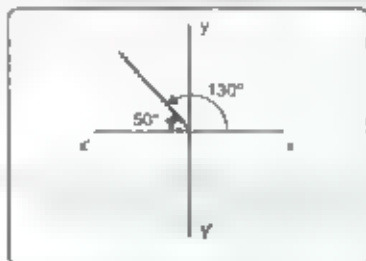
Resolución:

Ejercicio 2. $\cos 230^\circ$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{tg} 45^\circ$

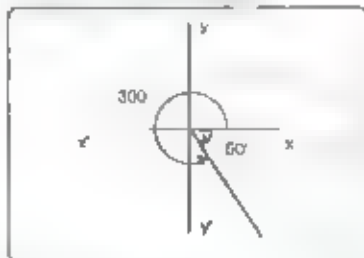
Rpta. $\cos 50^\circ$



Ejemplo ③ 300° pertenece al cuarto cuadrante (Q_4), su ángulo referencial (Q_R) es 60°

De la figura, el ángulo referencial (Q_R) es

$$Q_R = 60^\circ$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 19

Ejercicio 3 $\sec 170^\circ$

Resolución:

Rpta. $-\sec 10^\circ$

Ejercicio 5 $\cotg 410^\circ$

Resolución:

Rpta. $\cotg 50^\circ$

Ejercicio 4 $\cos 320^\circ$

Resolución:

Rpta. $\cos 40^\circ$

Ejercicio 6 $\operatorname{cosec} 275^\circ$

Resolución:

Rpta. $-\operatorname{cosec} 85^\circ$

B. Reducir al primer cuadrante

Ejercicio 1 $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

Ejercicio 2 $\cotg \frac{7\pi}{6}$

Resolución:

Rpta. $\cotg \frac{\pi}{6}$

Ejercicio 2 $\sec \frac{6\pi}{7}$

Resolución:

Rpta. $-\sec \frac{\pi}{7}$

Ejercicio 5 $\lg \frac{9\pi}{4}$

Resolución:

Rpta. $\lg \frac{\pi}{4}$

Ejercicio 4 $\operatorname{cosec} \frac{9\pi}{8}$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

Ejercicio 6 $\operatorname{cosec} \frac{11\pi}{5}$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{5}$

SEGUNDO CASO:

Reducción para ángulos mayores de una vuelta

Cuando el ángulo es mayor de 360° se siguen los siguientes pasos:

1. Dividimos al ángulo dado entre 360° (ó 2π), dependiendo del sistema en que se trabaje
2. Las funciones trigonométricas de ángulo dado son iguales a las respectivas funciones trigonométricas de residuo de la división efectuada)
3. Si dicho residuo es menor de 90° (ó $\frac{\pi}{2}$) el problema queda concluido; pero si fuera mayor e igual a 90° (ó $\frac{\pi}{2}$) se recurre a cualquiera de los métodos explicados en el primer caso.

Ejemplo ①: Reducir al primer cuadrante $\text{sen } 2\,910^\circ$

Resolución:

Effectuando la división, obtenemos:

$$\begin{array}{r|l} 2\,910^\circ & 360^\circ \\ 2\,880^\circ & 8 \\ \hline 30^\circ & \end{array} \Rightarrow \text{sen } 2\,910^\circ = \text{sen } 30^\circ \Rightarrow \text{sen } 2\,910^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Residuo menor de 90°

Rpta.

Ejemplo ②: Reducir a primer cuadrante $\text{tg } 1\,845^\circ$

Resolución:

Effectuando la división, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} 1\,845^\circ & 360^\circ \\ 1\,800^\circ & 5 \\ \hline 45^\circ & \end{array} \Rightarrow \text{tg } 1\,845^\circ = \text{tg } 45^\circ \Rightarrow \text{tg } 1\,845^\circ = 1$$

Residuo menor de 90°

Rpta.

Ejemplo ③: Reducir al primer cuadrante $\cos 1\,290^\circ$

Resolución:

Effectuando la división, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} 1\,290^\circ & 360^\circ \\ 1\,080^\circ & 3 \\ \hline 210^\circ & \end{array} \Rightarrow \cos 1\,290^\circ = \cos 210^\circ$$

Residuo mayor de 90°

Aplicando el primer caso obtenemos

$$\cos 1\,290^\circ = \cos 210^\circ = \cos (180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$\in \text{al } Q_3$

$$\cos 1\,290^\circ = \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rpta.

Ejemplo ④: Reducir al primer cuadrante $\text{sen } 3\,930^\circ$

Resolución:

Effectuando la división, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} 3\,930^\circ & 360^\circ \\ 3\,600^\circ & 10 \\ \hline 330^\circ & \end{array} \Rightarrow \text{sen } 3\,930^\circ = \text{sen } 330^\circ$$

Residuo mayor de 90°

Aplicando el primer caso obtenemos $\sin 3\ 930^\circ = \sin 330^\circ = \sin (360^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$

= al Q_1

$$\sin 3\ 930^\circ = \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \quad \text{Rpta.}$$

Ejemplo 5 Reducir al primer cuadrante $\operatorname{tg} 313 \frac{\pi}{3}$

Resolución:

• En primer lugar dividimos el ángulo dado o sea $313 \frac{\pi}{3}$ entre 2π , veamos $313 \frac{\pi}{3} \div 2\pi$

• En segundo lugar convertimos los " 2π " a tercios $2\pi = 3 \left(\frac{2\pi}{3} \right) = 6 \frac{\pi}{3}$

$$\text{Luego } 313 \frac{\pi}{3} \div 6 \frac{\pi}{3}$$

Ahora, nos olvidamos por un momento de $\pi/3$ y efectuamos la división, como si se tratara de una división cualquiera, veamos

$$\begin{array}{r} 313,6 \\ 30 \overline{) 52} \\ 13 \\ 12 \\ \hline \text{Residuo } 1 \end{array}$$

• Al residuo hallado, o sea 1, lo multiplicamos por $\pi/3$, siendo al final de la siguiente forma.

$$\begin{array}{r} 313 \frac{\pi}{3} \div 6 \frac{\pi}{3} \\ 30 \overline{) 52} \\ 13 \\ 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\operatorname{tg} 313 \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 1 \frac{\pi}{3} \quad \text{Residuo mayor que } \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} 313 \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \quad \text{Rpta.}$$

$$\text{Residuo } 1 \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo 6 Reducir al primer cuadrante $\sec 235 \frac{\pi}{4}$

Resolución:

• De igual manera que el ejemplo anterior procedemos de la manera siguiente $235 \frac{\pi}{4} \div 2\pi$

• Convertimos " 2π " a cuartos. $2\pi = 4 \left(\frac{2\pi}{4} \right) = 8 \frac{\pi}{4}$ Luego. $235 \frac{\pi}{4} \div 8 \frac{\pi}{4}$

Ahora nos olvidamos por un momento de $\pi/4$ y efectuamos la división, como si se tratara de una división cualquiera. veamos.

$$\begin{array}{r} 235 \quad 8 \\ 16 \quad 29 \\ 75 \\ 72 \\ \hline \text{Residuo} \quad 3 \end{array}$$

- Al residuo hallado o sea 3, lo multiplicamos por $\pi/4$ siendo al final de la siguiente forma

$$\begin{array}{r} 235 \quad \pi \\ 16 \quad 4 \\ 75 \\ 72 \\ \hline \text{Residuo} \quad 3 \cdot \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$8 \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sec 235 \cdot \frac{\pi}{4} = \sec \frac{3\pi}{4}$$

Residuo Mayor que $\frac{\pi}{2}$

- Aplicando el primer caso de reducción al primer cuadrante, obtenemos

$$\sec 235 \cdot \frac{\pi}{4} = \sec \frac{3\pi}{4} = \sec \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sec \frac{\pi}{4} \quad \text{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº (20)

A. Reducir al primer cuadrante

Ejercicio 1. $\lg 7789^\circ$

Resolución:

Rpta. $\lg 49^\circ$

Ejercicio 2. $\sin 5620^\circ$

Resolución:

Rpta. $\sin 40^\circ$

Ejercicio 3. $\operatorname{cosec} 1240^\circ$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{cosec} 20^\circ$

Ejercicio 4. $-\sin \frac{556\pi}{11}$

Resolución:

Rpta. $-\sin 5\pi$

Ejercicio 5 $\lg \frac{784\pi}{17}$

Resolución:

Rpta. $\lg \frac{2\pi}{17}$

Ejercicio 6: $\operatorname{cosec} \frac{242\pi}{3}$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$

TERCER CASO:

Reducción para ángulos negativos

Cuando el ángulo es negativo se siguen los siguientes pasos.

1. Función trigonométrica de ángulo negativo se convierte a función trigonométrica de ángulo positivo, como se observa en la siguiente tabla
2. Se aplican las reglas anteriores

\rightarrow	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
\rightarrow	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
\rightarrow	$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\alpha)}$
\rightarrow	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
\rightarrow	$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$
\rightarrow	$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha$

Ejemplo 1 Reducir al primer cuadrante:
 $\sin(-210^\circ)$

Resolución:

La FT del ángulo negativo, lo convertimos a FT de ángulo positivo vemos la tabla.

$$\sin(-210^\circ) = -\sin 210^\circ$$

$\rightarrow \in \text{al } Q_2$

$$\sin(-210^\circ) = -[\sin(180^\circ + 30^\circ)] = -(-\sin 30^\circ)$$

$$\sin(-210^\circ) = +\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2 Reducir al primer cuadrante
 $\operatorname{ctg}(252^\circ)$

Resolución:

Sabemos que:

$$\operatorname{ctg}(-252^\circ) = -\operatorname{ctg} 252^\circ$$

$\rightarrow \in \text{al } Q_2$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}(-252^\circ) &= -[\operatorname{ctg}(180^\circ + 72^\circ)] = -[\operatorname{ctg} 72^\circ] \\ \operatorname{ctg}(252^\circ) &= -\operatorname{ctg} 72^\circ\end{aligned}$$

Ejemplo 3 Reducir al primer cuadrante
 $\lg(-1458^\circ)$

Resolución:

$$\text{Sabemos que } \lg(1458^\circ) = \lg(1458^\circ) \quad (I)$$

$$\text{Dividimos } 1458^\circ \text{ entre } 360^\circ \quad \begin{array}{r|l} 1458^\circ & 360^\circ \\ \hline 1440^\circ & 4 \\ \hline 18^\circ & \end{array}$$

$$\text{Donde } \lg(1458^\circ) = \lg 18^\circ \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\lg(-1458^\circ) = -\lg 18^\circ$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 21

A. Reducir al primer cuadrante:

Ejercicio 1 $\sec (1260^\circ)$

Resolución.

Rpta. 1

Ejercicio 4 $\lg \left(\frac{-335 \pi}{8} \right)$

Resolución.

Rpta. $\lg \left(\frac{\pi}{8} \right)$

Ejercicio 2 $\lg (-750^\circ)$

Resolución.

Rpta. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 5 $\cot g \left(\frac{223\pi}{13} \right)$

Resolución.

Rpta. $\cot g \left(\frac{2\pi}{13} \right)$

Ejercicio 3 $\sin (-7530^\circ)$

Resolución.

Rpta. $\frac{1}{2}$

Ejercicio 6 $\cos \left(-\frac{8\pi}{5} \right)$

Resolución:

Rpta. $\cos \left(\frac{\pi}{5} \right)$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE TIPO I B M.

Ejercicio 1 Simplificar $R = \frac{\operatorname{tg}(\pi + x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{cotg}(270^\circ + x) \operatorname{sen}(360^\circ - x)}$

A) 1

B) -1

C) 0

D) 2

E) Ninguna

Resolución:

La expresión dada se puede escribir as $R = \frac{\operatorname{tg}(180^\circ + x) \cos(270^\circ - x)}{\operatorname{cotg}(270^\circ + x) \operatorname{sen}(360^\circ - x)} \quad (I)$

Sabemos que $\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(180^\circ + x) &= \operatorname{tg} x & \cos(270^\circ - x) &= \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cotg}(270^\circ + x) &= -\operatorname{tg} x & \operatorname{sen}(360^\circ - x) &= -\operatorname{sen} x \end{aligned} \right\}$

Reemplazando valores en (I) $R = \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{tg} x)(-\operatorname{sen} x)} = \frac{x}{x} = -1$ Rpta. B

Ejercicio 2 Simplificar $E = \frac{\operatorname{cotg}(360^\circ - A) \operatorname{tg}(450^\circ - A)}{\operatorname{tg}(270^\circ + A) + \operatorname{cotg}(180^\circ - A)}$

A) 1

B) -1

C) 0

D) 2

E) Ninguna

Resolución.

Sabemos que $\left. \begin{aligned} \operatorname{cotg}(360^\circ - A) &= \operatorname{cotg} A & \operatorname{tg}(270^\circ + A) &= -\operatorname{cotg} A \\ \operatorname{cotg}(180^\circ - A) &= -\operatorname{cotg} A & \operatorname{tg}(450^\circ - A) &= \operatorname{tg}(90^\circ - A) = \operatorname{cotg} A \end{aligned} \right\}$

$\begin{array}{r} 450^\circ - 360^\circ \\ \hline \text{Residuo} = 90^\circ \end{array} \quad 1$

Reemplazando valores obtenemos.

$E = \frac{(\operatorname{cotg} A)(\operatorname{cotg} A)}{(-\operatorname{cotg} A) + \operatorname{cotg} A} = \frac{2 \operatorname{cotg} A}{2 \operatorname{cotg} A} = 1$ Rpta. A

Ejercicio 3 - Hallar el valor numérico de $M = 3 \operatorname{tg}^2 300^\circ - 6 \cos^2 240^\circ + \cos (-360^\circ)$

A) 6

B) 10

C) $\frac{17}{2}$

D) $\frac{15}{2}$

E) Ninguna

Resolución.

Sabemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 300^\circ &= \operatorname{tg} (360^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3} \\ \cos 240^\circ &= \cos (180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \cos (-360^\circ) &= \cos 360^\circ = 1\end{aligned}$$

Reemplazando valores en "M"

$$M = 3(-\sqrt{3})^2 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1)$$

$$M = 3(3) - 6\left(\frac{1}{4}\right) + (1) = 11 - \frac{3}{2} + \frac{2}{2}$$

Rpta. C

Ejercicio 4 - Hallar el valor de: $R = (b - a) \operatorname{colog} 225^\circ + b \cos 180^\circ - a \operatorname{sen} (-270^\circ)$

A) 2b

B) -2b

C) 2a

D) -2a

E) Ninguna

Resolución.

Sabemos que.

$$\begin{aligned}\operatorname{colog} (225^\circ) &= \operatorname{colog} (180^\circ + 45^\circ) = 1 \\ \cos 180^\circ &= -1 \\ \operatorname{sen} (-270^\circ) &= -\operatorname{sen} 270^\circ = -(-1) = 1\end{aligned}$$

Reemplazamos valores en "R"

$$R = (b - a)(1) + b(-1) - a(1)$$

$$R = b - a - b - a = -2a$$

Rpta. D



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

NIVEL I

Ejercicio 1 Simplificar

$$R = \frac{\operatorname{sen} 8360^\circ \cdot x + \cos (270^\circ \cdot x)}{\operatorname{sen} (180^\circ \cdot x)}$$

- A) 2 B) 2 C) 1 D) 0 E) N.A.

Ejercicio 2 Simplificar

$$E = \frac{\operatorname{tg} (540^\circ - A) \operatorname{cotg} (360^\circ + A)}{\cos (180^\circ + A) + 2 \operatorname{sen} (90^\circ + A)}$$

- A) $\sec A$ B) $\csc A$ C) $1/2$
D) -1 E) N.A.

Ejercicio 3 Hallar el valor numérico de

$$M = 2 \cos 360^\circ - 3 \operatorname{tg} 135^\circ + \operatorname{cotg} 225^\circ$$

- A) 0 B) 6 C) 4 D) 2 E) N.A.

Ejercicio 4 Hallar el valor numérico de

$$P = 3 \operatorname{sen} 150^\circ + 2 \operatorname{tg} (135^\circ) + \operatorname{cosec} (90^\circ)$$

- A) $5/2$ B) $1/2$ C) $1/2$ D) -1 E) N.A.

Ejercicio 5 Hallar el valor numérico de

$$Q = (a+b) \operatorname{tg} 225^\circ - 2a \operatorname{sen} (-270^\circ) + (a-b) \cos 180^\circ$$

- A) $b - a$ B) $2b - a$ C) $2(b - a)$
D) $2a - b$ E) N.A.

Ejercicio 6 Al simplificar la expresión se obtiene

$$M = \frac{\operatorname{sen} (180^\circ + x)}{\operatorname{sen} (-x)} \cdot \frac{\cos (90^\circ + x)}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{tg} (360^\circ - x)}{\operatorname{cotg} (90^\circ - x)}$$

- A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

Clave de Respuestas

1. A 2. B 3. B 4. A 5. C 6. D

NIVEL II

Ejercicio 1 Reducir y calcular

$$E = \operatorname{sen} 150^\circ \cos 120^\circ + \sec 150^\circ \operatorname{cosec} 120^\circ$$

- A) $19/12$ B) $19/12$ C) $4/3$
D) $3/4$ E) $3/2$

Ejercicio 2 Hallar el valor de

$$M = \frac{\operatorname{sen} 140^\circ}{\cos 230^\circ} - \frac{\operatorname{tg} 320^\circ}{\operatorname{cotg} 130^\circ}$$

- A) 1 B) 1 C) 2 D) 2 E) 0

Ejercicio 3 Reducir la expresión

$$Q = \frac{\operatorname{cotg} (\pi - x) \cos \left(\frac{3\pi + x}{2} \right)}{\sec (x - 2\pi) \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}$$

- A) $\operatorname{sen} x$ B) $-\cos x$ C) $\operatorname{sen} x$
D) $\cos x$ E) $-\operatorname{tg} x$

Ejercicio 4 Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas

- I. $\operatorname{sen} (\pi + x) = \operatorname{sen} x$
II. $\cos (2\pi - x) = \cos (x)$

III. $\cotg \left(\frac{3}{2}\pi - x \right) = \lg x$

IV. $\sec \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\operatorname{cosec} x$

A) Ninguna B) 1 C) 2 D) 3 E) Todas

Ejercicio 9 Determinar el valor de

$$E = \frac{\operatorname{sen} 135^\circ \cos 240^\circ \lg 330^\circ \sec 300^\circ}{\cos 120^\circ \cotg 210^\circ \operatorname{cosec} 210^\circ \sec 315^\circ}$$

A) 1/6 B) -1/3 C) -1/2 D) 1/6 E) 1/2

Ejercicio 10 Calcular

$$F = \frac{\operatorname{sen} 150^\circ \cos 210^\circ}{\operatorname{sen} 240^\circ \cotg 315^\circ}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Ejercicio 11 Reducir

$$K = \frac{\operatorname{sen} (90^\circ + \theta) \cos (180^\circ - \theta) \lg (360^\circ - \theta)}{\lg (180^\circ + \theta) \cos (360^\circ - \theta) \operatorname{cosec} (180^\circ + \theta)}$$

A) 1 B) -1 C) $\lg \theta$ D) $\cos \theta$ E) $\operatorname{sen} \theta$

NIVEL III

Ejercicio 12 Dadas las columnas

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| I) $\operatorname{sen} 205^\circ$ | a) $\cos 65^\circ$ |
| II) $\cos 335^\circ$ | b) $\operatorname{sen} 65^\circ$ |
| III) $\lg 531^\circ$ | c) $\cotg 81^\circ$ |
| IV) $\cotg (-99^\circ)$ | d) $\lg 9^\circ$ |

La relación correcta entre ellas es

A) I a, II b, III c, IV d B) I a, II b, III d, IV c
C) b, II a, III c, IV d D) I b, II a, III d, IV c
E) Ninguna anterior

Ejercicio 13 Reducir

$$M = \frac{\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cos (x - \pi)}{\lg \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) + \cotg (2\pi - x)}$$

A) $\cos x$ B) $\lg x$ C) $-\sec x$
D) $-\operatorname{sen} x$ E) $\operatorname{sen} x$

Ejercicio 14 Marque lo incorrecto

- A) $\cos (-60^\circ) = 0.5$
B) $\lg (-135^\circ) = 1$
C) $\sec (-170^\circ) = \sec 10^\circ$
D) $\operatorname{cosec} (-35^\circ) = -\operatorname{cosec} 35^\circ$
E) $\cotg (-57^\circ) = \lg 33^\circ$

Ejercicio 15 Calcular

$$R = \operatorname{sen} 150^\circ \cos 210^\circ \lg 225^\circ \sec 300^\circ$$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Clave de Respuestas

1. B	2. D	3. D	4. C	5. D
6. C	7. B	8. D	9. C	10. E

Ejercicio 16 Calcular el valor de

$$M = 2 \operatorname{sen}^2 (\pi + \alpha) + 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1 E) 0.5

Ejercicio 17 Calcular el valor de

$$Q = \frac{\cotg^2 (-570^\circ) \operatorname{sen} (-1043^\circ)}{2 \lg (-1125^\circ)}$$

A) 1.2 B) 0.5 C) -1.2 D) 1.8 E) -1.9

Ejercicio 15. $\sin \alpha \lg \pi \sqrt{5}$ Calcular

$$F = \frac{\sin(\pi + \alpha) \lg(\pi - \alpha) \sec \frac{\pi}{2} + \alpha}{\cos \frac{3\pi}{2} - \alpha} \cotg(2\pi - \alpha) \operatorname{cosec} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$$

A) 5 B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) $-\sqrt{5}$ E) 2

Ejercicio 16. Simplificar

$$M = \frac{\sin 134^\circ \sin 170^\circ}{\cos 100^\circ} + \frac{\cos 136^\circ \sec 145^\circ}{\operatorname{cosec} 125^\circ}$$

A) $\sin 46^\circ$ B) $2 \sin 46^\circ$ C) $2 \sec 46^\circ$
D) 2 E) 0

Ejercicio 17. Calcular el valor de

$$O = \frac{\lg \frac{2\pi}{7} \cotg \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}}{\sec \frac{5\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{3\pi}{4}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$ Ejercicio 18. Si $\operatorname{cosec} \theta \sec x = 3$. Hallar

$$R = \frac{\sin(180^\circ - x) \cos(90^\circ - \theta) \cos x}{\sin(180^\circ - \theta) \cos(90^\circ - x) \sec(90^\circ - \theta)}$$

A) 1/3 B) 3 C) 1/9 D) 9 E) 1/2

Ejercicio 19. Reducir y calcular

$$Y = \frac{\operatorname{cosec} 1050^\circ \sec(-683^\circ)}{\sqrt{3} \cos(390^\circ) \lg 315^\circ}$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ Ejercicio 20. Si $\lg \alpha = \sqrt{2}$, Calcular

$$E = \frac{\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sec(2\pi - \alpha) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$$

A) 3 B) $\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

Ejercicio 21. Calcular el valor de

$$P = \sin 805^\circ \frac{\pi}{6} + \cos 317^\circ \frac{\pi}{3} + \lg 625 \frac{\pi}{4}$$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 2 E) 1

Ejercicio 22. Reducir

$$K = \frac{\operatorname{Vers} 520^\circ \operatorname{Vers} 700^\circ}{\operatorname{cov}(-740^\circ) \operatorname{cov}(560^\circ)}$$

A) $\cotg 20^\circ$ B) $\cotg 20^\circ$ C) 0
D) $\lg 20^\circ$ E) $-\lg 20^\circ$

Ejercicio 23. Calcular el valor de

$$E = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sec(\pi - \pi) \operatorname{cosec}(\pi - 2\pi)}$$

Siendo $\alpha = \pi/6$

A) 3/8 B) -3/8 C) 3/16 D) 3/16 E) 3/4

Ejercicio 24. Si α y β son complementarios. Calcular el valor de

$$M = \frac{\cos \alpha \sec\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \sin \beta}{\lg \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \lg \beta}$$

A) $\cos^2 \alpha$ B) $\sin \beta$ C) $\lg \alpha$ D) $\lg \beta$ E) 1

Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. C	4. D	5. E
6. D	7. A	8. C	9. E	10. B
11. A	12. D	13. E		



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

EJERCICIO 1° : Evaluar

$$\frac{\operatorname{sen} 6540^\circ + \operatorname{sec} 7590^\circ}{\operatorname{tg} 4290^\circ}$$

A) $\frac{-5\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{-7\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{-7}{2}$

D) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

- En primer lugar dividimos cada uno de los ángulos entre 360°

$$\begin{array}{r|l} 6540^\circ & 360^\circ \\ \hline 360^\circ & 18 \\ \hline 2880 & \\ \hline 60^\circ & \end{array}$$

$$\operatorname{sen} 6540^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$\operatorname{sen} 6540^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 4290^\circ & 360^\circ \\ \hline 360^\circ & 11 \\ \hline 600 & \\ \hline 360 & \\ \hline 330^\circ & \end{array}$$

$$\operatorname{tg} 4290^\circ = \operatorname{tg} 330^\circ$$

$$\operatorname{tg} 4290^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 4290^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 7590^\circ & 360^\circ \\ \hline 720^\circ & 21 \\ \hline 360 & \\ \hline 360 & \\ \hline 30^\circ & \end{array}$$

$$\operatorname{sec} 7590^\circ = \operatorname{sec} 30^\circ$$

$$\operatorname{sec} 7590^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego

$$\frac{\operatorname{sen} 6540^\circ + \operatorname{sec} 7590^\circ}{\operatorname{tg} 4290^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \quad \text{Apta. C}$$

EJERCICIO 2° - Hallar el valor de "α" la que:

$$\operatorname{sen} (\operatorname{sen}^2 \theta) + \operatorname{sen} (\pi + \operatorname{sen} \alpha) = 0 \quad (I)$$

$$\operatorname{sen} (\cos^2 \theta) = \cos \frac{1}{2} (\pi - 2 \operatorname{sen} \alpha) \quad (II)$$

Resolución.

- La expresión (I) se puede escribir de la manera siguiente $\operatorname{sen} (\operatorname{sen}^2 \theta) + \operatorname{sen} (\operatorname{sen} \alpha) = 0$

donde: $\operatorname{sen} (\operatorname{sen}^2 \theta) = \operatorname{sen} (\operatorname{sen} \alpha)$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \operatorname{sen} \alpha \quad (I)$$

$$\operatorname{sen} (\pi + \theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

La expresión (i) se puede escribir de la manera siguiente $\sin(\cos^2 \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin \alpha\right)$

Por propiedad $\left(\cos^2 \theta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \sin \alpha\right) = 90^\circ \Rightarrow \cos^2 \theta = \sin \alpha \quad (II)$

Luego sumamos miembro a miembro (I) y (II)

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= (\sin \alpha) + (\sin \alpha) \\ 1 &= 2 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \\ \sin \alpha &= \sin \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Por comparación: $\alpha = \frac{\pi}{6}$ Rpta. A

Ejercicio 3 : Calcular el valor de

$$K = \frac{\sin(2\pi - x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos(2\pi - x)}$$

A) 0 B) 1 C) 2

D) -2 E) -1

Resolución

Sabemos que

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - x) &= -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x & \cos(2\pi - x) &= \cos x \end{aligned}$$

Luego, $K = \frac{-\sin x}{-\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow K = 2$ Rpta. C

Ejercicio 4 Simplificar

A) $2 \lg 40^\circ$ B) $2 \lg 50^\circ$ C) $3 \lg 50^\circ$

$$R = \frac{\sin 40^\circ \cdot \sin 220^\circ \cdot \sin 320^\circ}{\sin 130^\circ + \sin 230^\circ \cdot \sin 310^\circ}$$

D) $3 \lg 60^\circ$ E) $3 \lg 40^\circ$

Resolución.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \sin 220^\circ &= \sin(180^\circ + 40^\circ) = -\sin 40^\circ & \sin 320^\circ &= \sin(360^\circ - 40^\circ) = -\sin 40^\circ \\ \sin 130^\circ &= \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ & \sin 230^\circ &= \sin(180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ \\ \sin 310^\circ &= \sin(360^\circ - 50^\circ) = -\sin 50^\circ \end{aligned}$$

Luego:
$$R = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ (\operatorname{sen} 40^\circ) (\operatorname{sen} 40^\circ)}{(\operatorname{sen} 50^\circ) + (-\operatorname{sen} 50^\circ) - (-\operatorname{sen} 50^\circ)} = \frac{3 \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ}$$

$$R = \frac{3 \operatorname{sen} 40^\circ}{\cos 40^\circ} \Rightarrow R = 3 \tan 40^\circ \quad \text{Rpta. E}$$

Ejercicio 5 Sumar:

A) 0

B) 1

C) 2

$\operatorname{sen}^2 20^\circ + \operatorname{sen}^2 73^\circ + \operatorname{sen}^2 110^\circ + \operatorname{sen}^2 163^\circ$

D) 1

E) 3

Resolución:

Sabemos que:

$\operatorname{sen} 110^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 70^\circ)$

$\operatorname{sen} 163^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 17^\circ)$

$\operatorname{sen} 110^\circ = \operatorname{sen} 70^\circ$

$\operatorname{sen} 163^\circ = \operatorname{sen} 17^\circ$

$\operatorname{sen}^2 110^\circ = \operatorname{sen}^2 70^\circ$

$\therefore \operatorname{sen}^2 163^\circ = \operatorname{sen}^2 17^\circ$

Luego: $\operatorname{sen}^2 20^\circ + \operatorname{sen}^2 73^\circ + \operatorname{sen}^2 70^\circ + \operatorname{sen}^2 17^\circ$ **Por cofunción:**

$\operatorname{sen}^2 20^\circ + \operatorname{sen}^2 73^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 73^\circ$

$\operatorname{sen} 70^\circ = \cos 20^\circ$

$\operatorname{sen} 17^\circ = \cos 73^\circ$

Agrupamos términos

$(\operatorname{sen}^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\operatorname{sen}^2 73^\circ + \cos^2 73^\circ) = 2$

Rpta. C

Ejercicio 6 Efectuar

A) 1

B) 2

C) $\operatorname{sen} \theta$

$\operatorname{sen} \theta \cos \theta \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{cosec} \theta + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sec \theta \right]$

D) $\cos \theta$

E) $\operatorname{sen} \theta$

Resolución:

Sabemos que: $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$ $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \operatorname{sen} \theta$

Luego: $\operatorname{sen} \theta \cos \theta \left[\cos \theta \operatorname{cosec} \theta + \operatorname{sen} \theta \sec \theta \right]$

$\operatorname{sen} \theta \cos \theta \left[\cos \theta \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + \operatorname{sen} \theta \frac{1}{\cos \theta} \right]$

$\operatorname{sen} \theta \cos \theta \left[\frac{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \right] = \frac{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}{1} = 1 \quad \text{Rpta. A}$

Ejercicio 7 Simplificar

$$a^2 \sec 210^\circ + 4ab \sec 30^\circ + b^2 \csc 60^\circ + \csc 630^\circ + \sec 900^\circ + \lg^2 1470$$

$$A) a + \frac{b}{3} \quad B) \frac{a+b}{3} \quad C) a + \frac{b}{3}$$

$$D) \frac{(a-b)}{3} \quad E) \frac{a}{b}$$

Resolución.

$$\begin{aligned} \text{tenemos que: } \sec 210^\circ &= \sec [2(360^\circ + 90^\circ)] = \sec 90^\circ = 1 \\ \sec 390^\circ &= \sec (360^\circ + 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \csc 540^\circ &= \csc (360^\circ + 180^\circ) = \csc 180^\circ = 1 \\ \csc 630^\circ &= \csc (360^\circ + 270^\circ) = \csc 270^\circ = 1 \\ \lg 1140^\circ &= \lg [3(360^\circ) + 60^\circ] = \lg 60^\circ = \sqrt{3} \\ \sec 900^\circ &= \sec [2(360^\circ) + 180^\circ] = \sec 180^\circ = 1 \\ \lg^2 1470 &= \lg^2 [4(360^\circ) + 30^\circ] = \lg^2 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } R &= a^2 (1) + 4ab \left(\frac{1}{2} \right) + (-1) - b^2 (1) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ &= \frac{(a+b)^2}{3(a+b)} = \frac{(a+b)}{3} \end{aligned}$$

Apta. B

$$\text{Ejercicio 8 Calcular } F = \sec \frac{235\pi}{3} + \csc \frac{629\pi}{6} \quad A) 1 \quad B) 1 \quad C) 2 \quad D) 2 \quad E) 4$$

Resolución.

$$\begin{array}{r|l} 235\pi/3 & 2\pi = 6(\pi/3) \\ \hline 18 & 39 \\ 55 & \\ 54 & \\ 1 & 1\pi/3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 629\pi/6 & 2\pi = 12(\pi/6) \\ \hline 60 & 52 \\ 29 & \\ 24 & \\ 5 & 5\pi/6 \end{array}$$

$$\sec 235\pi/3 = \sec \boxed{1\pi/3} = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 629\pi/6 = \csc (5\pi/6) = 2$$

$$F = \sec \frac{235\pi}{3} + \csc \frac{629\pi}{6} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{F = 4} \quad \text{Apta. E}$$

Ejemplo 9 : Si $\sin 2000^\circ = K$,

Hallar $\cos 560^\circ$

- A) $\sqrt{1-k^2}$ B) $\sqrt{k^2-1}$ C) $-\sqrt{1-k^2}$
 D) $-\sqrt{k^2-1}$ E) $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

Resolución.

$$\begin{array}{r|l} 2000^\circ & 360^\circ \\ 1800 & 5 \\ \hline 200 & \end{array}$$

$$\sin 2000^\circ = \sin 200^\circ$$

$$K = \sin (180^\circ + 20^\circ)$$

$$K = -\sin 20^\circ$$

$$-K = \sin 20^\circ \quad (I)$$

$$\begin{array}{r|l} 560^\circ & 360^\circ \\ 360 & 1 \\ \hline 200 & \end{array}$$

$$\cos 560^\circ = \cos 200^\circ$$

$$\cos 560^\circ = \cos (180^\circ + 20^\circ)$$

$$\cos 560^\circ = -\cos 20^\circ \quad (II)$$

Por identidad pitagórica: $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$

Oblenemos que $\cos 20^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 20^\circ} \quad (III)$

Reemplazamos (I) en (I): $\cos 20^\circ = \sqrt{1 - (-K)^2} = \sqrt{1 - K^2} \quad (IV)$

Reemplazamos (IV) en (II): $\cos 560^\circ = -\cos 20^\circ = -\sqrt{1 - K^2}$

$$\cos 560^\circ = -\sqrt{1 - K^2} \quad \text{Rpta. C}$$

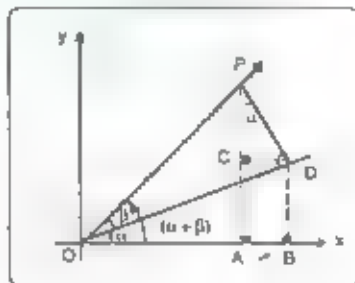
6.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

6.3.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS:

Sean los ángulos agudos α y β , desde un punto cualquiera P del lado terminal del ángulo β , tracemos PA perpendicular al Eje x, PD perpendicular al lado terminal del ángulo α .

Por D tracemos DC paralelo al eje x y DB perpendicular a dicho eje x de la figura.

$$\text{En el } \triangle OAP \quad \sin (\alpha + \beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AC + CP}{OP}$$



Pero: $AC = BD$ Luego: $\text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{BD + CP}{OP} = \frac{BD}{OP} + \frac{CP}{OP}$

Multiplicamos cada término por OD

Multiplicamos cada término por PD

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{BD}{OD} \cdot \frac{OD}{OP} + \frac{CP}{PD} \cdot \frac{PD}{OP} \quad (I)$$

En el $\triangle OBD$: $\frac{BD}{OD} = \text{sen } \alpha$	En el $\triangle ODP$: $\frac{OD}{OP} = \cos \beta$
En el $\triangle PCD$: $\frac{CP}{PD} = \cos \alpha$	En el $\triangle ODP$: $\frac{PD}{OP} = \text{sen } \beta$

Reemplazamos los valores hallados en (I):

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta \quad (\text{Fórmula})$$

De la figura obtenemos que en el $\triangle OAP$: $\cos (\alpha + \beta) = \frac{OA}{OP} = \frac{OB - AB}{OP}$ Pero $AB = CD$

Luego: $\cos (\alpha + \beta) = \frac{OB - CD}{OP} = \frac{OB}{OP} - \frac{CD}{OP}$

Multiplicamos cada término por OD

Multiplicamos cada término por PD

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{OB}{OD} \cdot \frac{OD}{OP} - \frac{CD}{PD} \cdot \frac{PD}{OP} \quad (II)$$

En el $\triangle OBD$: $\frac{OB}{OD} = \cos \alpha$	En el $\triangle ODP$: $\frac{OD}{OP} = \cos \beta$
En el $\triangle PCD$: $\frac{CD}{PD} = \text{sen } \alpha$	En el $\triangle ODP$: $\frac{PD}{OP} = \text{sen } \beta$

Reemplazamos los valores, hallados en (II):

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \quad (\text{Fórmula})$$

6.3.2 TANGENTE DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Sabemos que: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Dividiendo miembro a miembro, obtenemos: $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$ Dividimos el numerador y denominador del segundo miembro entre " $\cos \alpha \cos \beta$ "

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\left(\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)}{\left(\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\cos \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)}{\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \frac{\cos \beta}{\cos \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)}$$

(Fórmula)

$$\lg(\alpha + \beta) = \frac{\lg \alpha + \lg \beta}{1 - \lg \alpha \lg \beta}$$

6.3.3 COTANGENTE DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS:

Sabemos que: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Dividiendo miembro a miembro obtenemos: $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$ Dividimos el numerador y denominador del segundo miembro entre " $\sin \alpha \sin \beta$ "

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\left(\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)}{\left(\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)}$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \frac{\sin \beta}{\sin \beta} \right)}{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\sin \beta}{\sin \beta} \right)}$$

(Fórmula)

$$\cotg(\alpha + \beta) = \frac{\cotg \alpha \cotg \beta - 1}{\cotg \beta + \cotg \alpha}$$

6.3.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS.

Si en las formulas de $\sin(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ hacemos $\beta = -\beta$ tenemos:

$$a) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$\text{Recordemos que} \quad \cos(-\beta) = \cos \beta \text{ y } \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

$$\text{Luego} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{Fórmula})$$

$$b) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{Fórmula})$$

c) Tangente de la diferencia de dos ángulos

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{Fórmula})$$

d) Cotangente de la diferencia de dos ángulos

$$\cotg(\alpha - \beta) = \frac{\cotg \alpha \cotg \beta + 1}{\cotg \beta - \cotg \alpha} \quad (\text{Fórmula})$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS TIPO I.B.M.

Ejercicio 1: Calcular $\sin 75^\circ$

Resolución:

Sabemos que $75^\circ = (45^\circ + 30^\circ)$, ahora tomamos "sen" a ambos miembros

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Rpta

Ejercicio 2: Calcular $\cos 105^\circ$

Resolución:

Sabemos que $105^\circ = (60^\circ + 45^\circ)$, ahora, tomamos "cos" a ambos miembros

$$\cos 105^\circ = \cos (60^\circ + 45^\circ)$$

$$\cos 105^\circ = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \Rightarrow \cos 105^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \Rightarrow \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3: Calcular $\lg 82^\circ$

Resolución:

Sabemos que $82^\circ = (45^\circ + 37^\circ)$, ahora, tomamos "tg" a ambos miembros

$$\lg 82^\circ = \lg (45^\circ + 37^\circ)$$

$$\lg 82^\circ = \frac{\lg 45^\circ + \lg 37^\circ}{1 + \lg 45^\circ \lg 37^\circ} \Rightarrow \lg 82^\circ = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{1 \times 3}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}} = 1 \Rightarrow \lg 82^\circ = 1 \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 4: Si: $\lg (45^\circ + x) = 2$ Hallar "lg x"

Resolución

De la condición: $\lg (45^\circ + x) = 2$, obtenemos:

$$\lg 45^\circ + \lg x = 2, \text{ pero } \lg 45^\circ = 1$$

$$1 + \lg x = 2$$

$$\frac{1 + \lg x}{1 + \lg x} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \lg x}{1 + \lg x} = 2 \Rightarrow 1 + \lg x = 2(1 + \lg x)$$

$$1 + \lg x = 2 + 2 \lg x \Rightarrow 3 \lg x = 1 \Rightarrow \lg x = \frac{1}{3} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 5: Calcular el valor de $\cos (A+B)$, si $\sin A = \frac{5}{13}$ y $\cos B = \frac{4}{5}$, A y $B \in Q$

Resolución:

Sabemos que: $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ (I)

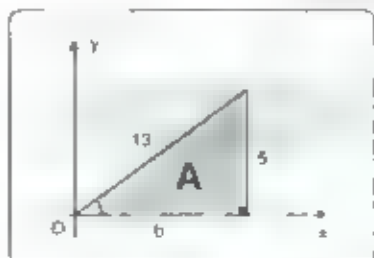
De la condición: $\operatorname{sen} A = \frac{5}{13}$, $A \in Q_1$

• Por el teorema de Pitágoras

$$13^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow 169 = 25 + b^2$$

$$144 = b^2 \Rightarrow \sqrt{144} = b \Rightarrow \therefore 12 = b$$

Luego: $\cos A = \frac{b}{13} \Rightarrow \cos A = \frac{12}{13}$



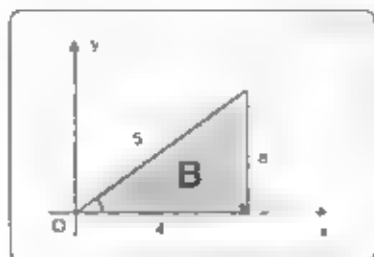
De la condición: $\cos B = \frac{4}{5}$; $B \in Q_1$

• Por el teorema de Pitágoras

$$5^2 = a^2 + 4^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16$$

$$9 = a^2 \Rightarrow \sqrt{9} = a \Rightarrow \therefore 3 = a$$

Luego: $\operatorname{sen} B = \frac{a}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{3}{5}$



Reemplazando valores en (I), obtenemos

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \Rightarrow \cos(A+B) = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\cos(A+B) = \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65} \Rightarrow \cos(A+B) = \frac{33}{65} \quad \text{Apta.}$$

Ejercicio 6 Calcular $\cos(A+B)$ Si: $\cos A = \frac{12}{13}$, $A \in Q_2$ y $\cotg B = \frac{5}{12}$, $B \in Q_3$

Resolución.

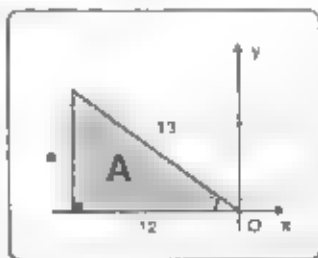
Sabemos que $\cos(A+B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ (I)

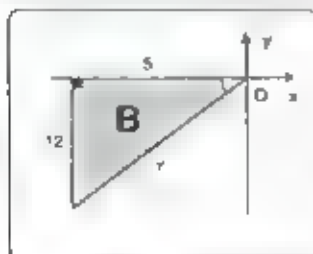
De la condición: $\cos A = -\frac{12}{13}$, $A \in Q_2$

• Por el teorema de Pitágoras.

$$13^2 = (-12)^2 + a^2 \Rightarrow 169 = 144 + a^2$$

$$25 = a^2 \Rightarrow \sqrt{25} = a \Rightarrow 5 = a$$





Luego, $\sin A = \frac{b}{13} \Rightarrow \sin A = \frac{5}{13}$

De la condición $\cotg B = \frac{5}{12}$, $B < 90^\circ$

Por el teorema de Pitágoras $r^2 = (-5)^2 + (-12)^2$
 $r^2 = 25 + 144 \Rightarrow r^2 = 169$
 $r = \sqrt{169} \Rightarrow r = 13$

Luego, $\sin B = \frac{-12}{13} \Rightarrow \sin B = \frac{-12}{13}$, $\cos B = \frac{-5}{13} \Rightarrow \cos B = \frac{-5}{13}$
 Reemplazando valores en (I), obtenemos

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) + \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$\cos(A-B) = \frac{60}{169} + \frac{60}{169} = 0 \Rightarrow \cos(A-B) = \text{Cero} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 7 Se sabe que: $\lg(A-B) = \frac{1}{3}$, $\lg(B-C) = \frac{1}{5}$. Hallar el valor de $\lg(A-C)$

Resolución.

De la condición: $\lg(A-B) = \frac{1}{3}$, hacemos $A-B = \alpha$ (I) $\lg \alpha = \frac{1}{3}$ (1)

De la condición $\lg(B-C) = \frac{1}{5}$ hacemos $B-C = \theta$ (II) $\lg \theta = \frac{1}{5}$ (2)

Sumamos miembro a miembro las expresiones (I) y (II)

Σ M.A.M. $A-C = \alpha + \theta$, tomamos "lg" a ambos miembros

$$\lg(A-C) = \lg(\alpha + \theta)$$

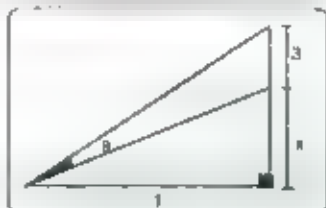
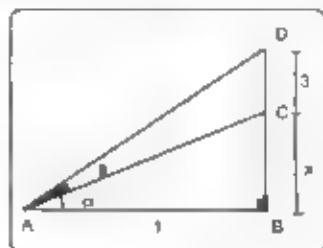
$$\lg(A-C) = \frac{\lg \alpha + \lg \theta}{1 + \lg \alpha \lg \theta} \quad \text{(III)}$$

Reemplazamos (1) y (2) en (III). $\lg(A-C) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{5+3}{15}}{1 + \frac{1}{15}} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{16}{15}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
 Rpta.

Ejercicio 8 En la figura, hallar "x"

Si se cumple: $\lg \theta = \frac{8}{11}$

Resolución:



De la figura: $\lg(\alpha + \theta) = \frac{3+x}{1}$

$\frac{\lg \alpha + \lg \theta}{1 - \lg \alpha \lg \theta} = (3+x)$. Pero $\lg \theta = \frac{3}{11}$

Además en el $\triangle ABC$ $\lg \alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow \lg \alpha = x$

Reemplazando valores obtenemos:

$$\frac{x + \frac{3}{11}}{1 - x \cdot \frac{3}{11}} = (3+x) \Rightarrow \frac{\left(\frac{11x+3}{11}\right)}{\left(\frac{11-3x}{11}\right)} = (3+x)$$

$$(11x+3) = (3+x)(11-3x) \Rightarrow 11x+3 = 33+2x-3x^2$$

$$3x^2 + 9x = 30 \Rightarrow x^2 + 3x = 10 \text{ (Sacamos tercia a cada término)}$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \text{ , (factorizamos por el método del aspa)}$$

$$\begin{array}{c} x \quad +2 \\ x \quad +5 \end{array}$$

Luego $(x-2)(x+5) = 0$, igualamos cada factor a cero

1) $x-2=0 \Rightarrow x=2$ (Cumple) , 2) $x+5=0 \Rightarrow x=-5$ (No cumple pues el segmento "x" no puede ser negativo)



TALLER DE EJERCICIOS N° 22

A. Sin emplear tablas ni calculadora, Calcular el valor de

Ejercicio 1 $\sin 97^\circ = ?$

Resolución.

$$\sin 97^\circ = \sin(60^\circ + 37^\circ)$$

$$\sin 97^\circ = \sin 60^\circ \cos 37^\circ + \cos 60^\circ \sin 37^\circ$$

$$\sin 97^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}+3}{10}$$

Rpta. 1/10

Ejercicio 2 $\lg 8^\circ = ?$

Resolución.

Rpta. 1/7

Ejercicio 3 $\cotg 75^\circ = ?$

Resolución:

$$\text{Rpta. } (2 - \sqrt{3})$$

Ejercicio 4 $\sin 69^\circ = ?$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \frac{117}{125}$$

B. Simplificar las siguientes expresiones.

Ejercicio 1 $\sin (60^\circ + \alpha) + \cos (30^\circ + \alpha)$

Resolución:

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \sin (60^\circ + \alpha) &= \sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (30^\circ + \alpha) &= \cos 30^\circ \cos \alpha - \sin 30^\circ \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \quad (II) \end{aligned}$$

Sumamos miembro a miembro (I) y (II).

$$\sin (60^\circ + \alpha) + \cos (30^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right)$$

$$\text{Rpta. } = \sqrt{3} \cos \alpha$$

Ejercicio 2 $\sin (60^\circ + \alpha) - \sin (30^\circ + \alpha)$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

Ejercicio 3 $\sin (45^\circ + \alpha) - \cos (45^\circ + \alpha)$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \sqrt{2} \sin \alpha$$

Ejercicio 4 $\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

C. Reduzca las expresiones siguientes a un sólo término:

Ejercicio 1 $\cdot \sin 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 70^\circ \sin 10^\circ$

Resolución:

$$\sin 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 70^\circ \sin 10^\circ = \sin (70^\circ + 10^\circ)$$

Rpta. $= \sin 80^\circ$

Ejercicio 2 $\cdot \cos 65^\circ \cos 25^\circ - \sin 65^\circ \sin 25^\circ$

Resolución:

Rpta.

Ejercicio 3 $\cos 9A \cos 2A + \sin 9A \sin 2A$

Resolución:

Rpta.

Ejercicio 4 $\cdot \sin 48^\circ \cos 46^\circ - \cos 48^\circ \sin 46^\circ$

Resolución:

Rpta.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ANGULOS COMPUESTOS TIPO I.B.M.

Ejercicio 1: Siendo $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ($\theta \in Q_2$) y $\operatorname{tg} x = \frac{7}{24}$ ($x \in Q_1$). Hallar el valor de $\cos (\theta + x)$

A) $\frac{332}{525}$

B) $\frac{325}{523}$

C) $\frac{323}{325}$

D) $\frac{323}{532}$

E) $\frac{233}{532}$

Resolución:

$$\sin \theta = \frac{5}{13} \quad (\theta \in Q_2)$$

• Por el teorema de Pitágoras

$$OQ^2 = 13^2 - 5^2$$

$$OQ^2 = 144 \quad OQ = 12$$

$$\text{Luego: } \cos \theta = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{7}{24} \quad (x \in Q_1)$$

• Por el teorema de Pitágoras

$$NO^2 = 7^2 + 24^2$$

$$NO^2 = 625 \quad NO = 25$$

Luego

$$\sin x = \frac{7}{25} \quad \cos x = \frac{24}{25}$$

Ahora, hallamos el valor de: $\cos(\theta + x)$

$$\cos(\theta + x) = \cos \theta \cos x - \sin \theta \sin x$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\cos(\theta + x) = \left(\frac{12}{13}\right) \left(\frac{-24}{25}\right) - \left(\frac{5}{13}\right) \left(\frac{-7}{25}\right) = \frac{288 + 35}{325} = \frac{323}{325} \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 2. Simplificar $M = \sin 50^\circ - 2 \cos 40^\circ \sin 10^\circ$

A) $-\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 1

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$M = \sin(40^\circ + 10^\circ) - 2 \cos 40^\circ \sin 10^\circ$$

$$M = \sin 40^\circ \cos 10^\circ + \cos 40^\circ \sin 10^\circ - 2 \cos 40^\circ \sin 10^\circ$$

$$M = \sin 40^\circ \cos 10^\circ - \cos 40^\circ \sin 10^\circ = \sin(40^\circ - 10^\circ)$$

$$M = \sin 30^\circ \Rightarrow$$

$$M = \frac{1}{2}$$

Rpta. B

Ejercicio 3. En la figura Hallar "x"

Se cumple: $\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{3}$

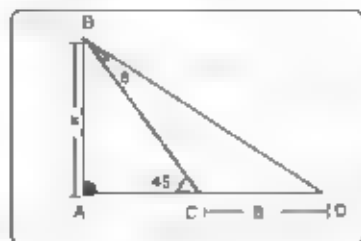
A) 1

B) 3

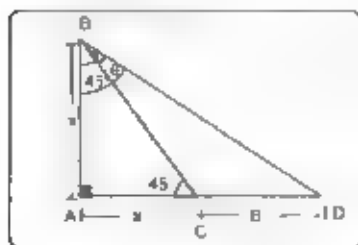
C) 4

D) 2

E) 5



Resolución.



En el $\triangle BAD$: $\operatorname{tg}(45^\circ + \theta) = \frac{AD}{BA} = \frac{x+3}{x}$

$$\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \theta} = \frac{x+3}{x}$$

Pero: $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Luego $\frac{1 + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 5x = x+3 \Rightarrow \therefore x = \frac{3}{4}$ Rpta. D

Ejercicio 4 Calcular el valor de $E = \sin 60^\circ \lg 40^\circ (\lg 70^\circ + \lg 20^\circ)$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) 1

D) $\sqrt{3}$

E) 2

Resolución.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \lg (70^\circ \cdot 20^\circ) &= \lg 50^\circ \\ \lg 70^\circ + \lg 20^\circ &= \lg 50^\circ \quad \text{pero} \quad \lg 20^\circ = \cotg 70^\circ \\ 1 + \lg 70^\circ \lg 20^\circ &= \lg 50^\circ \\ \frac{\lg 70^\circ - \lg 20^\circ}{1 + \lg 70^\circ \cotg 70^\circ} &= \lg 50^\circ \Rightarrow \lg 70^\circ - \lg 20^\circ = 2 \lg 50^\circ \quad (i) \end{aligned}$$

(1)

Reemplazamos (i) en la expresión "E"

$$E = \sin 60^\circ \lg 40^\circ [2 \lg 50^\circ] \quad \text{pero} \quad \lg 50^\circ = \cotg 40^\circ$$

$$E = 2 \sin 60^\circ \lg 40^\circ \cotg 40^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{E = \sqrt{3}} \quad \text{Rpta. D}$$

(1)

Ejercicio 5 Reducir $Q = (\sin \alpha - \cos \alpha) (\cos \theta - \sin \theta) - \sin (\alpha + \theta)$

A) $\cos (\alpha - \theta)$

B) $\cos (\alpha - \theta)$

C) $\cos (\pi + \theta)$

D) $\cos (\alpha + \theta)$

E) N.A.

Resolución.

Efectuando el producto indicado por los paréntesis, obtenemos

$$Q = \sin \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta - \sin (\alpha + \theta)$$

$$Q = \sin \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta - (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta)$$

$$Q = -\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta = -(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta)$$

$$Q = -\cos (\alpha - \theta) \quad \text{Rpta. A}$$

Ejercicio 6 Calcular "lg θ" si: $\sin (\alpha - \theta) = a \cos \alpha \cos \theta$ y $\lg \alpha = b(1 - \lg \theta)$

A) $\frac{a+b}{a+1}$

B) $\frac{a+b}{b+1}$

C) $\frac{b-a}{a+1}$

D) $\frac{b-a}{b+1}$

E) $\frac{a+b}{a-b}$

Resolución:

De la expresión $\frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \alpha \cos \theta} = a \cos \alpha \cos \theta$ obtenemos

$$\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta = a \cos \alpha \cos \theta$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta}{\cos \alpha \cos \theta} = a$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = a$$

$$\lg \alpha + \lg \theta = a \Rightarrow \lg \alpha = a + \lg \theta \quad (i)$$

Reemplazamos (i) en la expresión

$$\lg \alpha = b(1 - \lg \theta)$$

$$a + \lg \theta = b - b \lg \theta \Rightarrow \lg \theta + b \lg \theta = b - a$$

$$\lg \theta (1 + b) = b - a \Rightarrow$$

$$\lg \theta = \frac{b-a}{1+b} \quad \text{Rpta. D}$$

Ejercicio 7. De la figura mostrada Calcular el valor de: $E = x^2 \cotg \theta$

- A) 16 B) 20 C) 24
D) 28 E) 32

Resolución

• En el $\triangle BAE$

$$\lg \alpha = \frac{EA}{AB} = \frac{2}{6} \Rightarrow \lg \alpha = \frac{2}{3} \quad (i)$$

• En el $\triangle CAB$

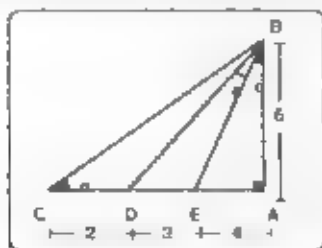
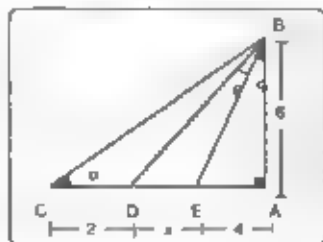
$$\lg \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{6+x} \Rightarrow \lg \alpha = \frac{6}{6+x} \quad (ii)$$

Igualemos las expresiones (i) y (ii):

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{6+x} \Rightarrow 12 + 2x = 18 \Rightarrow x = 3$$

• En el $\triangle BAD$ $\lg(\alpha + \theta) = \frac{DA}{BA} = \frac{7}{6}$

$$\frac{\lg \alpha + \lg \theta}{1 + \lg \alpha + \lg \theta} = \frac{7}{6} \quad (iii)$$



Reemplazamos (I) en (III)

$$\frac{2 + \operatorname{tg} \theta}{3} = \frac{7}{6}$$

$$6 \left(\frac{2 + \operatorname{tg} \theta}{3} \right) = 7 \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \theta \right)$$

$$4 + 6 \operatorname{tg} \theta = 7 - \frac{14}{3} \operatorname{tg} \theta \Rightarrow 12 + 18 \operatorname{tg} \theta = 21 - 14 \operatorname{tg} \theta$$

$$32 \operatorname{tg} \theta = 9 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{9}{32}$$

Luego, calculamos el valor de "E": $E = x^2 \cot \theta = x^2 \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = 3^2 \frac{1}{\left(\frac{9}{32} \right)} = 32$

$$E = 32 \quad \text{Rpta E}$$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

NIVEL I

Ejercicio 1 Reducir

$$E = \frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

A) $\operatorname{tg} a$ B) $\operatorname{tg} b$ C) $\cot g a$ D) $\cot g b$ E) 1

Ejercicio 2 Simplificar

$$M = \frac{\operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x}{\cos 2x \cos x + \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x}$$

A) 1 B) $\operatorname{tg} x$ C) $\operatorname{tg} 3x$ D) $\operatorname{tg} 2x$ E) $\cot g x$

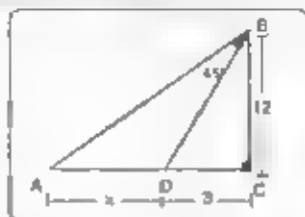
Ejercicio 3 Reducir

$$K = \frac{\operatorname{sen} 50^\circ \cos 20^\circ + \cos 50^\circ \operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 40^\circ \cos 10^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 10^\circ}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$ Ejercicio 4 Si $\operatorname{sen} \theta = 3/5$, $\cos \alpha = 4/5$
Calcular el valor de " $\operatorname{tg}(\theta - \alpha)$ "A) 1 B) 0 C) $\frac{24}{25}$ D) $\frac{1}{5}$ E) 2Ejercicio 5 Si $\cos \alpha = 1/2$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Calcular el valor de " $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ "A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) N.A.

Ejercicio 6 Calcular el valor de "x" en la figura mostrada.

- A) 9
B) 11
C) 13
D) 15
E) 17



Ejercicio 7 Reducir $E = \frac{\operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 3x}$

- A) $\operatorname{tg} 3x$ B) $\operatorname{tg} 2x$ C) $\operatorname{cotg} x$
D) $\operatorname{cotg} 2x$ E) N.A.

Ejercicio 6 Simplificar

$$M = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y} + \operatorname{tg}(-y)$$

- A) $\operatorname{tg} y$ B) $\operatorname{tg} x$ C) $\operatorname{cotg} x$
D) $\operatorname{cotg} y$ E) N.A.

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. C	4. B
5. B	6. E	7. B	8. B

NIVEL II

Ejercicio 3 Siendo $\operatorname{tg} A = \frac{15}{8}$, ($A \in Q_1$)

y $\sec B = \frac{5}{4}$, ($B \in Q_4$). Hallar " $\cos(A-B)$ "

- A) $\frac{76}{85}$ B) $\frac{66}{85}$ C) $\frac{77}{85}$ D) $\frac{85}{77}$ E) N.A.

Ejercicio 4 Siendo $\operatorname{tg} A = \frac{-24}{7}$, ($A \in Q_2$)

y $\sec B = \frac{17}{15}$, ($B \in Q_3$). Hallar " $\cos(A+B)$ "

- A) $\frac{279}{504}$ B) $\frac{297}{450}$ C) $\frac{279}{450}$ D) $\frac{297}{405}$ E) N.A.

Ejercicio 5 Simplificar

$$E = \frac{\operatorname{sen}(45^\circ + x) \cos(45^\circ + y)}{\operatorname{sen}(x-y) + \cos(x+y)}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 6 Si $\operatorname{tg} a = (2\sqrt{2} + 1)$ y

$\operatorname{tg} b = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Hallar " $\operatorname{tg}(a+b)$ "

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) -1 D) 0 E) $-\sqrt{2}$

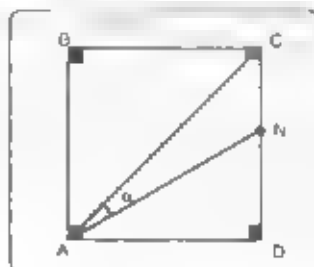
Ejercicio 7 Reducir

$$E = \operatorname{sen}(60^\circ + x) + \operatorname{sen}(60^\circ - x) + \cos(30^\circ + x) + \cos(30^\circ - x)$$

- A) $2 \cos x$ B) $\sqrt{3} \cos x$ C) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} x$
D) $2\sqrt{3} \cos x$ E) $4\sqrt{3} \cos x$

Ejercicio 8 En la figura. Calcular " $\operatorname{tg} \alpha$ ", siendo ABCD un cuadrado y "N" es punto medio de CD

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$
E) $\frac{1}{5}$



Ejercicio Si $\operatorname{tg}(A+B) = 1/2$, $\lg(C+B) = 1/2$. Hallar el valor de " $\operatorname{tg}(A+C)$ ".

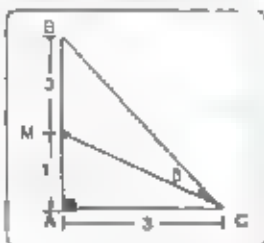
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

Ejercicio Si $\cos \theta = 0.6$, $\operatorname{tg} z = 0.75$. Además $\theta \in Q_1$ y $z \in Q_3$. Calcular el valor de $\sin(\theta+z)$.

- A) -1 B) -0.8 C) -0.25 D) 0.5 E) 0.8

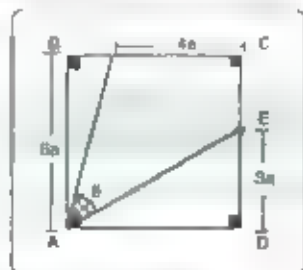
Ejercicio En la figura Calcular $\operatorname{tg} \beta$.

- A) $\frac{7}{13}$ B) $\frac{9}{13}$
C) $\frac{13}{9}$ D) $\frac{9}{15}$
E) $\frac{15}{9}$



Ejercicio Del gráfico Calcular " $\operatorname{tg} \theta$ ", ABCD es un cuadrado.

- A) 1
B) 2
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$
E) 3



Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. A	4. C	5. D
6. B	7. C	8. A	9. B	10. A

NIVEL III

Ejercicio Reducir la expresión:

$$E = \frac{\sin(A+B)}{\operatorname{cosec} B} + \frac{\cos(A+B)}{\sec B}$$

- A) $\sin A$ B) $\cos A$ C) $\sin B$
D) $\cos B$ E) $\sin A \cos B$

Ejercicio Siendo $\lg \alpha + \lg \theta = 2$, a qué es igual la expresión:

$$M = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha-\theta)}$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Ejercicio Si $\operatorname{tg}(a+16^\circ) = \frac{31}{17}$. Hallar " $\sin a$ ".

- A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\pm \frac{1}{2}$ E) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio Si $(\cos 15^\circ + \sin a)(\cos 15^\circ - \sin a) = p$. Calcular el valor de

$$E = \operatorname{tg}(15^\circ + a) + \operatorname{tg}(15^\circ - a)$$

- A) p B) 2p C) $\frac{1}{2p}$ D) $\frac{1}{p}$ E) N.A.

Ejercicio Sabiendo que:

$$\operatorname{tg}(2x+y) = 3 \quad \operatorname{tg}(y-2x) = 2 \quad \text{Hallar } \operatorname{tg} 2y$$

- A) 1 B) 6 C) 5 D) 4 E) $-\frac{1}{2}$

Ejercicio 11 Si $\operatorname{tg} a = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} b = \frac{1}{4}$, tg

$(a + b) = \frac{1}{5}$ Hallar " $\operatorname{tg}(a + c)$ "

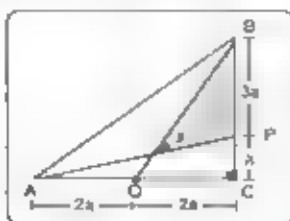
A) $\frac{25}{24}$ B) $\frac{24}{23}$ C) $\frac{23}{24}$ D) $\frac{23}{25}$ E) N.A.

Ejercicio 12 De la figura mostrada, Calcular el valor de " $\operatorname{tg} x$ "

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$

C) 1 D) $\frac{7}{6}$

E) $\frac{3}{2}$



Ejercicio 13 Calcular el valor de

$$K = \frac{\operatorname{tg} 54^\circ \operatorname{tg} 36^\circ}{\operatorname{tg} 18^\circ}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Ejercicio 14 Si $\operatorname{tg}(b - c) = 1$, y $\operatorname{tg}(a - b) = \frac{m+n}{m-n}$, Hallar " $\operatorname{tg}(a - c)$ "

A) $\frac{m}{n}$ B) $-\frac{m}{n}$ C) $-\frac{n}{m}$ D) $\frac{2m}{n}$ E) $\frac{2n}{m}$

Ejercicio 15 Calcular el valor de

$$E = \frac{\operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ \cos 50^\circ}{\sqrt{2} \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{sen} 5^\circ}$$

A) 1 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 2

Ejercicio 16 De la figura mostrada, Hallar " $\operatorname{tg} \beta$ "

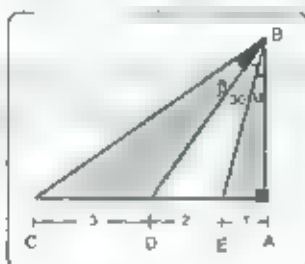
A) $3\sqrt{3}$

B) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

E) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$



Ejercicio 17 Si $\operatorname{cotg} x = 1 + \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} y$ Hallar el valor de

$$M = \frac{2 \cos(x - y)}{\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)}$$

A) 1,732

B) 2,732

C) 0,732

D) 1,414

E) 2,414

Ejercicio 18 Si: $\operatorname{tg} x = \frac{\cos B}{1 - \operatorname{sen} A}$ y $\operatorname{tg} y =$

$\frac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A}$, Hallar " $\operatorname{sen}(x - y)$ "

A) $\operatorname{sen} A$ B) $\cos A$ C) $\operatorname{tg} A$ D) $\operatorname{cotg} A$ E) $\sec A$

Clave de Respuestas

1 B	2 C	3 C	4 C	5 D
6 C	7 D	8 D	9 B	10 D
11 B	12 B	13 A		



EXERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1 Reducir

$$\sin(\theta + 60^\circ) - \cos(\theta + 30^\circ)$$

A) 1

B) 2

C) $\sin \theta$ D) $\cos \theta$ E) $1/2$

Resolución:

Sabemos que $\Rightarrow \sin(\theta + 60^\circ) = \sin \theta \cos 60^\circ + \cos \theta \sin 60^\circ \Rightarrow \sin \theta \frac{1}{2} + \cos \theta \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin(\theta + 60^\circ) = \frac{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta + 30^\circ) = \cos \theta \cos 30^\circ - \sin \theta \sin 30^\circ \Rightarrow \cos \theta \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \theta \frac{1}{2}$$

$$\cos(\theta + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}{2}$$

Luego:

$$\sin(\theta + 60^\circ) - \cos(\theta + 30^\circ) = \frac{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}{2} - \frac{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}{2}$$

$$\sin(\theta + 60^\circ) - \cos(\theta + 30^\circ) = \frac{2 \sin \theta}{2} \Rightarrow \boxed{\sin \theta} \text{ Rpta. C}$$

Ejercicio 2. Dada la condición. $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4} + \operatorname{tg} b$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$

Calcular el valor de: $\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

Resolución.

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b} \Rightarrow \frac{\sin a \cancel{\cos b} - \cos a \sin b}{\cos a \cancel{\cos b} \cdot \cancel{\cos b}} = \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b \quad (I)$$

De la condición: $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4} + \operatorname{tg} b \Rightarrow \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{3}{4} \quad (II)$

Reemplazando (II) en (I), obtenemos que: $\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = \boxed{\frac{3}{4}} \text{ Rpta. D}$

Ejercicio 3 Calcular el valor de

A) 0

B) 1

C) 2

$$A = \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} - \operatorname{tg} 40^{\circ}}{\operatorname{tg} 10^{\circ}}$$

D) 3

E) 4

Resolución.

Sabemos que: $50^{\circ} - 40^{\circ} = 10^{\circ}$, tomamos la función "tg" a ambos miembros.

$$\operatorname{tg}(50^{\circ} - 40^{\circ}) = \operatorname{tg} 10^{\circ}$$

$$\operatorname{tg} 50^{\circ} - \operatorname{tg} 40^{\circ} = \operatorname{tg} 10^{\circ} \quad \text{pero } \operatorname{tg} 40^{\circ} = \operatorname{cotg} 50^{\circ}$$

$$\frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} - \operatorname{tg} 40^{\circ}}{1 + \operatorname{tg} 50^{\circ} \operatorname{cotg} 50^{\circ}} = \operatorname{tg} 10^{\circ}$$

Por Propiedad:
 $\operatorname{tg} \theta \operatorname{cotg} \theta = 1$

①

$$\frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} - \operatorname{tg} 40^{\circ}}{2} = \operatorname{tg} 10^{\circ} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} - \operatorname{tg} 40^{\circ}}{\operatorname{tg} 10^{\circ}} = 2 \Rightarrow \boxed{A = 2} \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 4 Calcular el valor de:

A) 2

B) 1

C) 0

$$B = \frac{2 \operatorname{tg} 50^{\circ} + \operatorname{tg} 20^{\circ}}{\operatorname{tg} 70^{\circ}}$$

D) 1

E) 2

Resolución.

La expresión "B" se puede escribir de la manera siguiente: $B = \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} + \operatorname{tg} 20^{\circ}}{\operatorname{tg} 70^{\circ}} + \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ}}{\operatorname{tg} 70^{\circ}} \quad (I)$

Pero: $70^{\circ} = 50^{\circ} + 20^{\circ}$, tomamos la función "tg" a ambos miembros.

$$\operatorname{tg}(70^{\circ}) = \operatorname{tg}(50^{\circ} + 20^{\circ})$$

$$\operatorname{tg} 70^{\circ} = \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} + \operatorname{tg} 20^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 50^{\circ} \operatorname{tg} 20^{\circ}} \Rightarrow 1 - \operatorname{tg} 50^{\circ} \operatorname{tg} 20^{\circ} = \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} + \operatorname{tg} 20^{\circ}}{\operatorname{tg} 70^{\circ}}$$

Esta última expresión lo reemplazamos en (I), obteniendo:

$$B = 1 - \operatorname{tg} 50^{\circ} \operatorname{tg} 20^{\circ} + \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ}}{\operatorname{tg} 70^{\circ}} \quad \text{pero } \operatorname{tg} 70^{\circ} = \operatorname{cotg} 20^{\circ}$$

$$B = 1 - \operatorname{tg} 50^{\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{cotg} 20^{\circ}} + \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ}}{\operatorname{cotg} 20^{\circ}}$$

$$B = 1 - \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ}}{\operatorname{cotg} 20^{\circ}} + \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ}}{\operatorname{cotg} 20^{\circ}} \Rightarrow \boxed{B = 1} \quad \text{Rpta. D}$$

Ejercicio 5 Si " α " y " β " son ángulos agudos además $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{3} \sin \beta \cos \alpha$

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B) $\sqrt{5}$

C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Calcular " $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ".

D) 1

E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Resolución.

La expresión $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{3} \sin \beta \cos \alpha$ se puede escribir de la manera siguiente

$$\underbrace{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}_{\frac{2}{3}} = \sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3} \quad (I)$$

Aplicando la identidad $\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}$ obtenemos que

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} \quad (II)$$

Reemplazando (I) en (II): $\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (III)$

Luego: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \quad (IV)$

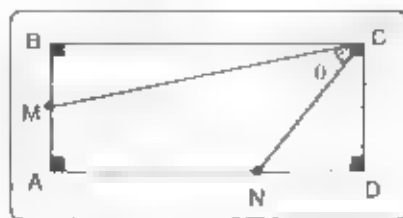
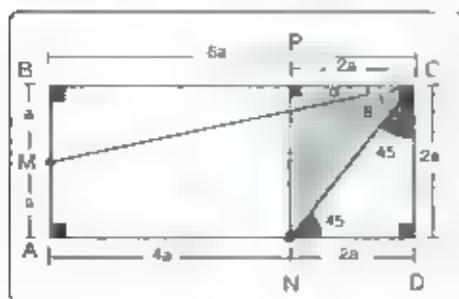
Reemplazando (I) y (III) en (IV) obtenemos $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ Rpta. A

Ejercicio 6 En la figura, Calcular " $\operatorname{tg} \theta$ ".

Siendo $BC = 3ND = 6BM$, además, $BM = AM$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

Resolución.



De la condición,

$$BC = 3ND = 6BM, \text{ hacemos } BM = a$$

$$\text{De (1)} \quad 3ND = 6BM \Rightarrow 3ND = 6a \quad ND = 2a$$

$$\text{De (2)} \quad BC = 6BM \Rightarrow BC = 6a$$

• De la figura $\alpha + \theta = 45^\circ$ tomamos la función "tg" a ambos miembros

$$\frac{\text{tg } (\alpha + \theta)}{1} = \frac{\text{tg } 45^\circ}{1}, \text{ pero } \text{tg } 45^\circ = 1$$

$$\frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \theta}{1 + \text{tg } \alpha \text{ tg } \theta} = 1 \Rightarrow \text{tg } \alpha + \text{tg } \theta = 1 + \text{tg } \alpha \text{ tg } \theta \quad (I)$$

*) En el \triangle MAC $\text{tg } \alpha = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{1}{6} \quad (II)$

Reemplazamos (II) en (I): $\frac{1}{6} + \text{tg } \theta = 1 + \frac{1}{6} \text{tg } \theta \Rightarrow \frac{7}{6} \text{tg } \theta = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{5}{7}$ Rpta. B

Ejercicio 7 Simplificar:

$$\frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)(\text{cotg } \alpha + \text{cotg } \beta)}{(\text{tg } \alpha - \text{cotg } \alpha) + (\text{tg } \beta - \text{cotg } \beta)}$$

A) $\text{tg } (\alpha + \beta)$

B) $\cos (\alpha + \beta)$

C) $-\text{cotg } (\alpha + \beta)$

D) $-\text{tg } (\alpha + \beta)$

E) 1

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta) \left(\frac{1}{\text{tg } \alpha} + \frac{1}{\text{tg } \beta} \right)}{\left(\text{tg } \alpha - \frac{1}{\text{tg } \alpha} \right) + \left(\text{tg } \beta - \frac{1}{\text{tg } \beta} \right)} = \frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta) \left(\frac{\text{tg } \beta + \text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta} \right)}{\left(\frac{\text{tg}^2 \alpha - 1}{\text{tg } \alpha} \right) + \left(\frac{\text{tg}^2 \beta - 1}{\text{tg } \beta} \right)}$$

A los términos del denominador de esta última fracción les damos denominador veamos

$$\frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta) \left(\frac{\text{tg } \beta + \text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta} \right)}{\left(\frac{\text{tg}^2 \alpha - 1}{\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta} + \frac{\text{tg } \alpha (\text{tg}^2 \beta - 1)}{\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta} \right)} = \frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)^2}{\text{tg}^2 \alpha \text{ tg } \beta + \text{tg } \beta + \text{tg } \alpha \text{ tg}^2 \beta - \text{tg } \alpha}$$

En el denominador de esta última expresión factorizamos

$$\frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)^2}{\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta) (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)} = \frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)^2}{(\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta + \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta + 1) (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)}$$

$$\frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)}{(\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta + 1)} = \frac{(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)}{(1 + \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta)} = \text{tg } (\alpha + \beta) \quad \text{Rpta. D}$$

Ejercicio 8 Si $\frac{1}{\text{tg } a + \text{tg } b} + \frac{1}{\text{cotg } a + \text{cotg } b} = \sqrt{3}$

A) 30° B) 45° C) 60°

Hallar el valor de: $(a + b)$

D) 90° E) 22.5°

Resolución.

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente

$$\frac{1}{\lg a + \lg b} - \frac{1}{\left(\frac{1}{\lg a} + \frac{1}{\lg b} \right)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\lg a + \lg b} - \frac{\lg a \lg b}{\lg a + \lg b} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1 - \lg a \lg b}{\lg a + \lg b} = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \text{Invertimos las fracciones en ambos miembros}$$

$$\frac{\lg a + \lg b}{1 - \lg a \lg b} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\lg(a+b)} = \frac{1}{\lg 30^\circ} \Rightarrow \{a+b\} = 30^\circ \quad \text{Rpta. A}$$

Ejercicio 9 Si $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 45^\circ$ Calcular

A) 1

B) $1/2$ C) $\lg 0^\circ$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\lg 60^\circ$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

Resolución.

De la expresión $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$ obtenemos

$$(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) +$$

$$(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

Por diferencia de cuadrados, $(A \cdot B) (A + B) = A^2 - B^2$

$$\left[(\cos \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \alpha \sin \beta)^2 \right] + \left[(\sin \alpha \cos \beta)^2 - (\cos \alpha \sin \beta)^2 \right]$$

Ordenamos términos de la manera siguiente

$$\left[(\sin \alpha \cos \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta)^2 \right] - \left[(\sin \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \sin \beta)^2 \right]$$

$$\left[\cos^2 \beta (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1}) \right] - \left[\sin^2 \beta (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1}) \right]$$

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 0 = \lg 0^\circ \quad \text{Rpta. C}$$

EJERCICIO 10 Simplificar

A) 1

B) 0

C) -1

$$E = \sec B \operatorname{cosec} A [\sin (A-B) + \sin (A+B)]$$

D) 2

E) -2

Resolución:

$$E = \sec B \operatorname{cosec} A [(\sin A \cos B - \cos A \sin B) + (\sin A \cos B + \cos A \sin B)]$$

$$E = \frac{1}{\cos B} \frac{1}{\sin A} [2 \sin A \cos B] \Rightarrow \frac{2 \sin A \cos B}{\cos B \sin A} \Rightarrow \frac{2}{1} \Rightarrow \text{Rpta. D}$$

EJERCICIO 11 Si $\operatorname{tg} a = \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x - \operatorname{tg} x}$, a

A) $\operatorname{tg} a + 1$

B) $\operatorname{tg} a - 1$

C) $\operatorname{tg} (a - 45^\circ)$

D) $\operatorname{tg} (a + 45^\circ)$

que es igual "sen x"

E) $\operatorname{tg} (45^\circ - a)$

Resolución.

Sabemos que: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\text{Luego } \operatorname{tg} a = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{1 + \sin x}{\cos x}}{\frac{1 - \sin x}{\cos x}} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \Rightarrow \operatorname{tg} a (1 - \sin x) = 1 + \sin x$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \sin x = 1 + \sin x$$

$$\operatorname{tg} a - 1 = \sin x (1 + \operatorname{tg} a)$$

$$\frac{\operatorname{tg} a - 1}{1 + \operatorname{tg} a} = \sin x \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 45^\circ} = \sin x$$

$$\operatorname{tg} (a - 45^\circ) = \sin x \Rightarrow \text{Rpta. C}$$

$$\bullet \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg} (A - B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

6.4 FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS DE ÁNGULOS MÚLTIPLES

6.4.1 Funciones Trigonométricas de Ángulo Doble.

Si en las identidades del capítulo anterior o sea $\sin (\alpha + \beta)$, $\cos (\alpha + \beta)$ y $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$, se hace $\beta = \alpha$, se obtienen identidades para $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\operatorname{tg} 2\alpha$

Por Ejemplo

De la fórmula $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

Para $\beta = \alpha$ obtenemos $\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{(Fórmula 1)}$$

De la fórmula $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Para $\beta = \alpha$ obtenemos $\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{(Fórmula 2)}$$

Por Identidad Pitagórica $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\text{I) } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\text{II) } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

Reemplazamos (I) y (II) en la fórmula 2

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \text{(Fórmula)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad \text{(Fórmula)} \end{aligned}$$

$$\text{De la fórmula: } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\text{De la fórmula } \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

Para $\beta = \alpha$, obtenemos

Para: $\beta = \alpha$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{(Fórmula 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha) &= \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \alpha - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha} \\ \operatorname{cotg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha} \quad \text{(Fórmula 4)} \end{aligned}$$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO DOBLE



Ejercicio 1 Hallar el valor de "sen 2A" Si: $\text{sen } A = \frac{2}{3}$

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen } 2A = 2 \text{ sen } A \cos A$ (I)

De la condición: $\text{sen } A = \frac{2}{3}$ sen A = lo llevamos a un \triangle , veamos

Calculamos "x" por el teorema de Pitágoras

$$3^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow 9 = 4 + x^2$$

$$5 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

Luego $\cos A = \frac{x}{3} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$



Reemplazamos valores en la expresión (I), obteniendo:

$$\text{sen } 2A = 2 \text{ sen } A \cos A \Rightarrow \text{sen } 2A = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Rpta.

Ejercicio 2 Hallar el valor de "cos 2A" si: $\cos A = \frac{3}{4}$

Resolución:

Sabemos que: $\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$ (I)

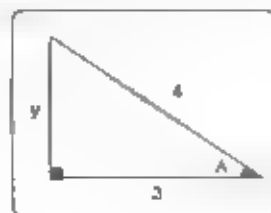
De la condición: $\cos A = \frac{3}{4}$ cos A = lo llevamos a un \triangle , veamos.

Por el teorema de Pitágoras

$$4^2 = 3^2 + y^2 \Rightarrow 16 = 9 + y^2$$

$$y^2 = 7 \Rightarrow y = \sqrt{7}$$

Luego: $\text{sen } A = \frac{y}{4} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{\sqrt{7}}{4}$



Reemplazamos valores en la expresión (), obteniendo

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \Rightarrow \cos 2A = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3: Hallar el valor de $\operatorname{tg} 2A$ Si $\operatorname{tg} A = 3$

Resolución

Sabemos que $\operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$ (I) De la condición $\operatorname{tg} A = 3$ (II)

$$\text{Reemplazamos (II) en (I)} \quad \operatorname{tg} 2A = \frac{2(3)}{1 - (3)^2} = \frac{6}{1 - 9} = \frac{6}{-8} \Rightarrow \operatorname{tg} 2A = -\frac{3}{4} \quad \text{Rpta.}$$

Recomendación. Es importante que tengas siempre presente que

$$\sin 2A \neq 2 \sin A \quad \cos 2A \neq 2 \cos A \quad \operatorname{tg} 2A \neq 2 \operatorname{tg} A$$

Ejercicio 4: Demostrar que $\frac{\sin 4x}{1 - \cos 4x} = \cotg 2x$

Demostración.

Por fórmula $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$, hacemos que $A = 2x$

$$\text{Luego, } \sin 2(2x) = 2 \sin 2x \cos 2x \quad \sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x \quad (I)$$

Por fórmula $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$, hacemos que $A = 2x$

$$\text{Luego } \cos 2(2x) = 1 - 2 \sin^2 2x \quad \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x \quad (II)$$

Reemplazamos (I) y (II) en la expresión inicial

$$\frac{2 \sin 2x \cos 2x}{1 - (1 - 2 \sin^2 2x)} = \cotg 2x \Rightarrow \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{2 \sin^2 2x} = \cotg 2x$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cotg 2x \Rightarrow \cotg 2x = \cotg 2x \quad \text{L.q.q.d}$$

Ejercicio 5: Demostrar que $\operatorname{tg} x + \cotg x = 2 \operatorname{cosec} 2x$

Demostración.

Por identidades por división $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Luego $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x \operatorname{sen} x} = 2 \operatorname{cosec} 2x \Rightarrow$ Damos común denominador en el primer miembro.

$$\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x + \cos x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x} = 2 \operatorname{cosec} 2x$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = 2 \operatorname{cosec} 2x \Rightarrow \text{Pero: } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = 2 \operatorname{cosec} 2x \Rightarrow \text{multiplicamos "x 2" el numerador y denominador del primer miembro.}$$

$$\frac{1(2)}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = 2 \operatorname{cosec} 2x$$

$$\frac{2(1)}{\operatorname{sen} 2x} = 2 \operatorname{cosec} 2x \Rightarrow \text{Pero } \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} \operatorname{cosec} 2x$$

$$2 \operatorname{cosec} 2x = 2 \operatorname{cosec} 2x \quad \text{I q q d}$$



TALLER DE EJERCICIOS N° 23

A. Sin emplear tablas ni calculadora. Calcular el valor de.

Ejercicio 1 Hallar el valor de

Sen 2A, si $\operatorname{cosec} A = 5/3$

Resolución:

Sabemos que $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$ (1)

• El valor de $\operatorname{cosec} A = 5/3$ lo llevamos a un triángulo

• Por el teorema de Pitágoras

$$AB^2 = 5^2 - 3^2$$

$$AB^2 = 16 \Rightarrow AB = 4$$

Luego $\operatorname{sen} A = 3/5 \quad \cos A = 4/5$



Los valores hallados los reemplazamos en (1)

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{24}{25} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Hallar el valor de

$$\operatorname{tg} 2A \quad \text{Si} \quad \operatorname{sen} A = \frac{7}{25}$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \operatorname{tg} 2A = \frac{336}{527}$$

Ejercicio 3 Demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen} 4x}{1 + \cos 4x} = \operatorname{tg} 2x$$

Demostración.

Ejercicio 4 Demostrar que

$$\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{cotg} 2\alpha$$

Demostración.



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ÁNGULO DOBLE TIPO I.B.M



Ejercicio 1 Reducir $M = \frac{\operatorname{sen} 3a \cos 3a}{\operatorname{sen} a \cos a}$ A) 2 B) 3 C) 4 D) 2 E) 1

Resolución:

Aplicando $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

Obtenemos $M = \frac{\operatorname{sen} 3a \cos a \cos 3a \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a \cos a}$

$$M = \frac{\operatorname{sen} (3a - a)}{\operatorname{sen} a \cos a} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{\operatorname{sen} a \cos a} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} \Rightarrow M = 2 \quad \text{Rpta. A}$$

Ejercicio 2 Reducir $P = \sqrt{\frac{\sec 2x - 1}{\sec 2x + 1}}$ A) $\sec x$ B) $\operatorname{tg} x$ C) $\operatorname{cotg} x$
D) $\operatorname{cosec} x$ E) N.A

Resolución

• La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente $P = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} \quad (I)$

Sabemos que $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ (II)

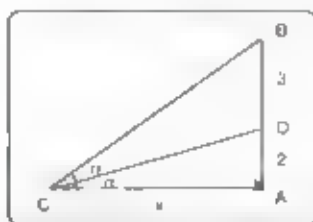
Reemplazamos los valores de (II) en (I)

$$P = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{1 + (2 \cos^2 x - 1)} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \underline{P = \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{Rpta. B}$$

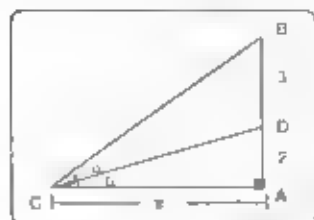
Ejercicio 3 De la figura mostrada.

Hallar "x"

- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ E) N.A.



Resolución.



Reemplazamos (II) en (I).

$$\frac{2 \left(\frac{2}{x} \right)^2}{1 - \left(\frac{2}{x} \right)^2} = \frac{5}{x} \Rightarrow \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{5}{x} \Rightarrow 4x = 5x^2 - 20 \Rightarrow 20 = 5x^2 - 4x \Rightarrow 5x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$x = 2\sqrt{5} \quad \text{Rpta. B}$$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS COMPUESTOS

NIVEL I

Ejercicio 1 Hallar el valor de

$$\cos 2A \quad \text{Si} \quad \sec A = 7/3$$

- A) $\frac{31}{94}$ B) $-\frac{31}{49}$ C) $\frac{27}{49}$ D) $\frac{31}{49}$ E) N.A

Ejercicio 2 Hallar el valor de

$$\operatorname{colog} 2A \quad \text{Si} \quad \operatorname{tg} A = 5/12$$

- A) $\frac{119}{102}$ B) $\frac{191}{120}$ C) $\frac{117}{120}$ D) $\frac{119}{120}$ E) N.A.

Ejercicio 1 Hallar el equivalente de

$$\cos^4 A - \sin^4 A$$

- A) $\sin 2A$ B) $\lg 2A$ C) $\cos 2A$
D) $\cotg 2A$ E) N.A.

Ejercicio 2 Hallar el equivalente de

$$\frac{1 - \lg^2 \theta}{1 + \lg^2 \theta}$$

NIVEL II

Ejercicio 1 Si $5(\sin \alpha - \cos \alpha) = 1$ $0 < \alpha < \pi/4$, Hallar $\lg 2x$

- A) $\pm \frac{24}{7}$ B) $-\frac{24}{7}$ C) $\frac{24}{7}$ D) 7 E) ± 7

Ejercicio 2 Reducir

$$M = \frac{4 \lg \alpha (1 - \lg^2 \alpha)}{\sec^4 \alpha}$$

- A) $\cos 2\alpha$ B) $\cos 4\alpha$ C) $\sin 2\alpha$
D) $\sin 4\alpha$ E) $\sin 6\alpha$

Ejercicio 3 Si $\sin^4 a + \cos^4 a = m$, Hallar " $\cos 4a$ "

- A) 4 m B) 3 m C) $2m - 3$
D) $4m - 3$ E) $3m - 4$

NIVEL III

Ejercicio 1 Reducir la expresión

$$R = 4 \sin \theta \cos^3 \theta (1 - \lg^2 \theta)$$

- A) $\lg 2\theta$ B) $\sin 2\theta$ C) $\cos 2\theta$
D) $\cotg 2\theta$ E) N.A.

Ejercicio 2 Reducir la siguiente expresión

$$Q = \lg (45^\circ + x) + \lg (45^\circ - x)$$

- A) 2 B) $\lg 2x$ C) $\cotg 2x$
D) $2 \sec 2x$ E) $2 \cotg 2x$

Clave de Respuestas

1 B | 2 D | 3 C | 4 C | 5 D

Ejercicio 1 Calcular el valor de

$$E = \frac{\sec 9^\circ}{\sec 21^\circ} + \frac{\operatorname{cosec} 9^\circ}{\operatorname{cosec} 21^\circ}$$

- A) $\sqrt{5} + 1$ B) $2 + \sqrt{5}$ C) $\sqrt{5} - 1$
D) $2(\sqrt{5} - 1)$ E) $2(\sqrt{5} + 1)$

Ejercicio 2 Reducir la expresión

$$E = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$$

- A) $\lg 2x$ B) $\lg x$ C) $\sin x$
D) $\cos 2x$ E) $\sec x$

Clave de Respuestas

1 C | 2 D | 3 D | 4 A | 5 B

- A) $\sin 2\theta$ B) $\sin^2 2\theta$ C) $\cos 2\theta$
D) $\cos^2 \theta$ E) $\sin 4\theta$

Ejercicio 2 Siendo, $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calcular el valor de: $E = 3 \sin 2x + 2$

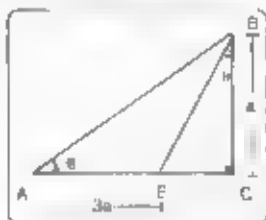
- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{11}$ D) $\frac{11}{3}$ E) $\frac{11}{4}$

Ejercicio 1 Reducir a expresión:

$$R = 1 - 8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

- A) $\sin^2 2\theta$ B) $\cos^2 2\theta$ C) $\cos 4\theta$
D) $\sin 4\theta$ E) $\sin 8\theta$

Ejercicio 2 De la figura mostrada, calcule: " $\lg 2\theta$ "



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 1

Ejercicio 3 Encontrar el valor de " n " en

$$\frac{\lg 2x - 2 \lg x}{\lg 2x - \lg x} = 1 - n \cos 2x$$

- A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) N.A

Clave de Respuestas

1. E | 2. E | 3. C | 4. C | 5. A

6.4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO TRIPLE

Senó del Ángulo Triple: " $\sin 3A$ "

$$\sin 3A = \sin (2A + A)$$

$$\sin 3A = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

$$\sin 3A = 2 \sin A \cos A \cos A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$

$$\sin 3A = 2 \sin A \cos^2 A + \sin A - 2 \sin^3 A, \text{ Pero } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\sin 3A = 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A,$$

$$\sin 3A = 2 \sin A - 2 \sin^3 A + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A \quad \text{(Fórmula)}$$

Coseno del Ángulo Triple: "cos 3A"

$$\cos 3A = \cos (2A + A)$$

$$\cos 3A = \cos 2A \cos A \overset{\substack{\text{sen } 2A \\ \text{sen } A}}{\text{sen } 2A \text{ sen } A}$$

$$\cos 3A = \cos 2A \cos A \cdot (2 \text{ sen } A \cos A) \text{ sen } A$$

$$\cos 3A = (2 \cos^2 A - 1) \cos A \cdot (2 \text{ sen } A \cos A) \text{ sen } A$$

$$\cos 3A = 2 \cos^3 A \cos A - \cos A \cdot 2 \text{ sen}^2 A \cos A$$

$$\cos 3A = 2 \cos^3 A - \cos A \cdot 2 (1 - \cos^2 A) \cos A$$

$$\cos 3A = 2 \cos^3 A - \cos A \cdot 2 \cos A + 2 \cos^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 2 \cos A \quad \text{(Fórmula)}$$

Tangente del Ángulo Triple "tg 3A"

De las fórmulas

$$\text{sen } 3A = 3 \text{ sen } A - 4 \text{ sen}^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

Dividimos miembro a miembro:

$$\frac{\text{sen } 3A}{\cos 3A} = \frac{3 \text{ sen } A - 4 \text{ sen}^3 A}{4 \cos^3 A - 3 \cos A} = \frac{3 \text{ sen } A \cos^2 A \text{ sen}^3 A}{\cos^3 A - 3 \cos A \text{ sen}^2 A}$$

Dividimos a cada término del numerador y denominador "cos³ A" obteniendo:

$$\text{tg } 3A = \frac{3 \text{ sen } A \cancel{\cos^2 A} \text{ sen}^3 A}{\cancel{\cos^3 A} - 3 \cancel{\cos A} \text{ sen}^2 A} = \frac{3 \text{ sen } A \text{ sen}^3 A}{1 - 3 \text{ sen}^2 A}$$

$$\text{tg } 3A = \frac{3 \text{ sen } A \cdot \text{tg}^3 A}{1 - 3 \text{ sen}^2 A} = \frac{3 \text{ tg } A \text{ tg}^3 A}{1 - 3 \text{ tg}^2 A} \Rightarrow \text{tg } 3A = \frac{3 \text{ tg } A \text{ tg}^3 A}{1 - 3 \text{ tg}^2 A} \quad \text{(Fórmula)}$$

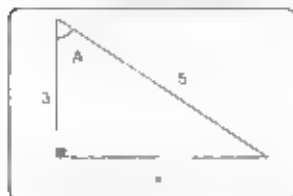
EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONÓMICAS DE ÁNGULO TRIPLE

Ejercicio 1 Hallar el valor de "sen 3A" si $\cos A = \frac{3}{5}$

Resolución:

Sabemos que $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$ (I)

De la condición $\cos A = \frac{3}{5}$ lo llevamos a un \triangle veamos



Por el teorema de pitágoras

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2$$

$$16 = x^2 \Rightarrow \sqrt{16} = x \Rightarrow x = 4$$

Luego: $\sin A = \frac{x}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$

Reemplazamos valores en (I)

$$\sin 3A = 3 \left(\frac{4}{5} \right) - 4 \left(\frac{4}{5} \right)^3$$

$$\sin 3A = \frac{12}{5} - 4 \left(\frac{64}{125} \right) = \frac{300}{125} - \frac{256}{125} = \frac{44}{125} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Hallar el valor de "cos 3A" si $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$

Resolución:

Sabemos que $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ (I)

De la condición $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$ lo llevamos a un \triangle veamos



Por el teorema de pitágoras

$$c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16$$

$$c^2 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow c = 5$$

Luego: $\cos A = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5}$

Reemplazamos valores en (I)

$$\cos 3A = 4 \left(\frac{4}{5} \right)^3 - 3 \left(\frac{4}{5} \right)$$

$$\cos 3A = 4 \left(\frac{64}{125} \right) - \frac{12}{5} = \frac{256}{125} - \frac{300}{125} = \frac{44}{125} \Rightarrow \cos 3A = \frac{44}{125} \quad \text{Rpta.}$$



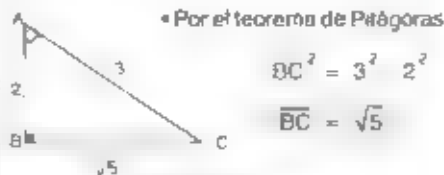
TALLER DE EJERCICIOS N° 24

Ejercicio 1 : Hallar el valor de: $\sec 3A$, si:
 $\sec A = 3/2$

Resolución:

Sabemos que $\sec 3A = 3 \sec A - 4 \sec^3 A$ (I)

• El valor $\sec A = 3/2$, lo llevamos a un triángulo, veamos



Luego $\sec A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (II)

Reemplazamos (II) en (I)

$$\sec 3A = 3 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right) - 4 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^3$$

$$\sec 3A = \sqrt{5} - 4 \left(\frac{5\sqrt{5}}{27} \right)$$

$$\sec 3A = \frac{7\sqrt{5}}{27} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 : Hallar el valor de

$$\cos 3A, \text{ si: } \cos A = 2$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } \cos 3A = 0$$

Ejercicio 3 Hallar el valor de

$$\operatorname{tg} 3A, \text{ si } \operatorname{sen} A = 1/3$$

Resolución:

Ejercicio 4 Hallar el valor de.

$$\operatorname{sen} 3A, \text{ si } \cos A = 1/n \quad n \neq 0$$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{tg} 3A = \frac{23\sqrt{2}}{20}$

Rpta. $\operatorname{sen} 3A = \left(\frac{4}{n^3} \right) \sqrt{n^2 - 1}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ANGULO TRIPLE

Ejercicio 1

Reducir $M = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x - \cos 3x}$

A) 1

D) $\operatorname{tg} 3x$

B) $\operatorname{tg} x$

E) $\operatorname{cotg} 3x$

C) $\operatorname{cotg} x$

Resolución.

Sabemos que

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Luego

$$M = \frac{(3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x) + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x - (4 \cos^3 x - 3 \cos x)} = \frac{3 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^3 x}{3 \cos x - 3 \cos^3 x}$$

$$M = \frac{3 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x)}{3 \cos x (1 - \cos^2 x)}, \text{ pero } 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \quad 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

$$M = \frac{3 \operatorname{sen} x \cos^2 x}{3 \cos x \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \underline{M = \operatorname{cotg} x} \quad \text{Rpta. C}$$

Ejercicio 2 Si $\sin x - \cos x = 1$ y $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{1}{2}$

Hallar $\cos(3x - 45^\circ)$

D) $\frac{1}{2}$

E) N.A

Resolución.

De la expresión: $\cos(3x - 45^\circ)$, obtenemos

$$\cos(3x - 45^\circ) = \cos 3x \cos 45^\circ + \sin 3x \sin 45^\circ$$

$$\cos(3x - 45^\circ) = \cos 3x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 3x \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 3x + \cos 3x)$$

$$\cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(3 \sin x - 4 \sin^3 x) + (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \right]$$

$$\cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[3(\sin x - \cos x) - 4(\sin^3 x - \cos^3 x) \right]$$

$$\cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\underset{\text{Dato}}{3(\sin x - \cos x)} - 4 \underset{\text{Dato}}{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x)} \right]$$

$$\cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[3(1) - 4(1)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x) \right]$$

$$\cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} [3 - 4 - 4 \sin x \cos x] = \frac{\sqrt{2}}{2} [-1 - 4 \sin x \cos x] \quad (I)$$

De la condición $\sin x - \cos x = 1$ elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x = 0 \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$\cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} [-1 - 4(0)] = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 3 Al reducir la siguiente expresión

A) 0

B) 1

C) 2

$$\frac{\cos^3 \alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$

D) 3

E) N.A

se obtiene

Resolución

Sabemos que $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

Luego

$$\frac{\cos^3 \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3 \sin^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{3 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} + \frac{3 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3 (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{1}) = 3 \quad \text{Rpta. D}$$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO TRIPLE

Ejercicio 1. Hallar el valor de.

$$\cos 3A, \text{ si } \operatorname{tg} A = 3$$

- A) $\frac{13\sqrt{10}}{10}$ B) $-\frac{13\sqrt{10}}{10}$ C) $-\frac{13\sqrt{10}}{50}$
D) $\frac{13\sqrt{10}}{50}$ E) N.A.

Ejercicio 2. Si $\sin (30^\circ + x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ Hallar

" $\cos 3x$ "

- A) $\frac{\sqrt{5}}{27}$ B) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{27}$
D) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ E) N.A.

Ejercicio 3. Determinar el valor de " n " en

$$\sin 3x + \cos 3x = 1 + n \sin 2x$$

$$\cos x \sin x$$

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

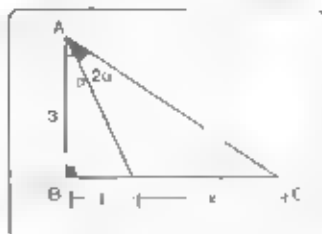
Ejercicio 4. Simplificar

$$M = 3 \operatorname{tg} A (2 \cos A + \cos 3A)$$

- A) $\operatorname{tg} 3A$ B) $3 \cos 3A$ C) $3 \sin 3A$
D) $2 \sin 3A$ E) $2 \operatorname{ctg} 3A$

Ejercicio 5. De la figura Hallar " x "

- A) $11/3$
B) 3
C) $10/3$
D) 4
E) N.A.



Clave de Respuestas

1. C | 2. D | 3. D | 4. C | 5. C

6.4.3 Funciones Trigonométricas de un Ángulo Mitad

Seno y Coseno de un Ángulo Mitad

Sabemos que $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$ (Por ángulo doble)

Donde $\sin \left(\frac{A}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}} \Rightarrow \sin^2 \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{1 - \cos A}{2}$ sacamos mitad a c/u de los ángulos de las funciones trigonométricas, obteniendo.

Luego $\sin \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$ (Fórmula)

También sabemos que $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$ (Por ángulo doble)

Donde $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$ Luego $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$ $\cos \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ (Fórmula)

Tangente del Ángulo Mitad

$$\left[\begin{array}{l} \sin \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad (1) \\ \cos \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad (2) \end{array} \right]$$

Dividimos miembro a miembro (1) y (2)

$$\left[\begin{array}{l} \sin \left(\frac{A}{2} \right) \\ \cos \left(\frac{A}{2} \right) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \end{array} \right]$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \Rightarrow \operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \quad (\text{Fórmula})$$

Ahora, tomamos la inversa a ambos miembros de esta última expresión

$$\left[\frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} \right)} \right] = \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}} \Rightarrow \cotg \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} \quad (\text{Fórmula})$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO MITAD

Ejercicio (1) Utilizando las identidades del ángulo mitad. Hallar $\sin 22,5^\circ$

Resolución.

Sabemos que
$$\sin \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad (I)$$

Luego, hacemos
$$\left(\frac{A}{2} \right) = 22,5^\circ \Rightarrow A = 45^\circ \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$\sin \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} \Rightarrow \text{Pero } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad \begin{array}{l} \text{tomamos el signo (+)} \\ \text{por ser el ángulo de} \\ 22,5^\circ \in Q_1 \end{array} \Rightarrow \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Ejercicio (2) Utilizando las identidades del ángulo mitad. Hallar $\cos 105^\circ$

Resolución.

Sabemos que
$$\cos \left(\frac{A}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad (I)$$

Luego, hacemos
$$\left(\frac{A}{2} \right) = 105^\circ \Rightarrow A = 210^\circ \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$\cos \left(\frac{210^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 210^\circ}{2}} \Rightarrow \cos 105^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 210^\circ}{2}} \quad (III)$$

Reducimos el ángulo de 210° al primer cuadrante, vemos

$$\underbrace{\cos 210^\circ}_{\in Q_3} = \cos (180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (IV)$$

Reemplazando (IV) en (III)

$$\cos 105^\circ = \pm \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\cos 105^\circ = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

tomamos el signo (-)
por pertenecer 105°
al 2do. cuadrante

$$\cos 105^\circ = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3 Demostrar que: $\operatorname{cosec} A \cdot \cotg A = \tg \left(\frac{A}{2}\right)$

Demostración:

Sabemos que

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} \quad \cotg A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

$$\text{Luego:} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \tg \left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} = \tg \left(\frac{A}{2}\right)$$

Pero:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A}{2}\right) \cos \left(\frac{A}{2}\right)$$

Reemplazando los valores hallados en esta última expresión

$$\frac{1 - \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{A}{2}\right) \cos \left(\frac{A}{2}\right)} = \tg \left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{\cancel{2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{A}{2}\right)}{\cancel{2} \operatorname{sen} \left(\frac{A}{2}\right) \cos \left(\frac{A}{2}\right)} = \tg \left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{A}{2}\right)}{\cos \left(\frac{A}{2}\right)} = \tg \left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{A}{2}\right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{A}{2}\right)} = \text{L.q.q.d.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 25

- Utilizando las identidades del ángulo mitad.

Ejercicio 1 : Hallar $\sin 30^\circ$

Resolución:

Sabemos que $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

Donde: $\frac{A}{2} = 30^\circ \Rightarrow A = 60^\circ$

Luego: $\sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = + \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}}$

$$\sin 30^\circ = + \sqrt{\frac{1 - 1/2}{2}} = + \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{Rpta.}$$

Nota: Hemos tomado el signo (+) porque el ángulo de 30° es al Q_1 .

Ejercicio 3 : Hallar $\cotg 15^\circ$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \cotg 15^\circ = (2 + \sqrt{3})$$

Ejercicio 2 : Hallar $\lg 67,5^\circ$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \lg 67,5^\circ = (\sqrt{2} + 1)$$

Ejercicio 4 : Hallar $\cos 157,5^\circ$

Resolución:

$$\text{Rpta. } \cos 157,5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO MITAD TIPO I.B.M.

Ejercicio 1 Hallar $\sin\left(\frac{B}{2}\right)$ sabiendo que: $\sin B = \frac{3}{5}$ $B \in Q_1$

A) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

E) $\frac{1}{10}$

Resolución:

Sabemos que $\sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}}$ (I)

Por identidad Pitagórica $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos B = \frac{4}{5} \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}} \text{ Rpta. C}$$

Ejercicio 2 Hallar el equivalente de

$$E = \frac{\sec A - 1}{\lg A}$$

A) $\cos\left(\frac{A}{2}\right)$

B) $\lg\left(\frac{A}{2}\right)$

C) $\operatorname{colog}\left(\frac{A}{2}\right)$

D) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)$

E) N.A.

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente

$$E = \frac{1}{\cos A} - 1 = \frac{1 - \cos A}{\cos A} = \frac{1 - \cos A}{\cos A} \quad (I)$$

Sabemos que $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta \Rightarrow \cos A = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) \quad (II)$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin A = 2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) \quad (III)$$

Reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$E = \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{E = \tan\left(\frac{A}{2}\right)} \text{ Rpta. B}$$

Ejercicio 3: Siendo $\alpha \in Q_2$, donde $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, Calcule el valor de $E = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

A) 1

B) -5

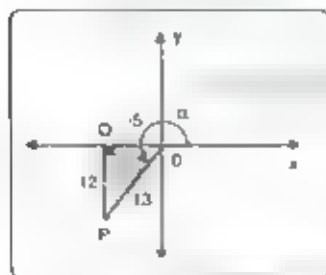
C) 3

D) $\sqrt{13}$

E) 5

Resolución.

Grificamos. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ como se muestra en la figura.



• Por el Teorema de Pitágoras.

$$\overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{PO}^2$$

$$\overline{OQ}^2 = 13^2 - (-12)^2 = 25 \Rightarrow \therefore \overline{OQ} = 5$$

Luego $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

• De la expresión "E" obtenemos

$$E = \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \right) + 5 \left(-\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \right)$$

$$E = \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} \right) + 5 \left(-\sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} \right)$$

$$E = \sqrt{\frac{8}{13}} + 5 \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} + 5 \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{\sqrt{13}} \Rightarrow \underline{E = \sqrt{13}} \text{ Rpta. D}$$

• De acuerdo al gráfico

$$\left(\frac{\alpha}{2} \right) \in \text{al } Q_2$$

Entonces $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ es negativo



NIVEL 1

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO MITAD

Ejercicio 1 Hallar $\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ sabiendo que $\cos A = 3/4$, $A \in Q_2$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Ejercicio 2 Hallar $\lg\left(\frac{A}{2}\right)$ sabiendo que $\cos A = -5/13$, $A \in Q_2$.

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

Ejercicio 3: Simplifique

$$R = \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cotg \theta$$

- A) $\lg \theta$ B) $\lg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $\sin \theta$ D) $\cos \theta$ E) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Ejercicio 4: Simplificar

$$S = \frac{\sin 2x \cos x}{(1 + \cos 2x)(1 - \cos x)}$$

- A) $\sin 2x$ B) $\cos 2x$ C) $\lg\left(\frac{x}{2}\right)$

- D) $\sec\left(\frac{x}{2}\right)$ E) $\cotg\left(\frac{x}{2}\right)$

Ejercicio 5: Reducir la expresión

$$E = \lg\left(\frac{x}{2}\right) \sin x - 1$$

- A) $\sin x$ B) $-\cos x$ C) 1 D) $\cos x$ E) 1

Clave de Respuestas

1. A | 2. B | 3. C | 4. B | 5. C

NIVEL II

Ejercicio 1: Si se tiene que $\theta \in Q_0$ y

además: $\lg \theta = \frac{15}{8}$ Calcule el valor de:

$$E = 1 + \sqrt{34} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 2: Hallar $\lg\left(\frac{a}{4}\right)$ si:

$$\sin a \sin\left(\frac{a}{2}\right) + \cos\left(\frac{a}{2}\right) \cos a = \frac{1}{3}$$

- A) $\pm \frac{1}{2}$ B) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ C) ± 2 D) $\pm \sqrt{2}$ E) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio 3: Simplificar

$$E = \frac{(1 - \sec \alpha)^2 (\sin \alpha - \lg \alpha)^2}{\cos^4 \alpha + 2 \sin^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^8 \alpha}$$

- A) $\cotg \alpha$ B) $\cotg^2 \frac{\alpha}{2}$ C) $\lg \frac{\alpha}{2}$

- D) $\lg \alpha$ E) $\lg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Ejercicio 4: Calcular $\sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) +$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5}{\sqrt{17}}, \text{ para } \alpha \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$$

- A) $-\frac{\sqrt{17}}{4}$ B) $-\frac{\sqrt{17}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{17}}{8}$

- D) $-\frac{\sqrt{17}}{6}$ E) $\sqrt{17}$

Ejercicio 5: Si $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, reducir

$$E = \sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a}$$

- A) $2 \cos \frac{a}{2}$ B) $2 \sin \frac{a}{2}$ C) $2 \cos \frac{a}{2}$

- D) $-2 \sin \frac{a}{2}$ E) 0,5

Clave de Respuestas

1. C | 2. B | 3. E | 4. E | 5. A

Capítulo

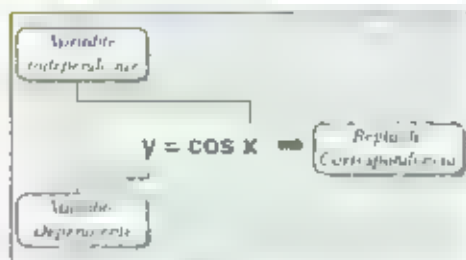
7

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

7.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Se llama función trigonométrica a conjunto de pares ordenados (x, y) donde los primeros elementos son números reales (ángulos en grados sexagesimales) y los segundos elementos son correspondientes valores de las razones trigonométricas de esos ángulos.

Sea la razón trigonométrica $\cos x$, si a esta le llamamos "y" tendremos



Esta regla de correspondencia da lugar a un conjunto de pares ordenados, y a este conjunto se le da el nombre de función trigonométrica. Función que lógicamente tendrá un dominio, rango y también una gráfica.

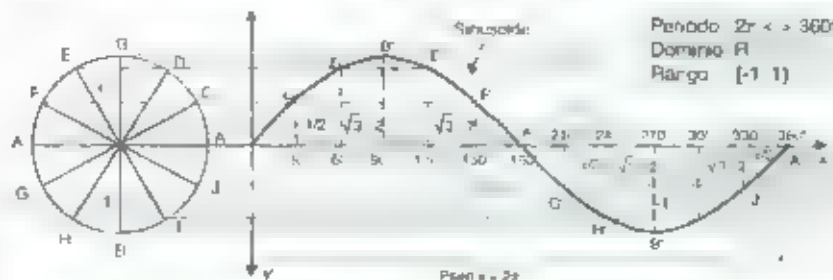
7.1.1 REPRESENTACION GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO

$$y = \sin x$$

Donde "x" representa a los ángulos trigonométricos que varía de $(+\infty)$ a $(-\infty)$ e "y" representan a los valores numéricos que toma la función trigonométrica.

Luego, para graficar necesitamos una serie de puntos (ver Tabla)

x	0	30°	60°	90	120°	150	180	210	240°	270	300	330°	360°
y = sen x	0	1/2	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	1/2	0



Variación: El Seno del Angulo.

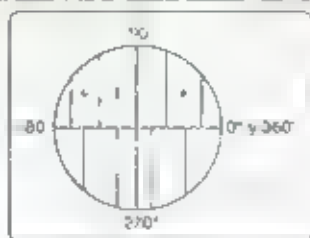
En el primer cuadrante crece de 0° hasta $+1$
 $(0 < \text{sen } x < 1)$

En el segundo cuadrante decrece de $+1$ hasta 0
 $(0 < \text{sen } x < 1)$

En el tercer cuadrante decrece de 0 hasta -1
 $(-1 < \text{sen } x < 0)$

En el cuarto cuadrante crece de -1 hasta 0
 $(-1 < \text{sen } x < 0)$

$\text{sen } 0^\circ = 0$	$\text{sen } 90^\circ = +1$
$\text{sen } 180^\circ = 0$	$\text{sen } 270^\circ = -1$
$\text{sen } 360^\circ = 0$	



Análisis del Gráfico:

El nombre de esta curva es "sinusoide"

Extensión. Del gráfico determinamos que el máximo valor que toma el seno es 1 y siempre es menor que este el mínimo valor es -1 , por el cual

$$\Rightarrow -1 \leq \text{sen } x \leq 1$$

Periodo. La tendencia de la curva es repetirse en forma completa a partir de 360° o sea

$$\Rightarrow P \text{ sen } x = 360^\circ$$

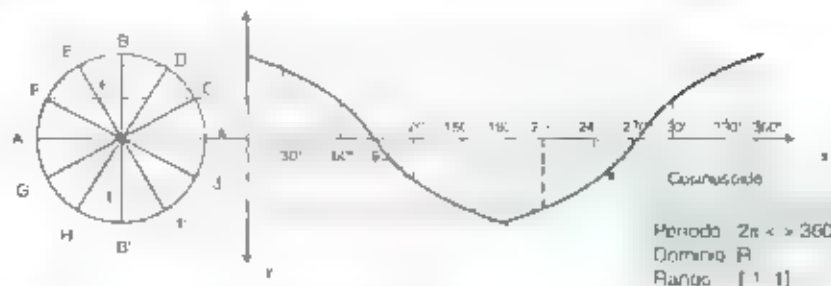
Tipo de Curva. Es continua

7.1.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO

$$y = \cos x$$

Como la función anterior o sea el "sen x", hacemos la tabulación de la siguiente manera:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$y = \cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1



VARIACIÓN: El Coseno del Ángulo.

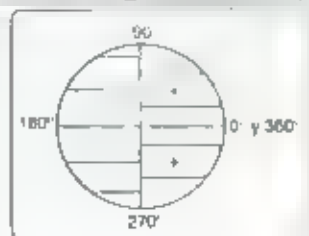
En el primer cuadrante decrece de $+1$ a 0
 $(0 < \cos x < 1)$

En el segundo cuadrante decrece de 0 a -1
 $(-1 < \cos x < 0)$

En el tercer cuadrante crece de -1 a 0
 $(-1 < \cos x < 0)$

En el cuarto cuadrante crece de 0 a $+1$
 $(0 < \cos x < 1)$

$\cos 0^\circ$	$+1$	$\cos 90^\circ$	$= 0$
$\cos 180^\circ$	$= -1$	$\cos 270^\circ$	$= 0$
$\cos 360^\circ$	$= +1$		



Análisis del Gráfico:

El nombre de esta curva es "Cosenoide".

Extensión: El coseno varía, como máximo en 1 y mínimo en -1 .

$$\Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$$

Periodo: La tendencia de la curva a repetirse en forma completa es a partir de 360° o sea:

$$\Rightarrow P \cos x = 360^\circ$$

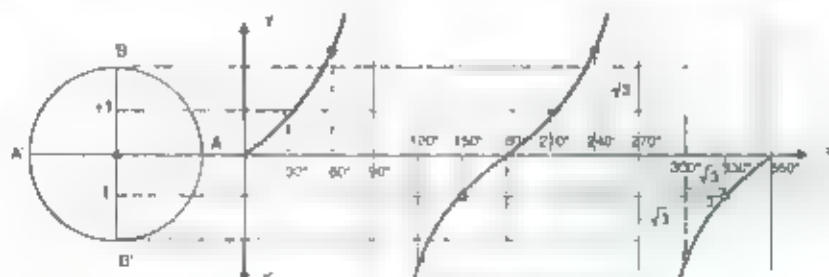
Tipo de Curva: Es continua.

7.1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE

$$y = \operatorname{tg} x$$

Para graficar esta función tenemos de la siguiente manera, veamos

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$y = \operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	A	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	A	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Periodo: $\pi < x < 180^\circ$
 Dominio: $R \setminus (2n + 1) \pi / 2$
 Rango: R (los reales)

VARIACIÓN:

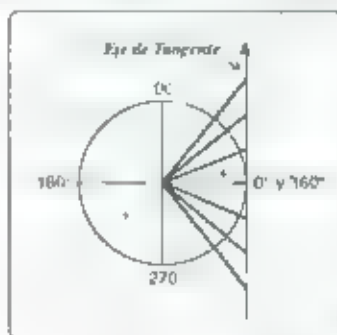
O_1 : $0 < \lg x < +\infty$ (crece)

O_2 : $-\infty < \lg x < 0$ (crece)

O_3 : $0 < \lg x < +\infty$ (crece)

O_4 : $-\infty < \lg x < 0$ (crece)

$\lg 0^\circ = 0$ $\lg 90^\circ = \text{No existe (A)}$
 $\lg 180^\circ = 0$ $\lg 270^\circ = \text{No existe (B)}$
 $\lg 360^\circ = 0$



Análisis del Gráfico:

Extensión. La tangente varía desde $+\infty$ hasta $-\infty$, pasando por los valores reales.

Periodo. Este es 180° porque cada rama se vuelve a repetir después de completar este valor angular.

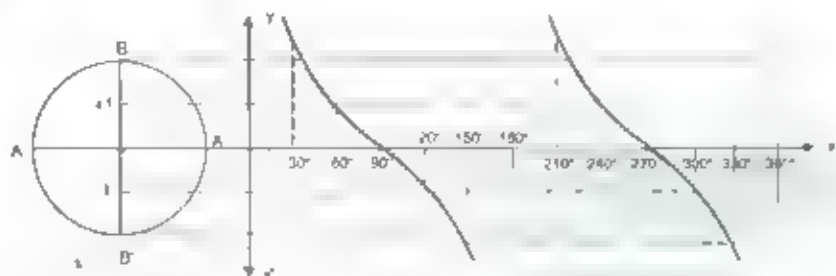
Tipo de Curva. Es una curva discontinua pues vemos que está formada por ramas. No pudiéndose construir una gráfica de un solo trazo. Podemos apreciar que cada rama se encuentra entre dos rectas llamadas "Asintotas" que son tangentes a una curva en el infinito. Otra propiedad es que la función tangente siempre es creciente en cada rama.

7.1.4 REPRESENTACIÓN GRAFICA DE LA FUNCIÓN COTANGENTE

$$y = \cotg x$$

Para graficar dicha función tabulamos de la siguiente manera.

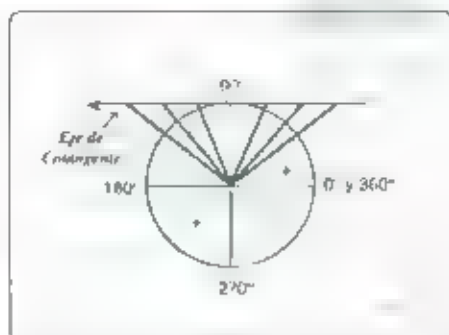
x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = cotg x	A	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	A	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	A



Periodo $\pi < 180^\circ$
 Dominio \mathbb{R} (nn)
 Rango \mathbb{R}

VARIACION:

- O_1 $0 < \text{colg } x < +\infty$ (decrece)
- O_2 $-\infty < \text{colg } x < 0$ (decrece)
- O_3 $0 < \text{colg } x < +\infty$ (decrece)
- O_4 $-\infty < \text{colg } x < 0$ (decrece)



$\text{colg } 0^\circ = \text{No existe (A)}$ $\text{colg } 90^\circ = 0$
 $\text{colg } 180^\circ = \text{No existe (A)}$ $\text{colg } 270^\circ = 0$
 $\text{colg } 360^\circ = \text{No existe (A)}$

Análisis del Gráfico:

Extensión. El valor máximo es $(+\infty)$ y mínimo $(-\infty)$ pasando por todos los valores reales

Periodo. Cada rama se repite luego de 180°

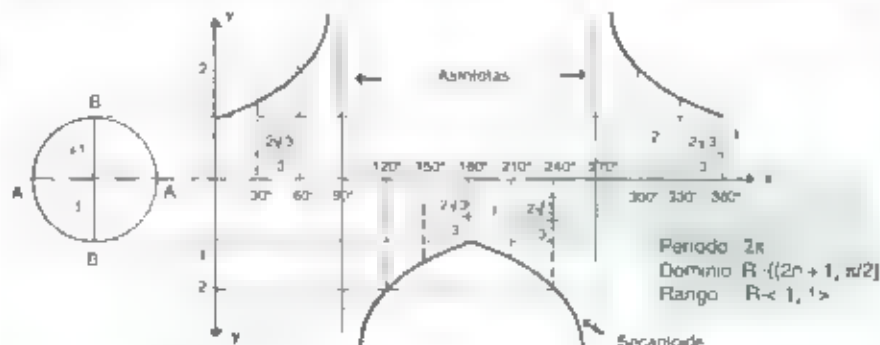
Tipo de Curva. Es discontinua y decreciente en cada rama que se encuentra limitada por dos "Asintotas"

7.1.5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SECANTE

$$y = \sec x$$

Para graficar dicha función, tabulamos de la siguiente manera.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = sec x	1	$2\sqrt{3}/3$	2	A	-2	$-2\sqrt{3}/3$	-1	$-2\sqrt{3}/3$	-2	A	2	$2\sqrt{3}/3$	1

**VARIACIÓN:**

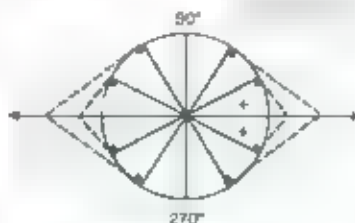
Q_1 $1 < \sec x < +\infty$ (crece)

Q_2 $-\infty < \sec x < 1$ (crece)

Q_3 $-\infty < \sec x < 1$ (decrece)

Q_4 $1 < \sec x < +\infty$ (decrece)

$\sec 0^\circ = +1$	$\sec 90^\circ = \text{No existe } (\emptyset)$
$\sec 180^\circ = -1$	$\sec 270^\circ = \text{No existe } (\emptyset)$
$\sec 360^\circ = +1$	

**Análisis del Gráfico:**

Extensión. La secante siempre es mayor o igual a 1 en la parte positiva, y en la negativa siempre es menor o igual a -1, es decir, la secante no abarca el rango 1 y -1, sino lo que está a partir de ella. Esta extensión es recíproca a la del seno y coseno.

Periodo: Las curvas positiva y negativa se repite cada 360°

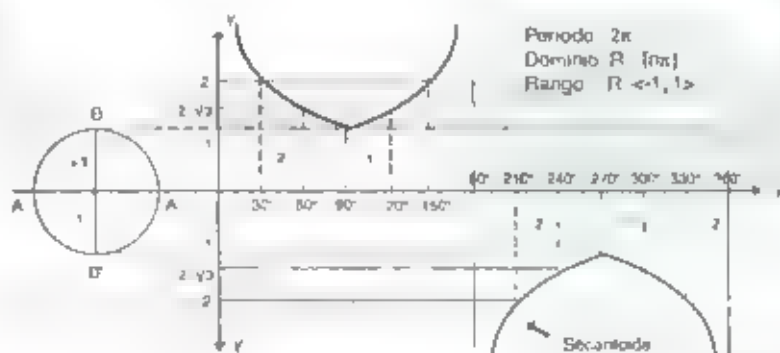
Tipo de Curva. Discontinua, cada rama está comprendida entre dos asíntotas.

7.1.6 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSECANTE:

$$y = \text{COSEC } x$$

Para graficar dicha función, tabulamos de la siguiente manera

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$y = \text{cosec } x$	\emptyset	2	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	2	\emptyset	-2	$-2/\sqrt{3}$	-1	$-2/\sqrt{3}$	-2	\emptyset



Variación:

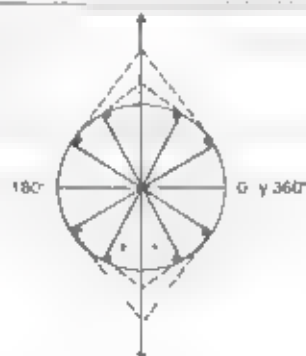
O_1 $-1 < \operatorname{cosec} x < +\infty$ {decrece}

O_2 $1 < \operatorname{cosec} x < +\infty$ {crece}

O_3 $-\infty < \operatorname{cosec} x < -1$ {crece}

O_4 $-\infty < \operatorname{cosec} x < -1$ {decrece}

$\operatorname{cosec} 0^\circ =$ No existe (\emptyset)	$\operatorname{cosec} 90^\circ = +1$
$\operatorname{cosec} 180^\circ =$ No existe (\emptyset)	$\operatorname{cosec} 270^\circ = -1$
$\operatorname{cosec} 360^\circ =$ No existe (\emptyset)	



Análisis del Gráfico:

Extensión: Es la misma que la función secante: posea mayor o igual a 1 y menor o igual a -1

Periodo: Cada rama se repite cada 360°

Tipo de Curva: Discontinua: cada rama está comprendida entre dos "Asintotas"

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE GRAFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejercicio 1 Graficar $y = 3 \sin x$, luego completar la tabla

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = 3 \sin x$					

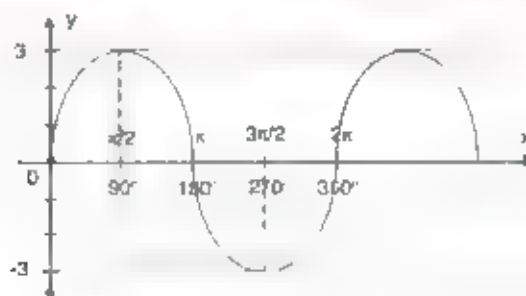
Resolución.

$$y = 3 \sin x$$

- En esta expresión, "x" representa a los ángulos trigonométricos que varían de $(+)$ a $(-)$ e "y" representa los valores numéricos que toma la función trigonométrica.

Luego, para graficar necesitamos una serie de puntos (Ver la siguiente tabla).

x	0°	$90^\circ = \pi/2$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = 3\pi/2$	$360^\circ = 2\pi$
$y = 3 \sin x$	$3(0) = 0$	$3(1) = 3$	$3(0) = 0$	$3(-1) = -3$	$3(0) = 0$



Ahora, completamos la siguiente tabla

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = 3 \sin x$	\mathbb{R}	$-3 \leq y \leq 3$	3	-3	$2\pi = 360^\circ$

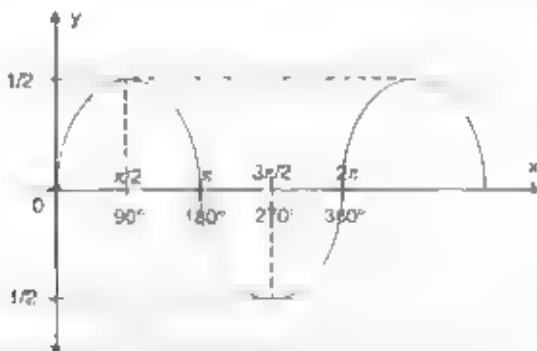
Ejercicio 6 Graficar $y = 1/2 \sin x$, luego completar la tabla

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = 1/2 \sin x$					

Resolución.

• Por tabulación

x	0°	$90^\circ = \pi/2$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = 3\pi/2$	$360^\circ = 2\pi$
$y = 1/2 \sin x$	$1/2 (0) = 0$	$1/2 (1) = 1/2$	$1/2 (0) = 0$	$1/2 (-1) = -1/2$	$1/2 (0) = 0$



Ahora, completamos la siguiente tabla

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = 1/2 \sin x$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$	$1/2$	$-1/2$	$2\pi = 360^\circ$

Ejercicio 7 Graficar $y = \cos 1/2 x$, luego completar la tabla

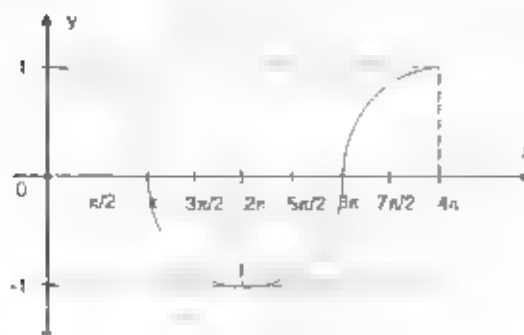
	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = \cos 1/2 x$					

Resolución:

• Por tabulación

x	0°	$90^\circ = \pi/2$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = 3\pi/2$	$360^\circ = 2\pi$
$y = \cos 1/2 x$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1

$450^\circ = 5\pi/2$	$540^\circ = 3\pi$	$630^\circ = 7\pi/2$	$720^\circ = 4\pi$
$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1



Ahora, completamos la siguiente tabla

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
$y = \cos 1/2 x$	\mathbb{R}	$-1 \leq y \leq 1$	1	-1	4π

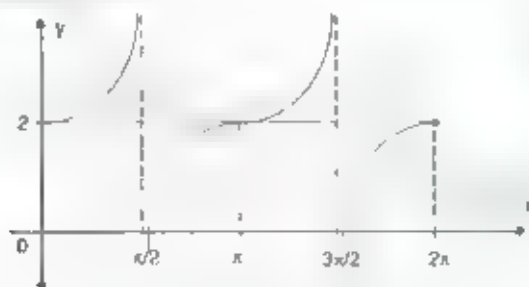
Ejercicio 3 Graficar $y = 2 + \lg x$, luego completar la tabla

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
$y = 2 + \lg x$					

Resolución.

• Por tabulación

x	0°	$90^\circ = \pi/2$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = 3\pi/2$	$360^\circ = 2\pi$
$y = 2 + \lg x$	$y = 2 + 0$	$y = 2 + \sqrt{2}$	$y = 2 + 0$	$y = 2 + \sqrt{2}$	$y = 2 + 0$
	$y = 2$	$y = 3$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 2$



Ahora, completamos la siguiente tabla

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = 2 + \operatorname{tg} x$	$x \in \mathbb{R}$ $x \neq (2K + 1) \frac{\pi}{2}$	\mathbb{R}	—	—	π

- La función tangente no alcanza un valor máximo ni un valor mínimo



TALLER DE EJERCICIOS N° 26

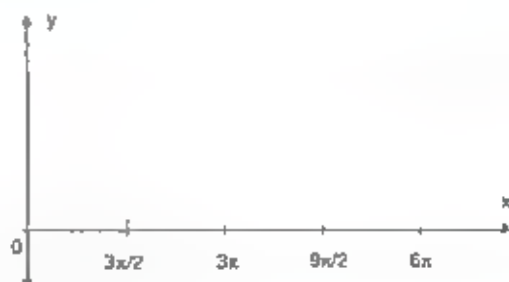
Ejercicio 1 Graficar $y = \sin \frac{1}{3}x$ luego completar la tabla

	Domínio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
$y = \sin \frac{1}{3}x$					

Resolución.

• Por tabulación

x	0°	$270^\circ = 3\pi/2$	$540^\circ = 3\pi$	$810^\circ = 9\pi/2$	$1080^\circ = 6\pi$
$y = \sin \frac{1}{3}x$					



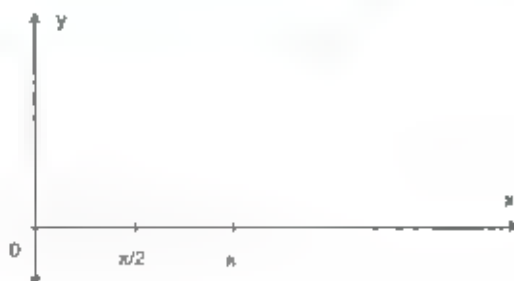
Ejercicio 2 Graficar $y = -1 + \cos 2x$, luego completar la tabla.

	Domínio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = -1 + \cos 2x$					

Resolución.

• Por tabulación

x	0°	$90^\circ = \pi/2$	$180^\circ = \pi$
$y = -1 + \cos 2x$			



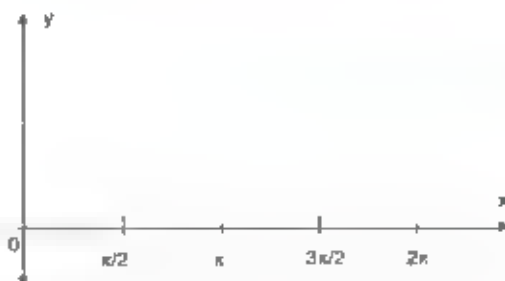
Ejercicio 3 Graficar $y = \text{Cotg } x - 3$; luego completar la tabla

	Domnio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = \text{Cotg } x - 3$					

Resolución

♦ Por tabulación

x	0°	$\pi/2 = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$	$3\pi/2 = 270^\circ$	$2\pi = 360^\circ$
$y = \text{Cotg } x - 3$					



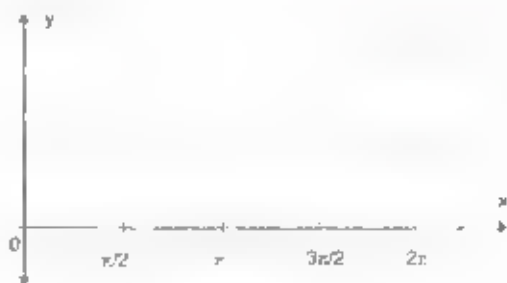
Ejercicio 4 : Graficar $y = 1/2 + \sec x$ luego completar la tabla

	Domnio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
$y = 1/2 + \sec x$					

Resolución.

- Portabulación

x	0°	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = 1/2 + \sec x$					





PARA RECORDAR

Si $a \neq 0$ es real y n y m enteros, se verifica que

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Esta propiedad ya conocida puede extenderse para el caso de $a > 0$ real y m y n reales. ¿Por qué exigir $a > 0$?

Para multiplicar los números 25 000 y 2 893, por ejemplo, buscaban los valores a y b tales que

$$10^a = 25\,000$$

$$10^b = 2\,893$$

y luego resolvían

$$10^a 10^b = 10^{a+b}$$

con lo cual la multiplicación se transformaba en una suma. Los valores de a y b estaban en la tabla de logaritmos decimales, y con ella misma, haciendo el camino al revés, encontraban el valor de 10^{a+b} que es el producto buscado.

Capítulo

8

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

B.1 TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

B.1.1 TRANSFORMACIONES DE SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO (Factorización Trigonométrica)

Sabemos que \Rightarrow
$$+ \begin{cases} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Siendo} \\ A > B \end{matrix}$$

Σ M A M $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B \quad \dots (I)$

\Rightarrow
$$- \begin{cases} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Siendo} \\ A > B \end{matrix}$$

Restando M A M $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$

$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B \quad \dots (II)$

Además sabemos que \Rightarrow
$$+ \begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Siendo} \\ A > B \end{matrix}$$

Σ M A M $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$

$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B \quad \dots (III)$

\Rightarrow
$$- \begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Siendo} \\ A > B \end{matrix}$$

Restando M A M $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B$

Cambiando el signo a todos sus términos obtenemos

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \quad \dots (IV)$$

Luego, hacemos los siguientes cambios de variables, vamos

$$\begin{aligned} \text{i)} & \quad + \begin{cases} A + B = x \\ A - B = y \end{cases} \\ \text{ii)} & \quad \end{aligned}$$

$$\Sigma \text{ M.A.M. } 2A = x + y \implies A = \frac{x + y}{2} \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} \text{De las expresiones } \text{i)} & \quad + \begin{cases} A + B = x \\ A - B = y \end{cases} \\ \text{ii)} & \quad - \end{aligned}$$

$$- \text{M.A.M. } 2B = x - y \implies B = \frac{x - y}{2} \quad (\text{b})$$

Luego, reemplazamos las expresiones (i) (ii), (a) y (b) en la (i) (ii) y (IV), obteniendo

$$\text{De (I): } \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right) \implies \text{Siendo } x > y$$

$$\text{De (II): } \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \left(\frac{x + y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right) \implies \text{Siendo } x > y$$

$$\text{De (III): } \cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right) \implies \text{Siendo } x > y$$

$$\text{De (IV): } \cos y - \cos x = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right) \implies \text{Siendo } x > y$$

Nota Importante: Con el auxilio de esas formulas es posible pasar del producto a la suma o diferencia

CUADRO RESUMEN

Transformaciones Trigonométricas

1. De suma o Diferencia a Producto: (Factorización Trigonométrica)

Siendo, $x > y$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos y - \cos x = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

2. De Producto a Suma o Diferencia:

Siendo $A > B$ $2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$,

$$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS



Ejercicio 1 Transformar a producto las siguientes expresiones

A) $\sin 18^\circ + \sin 4^\circ$ B) $\sin 7^\circ - \sin 5^\circ$ C) $\cos 5^\circ + \cos 3^\circ$ D) $\cos 20^\circ - \cos 42^\circ$

Resolución:

A) $\sin 18^\circ + \sin 4^\circ = 2 \sin \left(\frac{18^\circ + 4^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{18^\circ - 4^\circ}{2} \right)$

$$\sin 18^\circ + \sin 4^\circ = 2 \sin 11^\circ \cos 7^\circ$$

B) $\sin 7^\circ - \sin 5^\circ = 2 \cos \left(\frac{7^\circ + 5^\circ}{2} \right) \sin \left(\frac{7^\circ - 5^\circ}{2} \right)$

$$\sin 7^\circ - \sin 5^\circ = 2 \cos 6^\circ \sin 1^\circ$$

C) $\cos 5^\circ + \cos 3^\circ = 2 \cos \left(\frac{5^\circ + 3^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{5^\circ - 3^\circ}{2} \right)$

$$\cos 5^\circ + \cos 3^\circ = 2 \cos 4^\circ \cos 1^\circ$$

Ejercicio 4 Reducir $\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$

- A) $\frac{1}{2}\alpha$ B) $\lg 2\alpha$ C) $\operatorname{cosec} 2\alpha$ D) $2 \operatorname{tg} \alpha$ E) $\operatorname{tg} 4\alpha$

Resolución.

Aplicando formulas, se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2 \sin \left(\frac{3\alpha + \alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{3\alpha - \alpha}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{3\alpha + \alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{3\alpha - \alpha}{2} \right)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha \quad \text{Rpta. B} \end{aligned}$$

Ejercicio 5 Calcular $E = \sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 50^\circ \sin 40^\circ$

- A) $2/3$ B) $3/4$ C) $3/2$ D) $4/3$ E) 2

Resolución

Para que los términos del segundo miembro tengan la forma de las expresiones estudiadas, multiplicamos ambos miembros "x2" Así

$$\begin{aligned} 2E &= 2(\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 50^\circ \sin 40^\circ) \\ 2E &= 2 \sin 20^\circ \cos 10^\circ + 2 \cos 50^\circ \sin 40^\circ \\ 2E &= [\sin 20^\circ + 10^\circ] + \sin(20^\circ - 10^\circ) + [\sin(50^\circ + 40^\circ) + \sin(50^\circ - 40^\circ)] \\ 2E &= \sin 30^\circ + \sin 10^\circ + \sin 90^\circ + \sin 10^\circ, \text{ Pero } \left. \begin{array}{l} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{array} \right\} \\ 2E &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow E = \frac{3}{4} \quad \text{Rpta. B} \end{aligned}$$

Ejercicio 6 Reducir $\sqrt{1 + \sin 50^\circ} + \sqrt{1 - \sin 50^\circ}$

- A) $2 \cos 25^\circ$ B) $2 \sin 25^\circ$ C) $4 \cos 50^\circ$ D) $4 \sin 50^\circ$ E) $4 \sin 75^\circ$

Resolución.

Elevamos al cuadrado, ambos miembros

$$T^2 = \left(\sqrt{1 + \sin 50^\circ} + \sqrt{1 - \sin 50^\circ} \right)^2, \text{ Pero } (A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

$$T^2 = \left(\sqrt{1 + \sin 50^\circ} \right)^2 + \left(\sqrt{1 - \sin 50^\circ} \right)^2 + 2 \sqrt{1 + \sin 50^\circ} \sqrt{1 - \sin 50^\circ}$$

$$T^2 = 1 + \sin 50^\circ + 1 - \sin 50^\circ + 2 \sqrt{(1 + \sin 50^\circ)(1 - \sin 50^\circ)}$$

$$T^2 = 2 + 2 \sqrt{1^2 - \sin^2 50^\circ} \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$T^2 = 2 + 2 \sqrt{1 - \sin^2 50^\circ} \quad \text{Pero } 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

Donde $1 - \sin^2 50^\circ = \cos^2 50^\circ$

$$T^2 = 2 + 2 \sqrt{\cos^2 50^\circ}$$

$$T^2 = 2 + 2 \cos 50^\circ = 2(1 + \cos 50^\circ), \text{ Pero } 1 = \cos 0^\circ$$

$$T^2 = 2(\cos 0^\circ + \cos 50^\circ) = 2(\cos 50^\circ + \cos 0^\circ)$$

$$T^2 = 2 \left[2 \cos \left(\frac{50^\circ + 0^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{50^\circ - 0^\circ}{2} \right) \right] = 4 \cos 25^\circ \cos 25^\circ = 4 \cos^2 25^\circ$$

$$T = \sqrt{4 \cos^2 25^\circ} = 2 \cos 25^\circ \Rightarrow T = 2 \cos 25^\circ \quad \text{Rpta. A}$$

Ejercicio 7 Reducir $\sin x \sin 2x \left[\frac{\sin 3x}{\sin 6x} - \frac{\sin x}{\sin 2x} \right]$

A) $\left(\frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} x \operatorname{colog} 2x$

B) $\left(\frac{1}{2} \right) \operatorname{lg} 2x \operatorname{colog} 3x$

C) $\left(\frac{1}{4} \right) \operatorname{tg} x \operatorname{lg} 2x$

D) $\left(\frac{1}{4} \right) \operatorname{lg} x \operatorname{lg} 4x$

E) $\left(\frac{1}{8} \right) \operatorname{colog} x \operatorname{lg} 4x$

Resolución.

$$\bullet \quad \sin 3x - \sin x = 2 \cos \left(\frac{3x+x}{2} \right) \sin \left(\frac{3x-x}{2} \right) = 2 \cos 2x \sin x$$

$$\bullet \bullet \quad \sin 6x - \sin 2x = 2 \cos \left(\frac{6x+2x}{2} \right) \sin \left(\frac{6x-2x}{2} \right) = 2 \cos 4x \sin 2x$$

$$\text{Luego } \sin x \sin 2x \left[\frac{\sin 3x}{\sin 6x} - \frac{\sin x}{\sin 2x} \right] = \sin x \sin 2x \left[\frac{2 \cos 2x}{2 \cos 4x} - \frac{\sin x}{\sin 2x} \right]$$

$$= \frac{\sin x \sin x \cos 2x}{\cos 4x} \quad \text{multiplicamos el numerador y denominador por "2 cos x"}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x \sin x \cos 2x}{2 \cos x \cos 4x}$$

$$= \frac{\sin 2x \sin x \cos 2x}{2 \cos x \cos 4x} \quad \text{multiplicamos el numerador y denominador por "2"}$$

$$= \frac{2 \sin 2x \cos 2x \sin x}{2 \cos x \cos 4x} = \frac{\sin 4x \sin x}{4 \cos x \cos 4x}$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right) \frac{\sin x}{\cos x} \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \left(\frac{1}{4} \right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x \quad \text{Rpta. D}$$

Ejercicio 8 : Simplificar $L = \frac{\sin \theta + K \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos \theta + K \cos 3\theta + \cos 5\theta}$

A) $\operatorname{tg} 9\theta$

B) $\operatorname{Ktg} 2\theta$

C) $\operatorname{Ktg} 3\theta$

D) $\operatorname{tg} 6\theta$

E) $\operatorname{tg} 3\theta$

Resolución:

$$L = \frac{(\sin \theta + \sin 5\theta) + K \sin 3\theta}{(\cos \theta + \cos 5\theta) + K \cos 3\theta} = \frac{2 \sin \left(\frac{5\theta + \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{5\theta - \theta}{2} \right) + K \sin 3\theta}{2 \cos \left(\frac{5\theta + \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{5\theta - \theta}{2} \right) + K \cos 3\theta}$$

$$L = \frac{2 \sin 3\theta \cos 2\theta + K \sin 3\theta}{2 \cos 3\theta \cos 2\theta + K \cos 3\theta} = \frac{\sin 3\theta (2 \cos 2\theta + K)}{\cos 3\theta (2 \cos 2\theta + K)}$$

$$L = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \operatorname{tg} 3\theta$$

$$L = \operatorname{tg} 3\theta \quad \text{Rpta. E}$$



TALLER DE EJERCICIOS N° (27)

Ejercicio 1 : La expresión

$$M = \frac{\sin 41 + \sin 30}{\sin 26 + \sin 46}, \text{ es igual a}$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } \sin 26 \operatorname{cosec} 30$$

Ejercicio 2 : La expresión

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} \text{ es igual a}$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } \operatorname{tg} \left(\frac{x+y}{2} \right)$$

Ejercicio 3 : Simplificar

$$E = \frac{\cos 100^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 50^\circ}$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } [E = 1]$$

Ejercicio 4 : Simplificar

$$R = \sin 40^\circ - \cos 10^\circ + \sin 20^\circ$$

Resolución.

$$\text{Rpta. } R = \text{Cero}$$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE TRANSFORMACIONES TRIGONOMETRICAS

NIVEL I

Ejercicio 1: Reducir a monomio:

$$(\cos 6x + \cos 2x) \sec 4x$$

- A) $2 \cos 2x$ B) $4 \cos 2x$ C) $2 \cos 4x$
D) $\cos 4x$ E) $\sin 6x$

Ejercicio 2: Efectuar

$$T = \cos 4x \cdot \sin 2x + \sin 5x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \cos x$$

- A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) N.A

Ejercicio 3: Simplificar

$$A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$$

- A) $\lg 4x$ B) $\operatorname{colog} 2x$ C) $\operatorname{colog} x$
D) $\lg 2x$ E) $\lg x$

Ejercicio 4: Simplificar

$$N = \frac{\cos 75^\circ + \sin 25^\circ + \cos 55^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 20^\circ + \cos 50^\circ}$$

- A) $4 \cos 5^\circ$ B) $2 \cos 5^\circ$ C) $4 \cos 10^\circ$
D) $2 \cos 10^\circ$ E) $\cos 10^\circ$

Ejercicio 5: Simplificar

$$P = \sin 20^\circ \sin 40^\circ + \frac{3}{8} \operatorname{cosec} 10^\circ$$

- A) $\operatorname{colog} 20^\circ$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{colog} 20^\circ$

- C) $\frac{1}{2} \operatorname{colog} 20^\circ$ D) $\lg 20^\circ$

- E) $\frac{\sqrt{3}}{2} \lg 20^\circ$

Ejercicio 6: Simplificar

$$M = \frac{\cos 40^\circ}{\sin 20^\circ} - \frac{\cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\cos 50^\circ}{\sin 40^\circ} - \frac{\cos 20^\circ}{\sin 40^\circ}$$

- A) $\sin 10^\circ$ B) $2 \sin 10^\circ$ C) $\sin 20^\circ$
D) $2 \cos 20^\circ$ E) $2 \sin 20^\circ$

Ejercicio 7: Simplificar

$$R = \frac{\sin \alpha + m \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + m \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$$

- A) $\lg 2\alpha$ B) $\lg 4\alpha$ C) $\lg 3\alpha$
D) $\lg \alpha$ E) m

Ejercicio 8: Marque lo incorrecto

- A) $\cos 20^\circ - \cos 80^\circ = \sin 50^\circ$
B) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \sin 80^\circ$
C) $\cos 10^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos 50^\circ$
D) $\cos 40^\circ + \sin 10^\circ = \sin 70^\circ$
E) $\sin 20^\circ + \cos 40^\circ = \sin 10^\circ$

Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. D	4. B	5. B
6. E	7. A	8. E		

NIVEL II

Ejercicio 1: Reducir $y = 1 + 4 \cos 20^\circ$

- A) $\sqrt{3} \lg 20^\circ$ B) $\lg 20^\circ$ C) $\operatorname{colog} 20^\circ$
D) $\sqrt{3} \operatorname{colog} 20^\circ$ E) $\sqrt{3}$

Ejercicio 1. Transformar a producto

$$R = \sin a - \sin 2a + \sin 3a$$

A) $4 \sin \frac{a}{2} \cos a \cos \frac{3a}{2}$

B) $2 \sin \frac{a}{2} \cos a \cos \frac{3a}{2}$

C) $4 \cos \frac{a}{2} \cos a \cos \frac{3a}{2}$

D) $4 \sin \frac{a}{2} \sin a \sin \frac{3a}{2}$

E) N.A.

Ejercicio 2. Diga cuáles son correctas

I) $\sin^2 20^\circ - \sin^2 10^\circ = 0.5 \sin 10^\circ$

II) $\cos^2 50^\circ - \sin^2 10^\circ = 0.5 \cos 40^\circ$

III) $\sin^2 40^\circ - \sin^2 20^\circ = 0.5 \sin 20^\circ$

A) I B) I y II C) I y III D) Todas E) II

Ejercicio 3. Calcular

$$P = \frac{2 \sin 10^\circ + \sqrt{3} \cos 10^\circ + 2\sqrt{3} \cos 40^\circ}{\cos 55^\circ + \sqrt{3} \sin 55^\circ}$$

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

Ejercicio 4. Simplificar

$$R = \frac{\sec 40^\circ + \operatorname{cosec} 10^\circ}{1 + \sin 50^\circ}$$

A) $1/2$ B) 2 C) 4 D) 8 E) 6

Ejercicio 5. Simplificar

$$Q = \frac{\sin a}{2 \cos a} + \frac{\sin 2a}{\cos 2a + \cos 4a}$$

A) $\lg 3a$ B) $(1/2) \lg 3a$ C) $\frac{\sin 3a}{\cos 6a}$
 D) $\operatorname{colg} 3a$ E) $(1/2) \operatorname{colg} 3a$

Ejercicio 6. Expresar como producto

$$K = \sqrt{3} + 2 \sin 20^\circ$$

A) $4 \sin 28^\circ \cos 48^\circ$ B) $4 \sin 48^\circ \cos 28^\circ$ C) $2 \sin 20^\circ \cos 40^\circ$ D) $4 \cos 40^\circ \sin 20^\circ$ E) $4 \sin 40^\circ \cos 20^\circ$

Ejercicio 7. Reducir

$$Q = \sqrt{1 + \cos 20^\circ} - \sqrt{1 - \cos 20^\circ}$$

A) $2 \sin^2 35^\circ$ B) $4 \sin 35^\circ$ C) $2 \sin 35^\circ$ D) $4 \cos 65^\circ$ E) N.A.Ejercicio 8. Hallar el valor de "R" para $\alpha = 20^\circ$

$$R = \cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha$$

A) $1/4$ B) $1/2$ C) 1 D) 0 E) 2Ejercicio 9. Reducir A) $\sin 7x \cos 2x + \cos 8x \sin 3x$ A) $\sin 10x \cos x$ B) $\cos 10x \sin x$ C) $\sin 10x \sin x$ D) $\cos 10x \cos x$ E) $\sin 8x \cos 7x$

Clave de Respuestas

1. D	2. A	3. B	4. A	5. C
6. B	7. E	8. C	9. D	10. A

8.2 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se denomina ecuación trigonométrica a la igualdad condicional que se verifica, para un determinado conjunto de valores atribuido a los ángulos.

SOLUCIÓN PRINCIPAL: Es aquella de menor valor absoluto de todas las soluciones particulares positivas o negativas.

SOLUCIÓN PARTICULAR: Es el conjunto formado por todos los ángulos que satisfacen una ecuación.

Clasificación:

- Las ecuaciones trigonométricas pueden ser

a) Ecuaciones Trigonométricas de Primer Tipo.

Son aquellas en las cuales se presentan funciones iguales o diferentes pero siempre el mismo ángulo.

Ejemplos: i) $\sin^2 A - 2 \sin A + 1 = 0$ ii) $\sin 2b + \cos 2b = 1$

b) Ecuaciones Trigonométricas de Segundo Tipo:

Son aquellas en las cuales se presentan funciones iguales o diferentes pero siempre ángulos diferentes.

Ejemplos: i) $\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ ii) $\lg (45^\circ + x) - \lg 2x = \cotg x$

c) Ecuaciones Trigonométricas de Tercer Tipo.

Son aquellas en las cuales se presentan funciones circulares inversas.

Ejemplos: i) $\arcsin(\cos x) = 0$ ii) $\arcsin(x+1) - \arcsin(x-1) = 0$

8.2.1 ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Es la ecuación más simple que se puede presentar

Forma General: $F(x) = a$

Donde

F = Operador Trigonométrico como \sin , \cos , \lg ,
 x = Valor angular como: α° , β° , θ° ,
 a = Valor numérico

Ejemplo: Resolver $\sin x = \frac{1}{2}$

Resolución

La solución de esta ecuación, se logra identificando el valor del ángulo veamos

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \quad \text{Solución Principal}$$

Nota: Es importante recordar que si la variable no está afectada por algún operador trigonométrico, entonces esta igualdad no es una ecuación trigonométrica.

Ejemplo: $x - \operatorname{sen}(x) = 0 \Rightarrow$ No es una Ec. Trigonométrica

Esta variable no está afectada por algún Operador Trigonométrico

FÓRMULAS GENERALES

a) Para el seno y su cosecante

$$x = 180^\circ k + (-1)^k x_p$$

b) Para el coseno y su secante

$$x = 360^\circ k \pm x_p$$

c) Para la tangente y cotangente

$$x = 180^\circ k + x_p$$

Donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$\begin{cases} x_p = \text{Solución Principal} \\ x_g = \text{Solución General} \end{cases}$$

8.2.2 RECOMENDACIONES GENERALES PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN.

1. Toda ecuación debe tratar de expresarse en términos de una sola función y de un sólo ángulo, de manera que dicha función se calcule mediante un proceso algebraico.
2. Si la ecuación es homogénea en seno y coseno se debe dividir entre el coseno elevado al grado de homogeneidad, lo cual conduce a una ecuación en la función tangente únicamente.



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS



Ejercicio 1 Resolver $2 \sin \theta - 1 = 0$ para $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

Resolución.

♦ De la ecuación $2 \sin \theta - 1 = 0$

$$\text{Obtenemos } 2 \sin \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ pero } \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\sin \theta = \sin 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \quad (\text{Solución Principal}) \Rightarrow x_p = 30^\circ$$

$$\text{De la Fórmula General } x_g = 180^\circ K + (-1)^k x_p$$

$$\text{Cuando } K = 1 \Rightarrow x = 180^\circ (1) + (-1)^1 (30^\circ) \Rightarrow x = 180^\circ - 30^\circ \Rightarrow \theta = 150^\circ$$

$$\text{Cuando } K = 2 \Rightarrow x = 180^\circ (2) + (-1)^2 (30^\circ) \Rightarrow x = 360^\circ + 30^\circ \Rightarrow \theta = 390^\circ$$

Luego, las soluciones que satisfacen dicha ecuación son $S = \{30^\circ, 150^\circ\}$ **Rpta.**

Ejercicio 2 Resolver $\cos \theta - 2 \cos \theta \sin \theta = 0$, para $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

Resolución.

En la ecuación dada factorizamos "cos θ " obteniendo.

$$\cos \theta (1 - 2 \sin \theta) = 0, \text{ igualamos cada factor a cero.}$$

$$\text{I) } \cos \theta = 0, \quad \text{II) } (1 - 2 \sin \theta) = 0 \Rightarrow 1/2 = \sin \theta$$

♦ De la expresión, $\cos \theta = 0$, sabemos que: $0 = \cos 90^\circ$

$$\cos \theta = \cos 90^\circ$$

$$\theta = 90^\circ \quad (\text{Solución Principal}) \quad x_p = 90^\circ$$

De la fórmula General para el coseno. $x_p = 360^\circ K \pm x_p$

Cuando: $K = 1 \Rightarrow x = 360^\circ (1) - 90^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - 90^\circ \Rightarrow \theta = 270^\circ$

• De la expresión: $\sin \theta = \frac{1}{2}$ sabemos que $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$
 $\sin \theta = \sin 30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$ (Solución Principal) $\Rightarrow x_p = 30^\circ$

De la fórmula General para el seno. $x_p = 180^\circ K + (-1)^K x_p$

Cuando: $K = 1 \Rightarrow x = 180^\circ (1) + (-1)^1 30^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 30^\circ \Rightarrow \theta = 150^\circ$

Luego las soluciones que satisfacen dicha ecuación son $S = \{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 270^\circ\}$ **Apta.**

Ejercicio 3 Resolver: $\sin \theta - \sin \theta \cotg \theta = 0$ para: $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

Resolución

En la ecuación dada, factorizamos "sen θ ", obteniendo

$$\sin \theta (1 - \cotg \theta) = 0 \text{ igualamos cada factor a cero}$$

i) $\sin \theta = 0$ ii) $(1 - \cotg \theta) = 0 \Rightarrow \cotg \theta = 1$

• De la expresión: $\sin \theta = 0$ sabemos que $0 = \sin 0^\circ$
 $\sin \theta = \sin 0^\circ \Rightarrow \theta = 0^\circ$ (Solución Principal)

De la Fórmula General para el seno. $x_p = 180^\circ K + (-1)^K x_p$

Cuando: $K = 1 \Rightarrow x = 180^\circ (1) + (-1)^1 0^\circ \Rightarrow x = 180^\circ \Rightarrow \theta = 180^\circ$

De la expresión: $\cotg \theta = 1$, sabemos que $1 = \cotg 45^\circ$
 $\cotg \theta = \cotg 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$ (Solución Principal)

De la Fórmula General para la Cotangente: $x_p = 180^\circ K + x_p$

Cuando: $K = 1 \Rightarrow x = 180^\circ (1) + 45^\circ \Rightarrow x = 225^\circ \Rightarrow \theta = 225^\circ$

Luego, las soluciones que satisfacen dicha ecuación son $S = \{45^\circ, 225^\circ\}$ **Apta.**

Recomendación: Estimado alumno es recomendable que verifiques si las soluciones halladas en la ecuación dada, como observaras en este ultimo ejercicio cumplen con las condiciones de 0° y 180° en la ecuación original sea

$$\sin \theta - \sin \theta \cotg \theta = 0$$

$$\sin 0^\circ - \sin 0^\circ \cotg 0^\circ = 0$$

Este valor no existe



TALLER DE EJERCICIOS Nº 28

Ejercicio 1 : Resolver

$$2 \cos \theta - \sqrt{3} = 0, \text{ para } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

Resolución.

Rpta. $S = \{30^\circ, 330^\circ\}$

Ejercicio 2 Resolver

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta = 0, \text{ para } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

Resolución.

Rpta. $S = \{0^\circ, 180^\circ\}$

Ejercicio 3 : Resolver

$$2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0, \text{ para } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

Resolución.

Rpta. $S = \{90^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$

Ejercicio 4 . Resolver

$$\lg \theta \quad \sin \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 0, \\ \text{para } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

Resolución.

Rpta. $S = \{0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 240^\circ\}$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

NIVEL I

Ejercicio 1 Resolver $2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$, dar como respuestas el valor para " θ "

- A) 0° B) 30° C) 60° D) 90° E) 45°

Ejercicio 2 Resolver $\sec^2 \alpha + \lg^2 \alpha = 3 \lg \alpha$

- A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

Ejercicio 3 Resolver $\sin 2x + \cos x = 0$

- A) 150° B) 210° C) 90° D) 0° E) 240°

Ejercicio 4 Resolver

$$\lg^2 \theta - \lg \theta = 0, 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

- A) 185° B) 225° C) 220° D) 240° E) 260°

Ejercicio 5 Hallar el menor arco positivo que cumple

$$\lg 2x + \operatorname{colog} x = 8 \cos^2 x$$

- A) $\pi/12$ B) $\pi/6$ C) $\pi/5$ D) $\pi/24$ E) $\pi/2$

Ejercicio 6 Resolver $\sin 5x = \sin x$

- A) $(2K + 1) \frac{\pi}{8}$ B) $(2K + 1) \frac{\pi}{3}, K \frac{\pi}{2}$

- C) $(2K + 1) \frac{\pi}{6}, K \frac{\pi}{2}$ D) $(2K + 1) \frac{\pi}{5}$

- E) $(2K + 1) \frac{\pi}{3}, K \frac{\pi}{4}$

Ejercicio 7 Resolver

$$\sqrt{\lg x} + \sqrt{\operatorname{colog} x} = 2$$

- A) $K \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ B) $K\pi + \frac{\pi}{4}$ C) $K \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

- D) $2K\pi + \frac{\pi}{3}$ E) $K\pi + \frac{\pi}{3}$

Ejercicio 8 Resolver

$$\operatorname{colog} x + \operatorname{cosec} x = \sin x$$

- A) $(2K + 1) \frac{\pi}{2}, (2K + 1) \pi$ B) $(2K + 1) \frac{\pi}{2}$

- C) $(2K + 1) \frac{\pi}{2}, 2K\pi$ D) $K\pi + \frac{\pi}{3}$

- E) $K\pi + \frac{\pi}{6}$

Ejercicio 9 Resolver

$$4 \cos x - 3 \sec x = 2 \lg x$$

- A) $K\pi + (-1)^K \frac{\pi}{10}$ B) $K\pi - (-1)^K \frac{3\pi}{10}$

- C) $K\pi + (-1)^K \frac{\pi}{5}$ D) $K\pi + (-1)^K \frac{\pi}{10}$

- E) $K\pi - (-1)^K \frac{3\pi}{5}$

Ejercicio 10 Si $x \in [0, 2\pi]$, Hallar el número de soluciones de

$$1 + 2 \sin x = 2 \cos^2 x + \cos 2x$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. B	4. B	5. D
6. C	7. B	8. B	9. B	10. C

Capítulo

9

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Para resolver un triángulo rectángulo basta dar dos elementos, uno de los cuales por lo menos debe ser un lado.

Previamente establecemos unas relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo.



Dichas relaciones son las siguientes:

I) Relación entre los tres lados:

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad \text{Teorema de Pitágoras}$$

II) Relación entre los dos ángulos agudos: $\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$

III) Relación entre la hipotenusa, un cateto y un ángulo agudo:

Del $\triangle ABC$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \sin \hat{C}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cos \hat{A}$$

Luego: $c = b \sin \hat{C} = b \cos \hat{A}$

También:

$$\cos \hat{C} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cos \hat{C}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \sin \hat{A}$$

Luego: $a = b \cos \hat{C} = b \sin \hat{A}$

IV) Relación entre los dos catetos y un ángulo agudo del mismo $\triangle ABC$:

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \operatorname{tg} \hat{C}$$

$$\operatorname{ctg} \hat{A} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \operatorname{ctg} \hat{A}$$

Luego: $a = a \operatorname{tg} \hat{C} = a \operatorname{ctg} \hat{A}$

También

$$\operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \operatorname{cotg} \hat{C}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \operatorname{tg} \hat{A}$$

Luego

$$b \operatorname{cotg} \hat{C} = c \operatorname{tg} \hat{A}$$

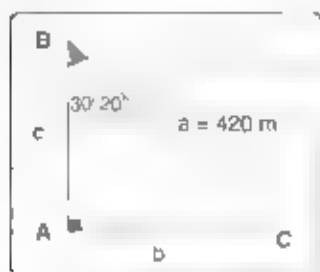


PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



Problema 1 Resuelve el triángulo rectángulo BAC, con el ángulo recto en A, sabiendo que $a = 420$ m y $\angle B = 30^\circ 20'$

Resolución:



En el $\triangle BAC$ $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ 20' = \frac{b}{420}$

Donde $420 \operatorname{sen} 30^\circ 20' = b$ (Ver en tabla)

$$420 (0,505 0) = b \quad \therefore \quad b = 212,10 \text{ m}$$

Además $\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow \cos 30^\circ 20' = \frac{c}{420}$

Donde $420 \cos 30^\circ 20' = c$ (Ver en tabla) $420 (0,863 1) = c \Rightarrow c = 362,50 \text{ m}$

Problema 2 Resuelve el triángulo rectángulo BAC con el ángulo recto en B, sabiendo que el cateto $c = 20$ m y el ángulo A mide $40^\circ 10'$

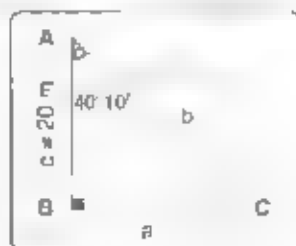
Resolución:

En el $\triangle BAC$ $\operatorname{tg} A = \frac{a}{c} \Rightarrow \operatorname{tg} 40^\circ 10' = \frac{a}{20}$

Donde $20 \operatorname{tg} 40^\circ 10' = a$

$$20 (0,844 1) = a \Rightarrow \therefore a = 16,88 \text{ m}$$

Además: $\sec A = \frac{b}{c} \Rightarrow \sec 40^\circ 10' = \frac{b}{20}$

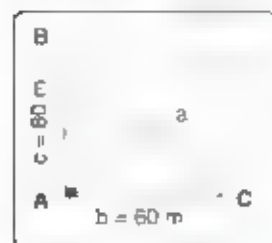


Donde $20 \sec 40' 10'' = b$

$$20 (1,308\ 6) = b \Rightarrow \therefore b = 26,17\text{ m}$$

Problema 3 Resuelve el triángulo BAC, con el ángulo recto en A, cuyos catetos miden 80 m y 60 m respectivamente

Resolución.



Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$$\text{Luego } a^2 = (80)^2 + (60)^2 \Rightarrow a^2 = 6\ 400 + 3\ 600$$

$$a^2 = 10\ 000 \Rightarrow a = \sqrt{10\ 000}$$

$$a = 100\text{ m}$$

$$\text{En el } \triangle BAC: \lg B = \frac{b}{c} \Rightarrow \lg B = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

$$\lg B = 0,75 \quad (\text{Ver tabla}) \Rightarrow \underline{B = 36,86^\circ\ 37''}$$

Problema 4 La diagonal de un rectángulo mide 40 m y forma con la base un ángulo de $25^\circ 50'$. Calcula el área del rectángulo.

Resolución.



- En el $\triangle BAD$:

$$\sin 25^\circ 50' = \frac{h}{40}$$

$$h = 40 \sin 25^\circ 50'$$

$$h = 40 (0,435\ 8)$$

$$h = 17,432\text{ m}$$

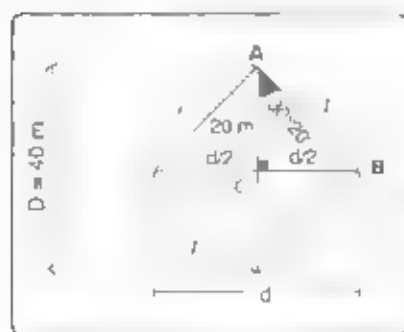
$$\text{Además } \cos 25^\circ 50' = \frac{b}{40}$$

$$b = 40 \cos 25^\circ 50' \Rightarrow b = 40 (0,900\ 1) \Rightarrow b = 36,004\text{ m}$$

$$\text{Luego. Área } \square = b \cdot h = 36,004\text{ m} \times 17,432\text{ m} \Rightarrow \underline{\text{Área } \square = 627,622\text{ m}^2}$$

Problema 5 Una de las diagonales de un rombo mide 40 m y forma con uno de los lados del mismo un ángulo de $30^{\circ}20'$. Calcular la otra diagonal y el perímetro de rombo

Resolución:



$$\text{En el } \triangle AOB \quad \lg 30^{\circ}20' = \frac{d/2}{20} = \frac{d}{40}$$

$$\text{Donde} \quad d = 40 \times \lg 30^{\circ}20'$$

$$d = 40 \times (0.5651)$$

$$d = 23,404\text{ m}$$

$$\text{Además.} \quad \sec 30^{\circ}20' = \frac{L}{20}$$

$$\text{Donde} \quad L = 20 \times \sec 30^{\circ}20' \quad \Rightarrow \quad L = 20 \times (1.1586) \quad \Rightarrow \quad L = 23.172\text{ m}$$

$$\text{Luego} \quad \text{Perímetro del rombo} = 4L = 4(23.172\text{ m})$$

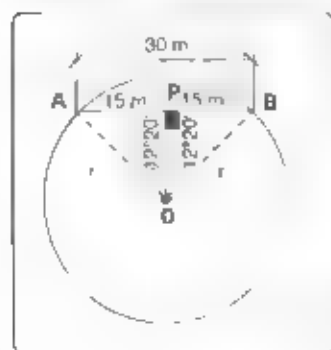
$$\text{Perímetro del rombo} = 92.688\text{ m}$$

Recuerda que:

En un rombo los 4 lados son iguales y las diagonales se cruzan perpendicularmente en su punto medio.

Problema 6 Hallar el área de un círculo en el que una cuerda de 30 m de largo subtende un ángulo central de $24^{\circ}40'$

Resolución:



- En el $\triangle POB$

$$\sin 12^{\circ}20' = \frac{15}{r}$$

$$r = \frac{15}{\sin 12^{\circ}20'} = 70.22$$

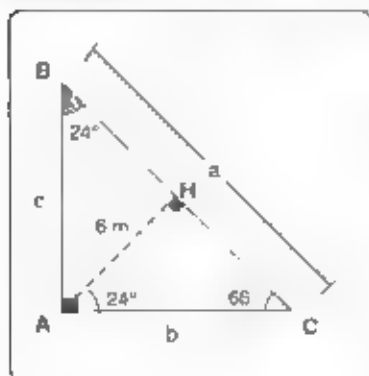
$$r = 70.22\text{ m}$$

$$\text{Luego} \quad \text{Área del círculo} = \pi r^2 = 3.14 (70.22\text{ m})^2$$

$$\text{Área del círculo} = 15\,482.86\text{ m}^2$$

Problema 7 Determinar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo ABC, sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa BC mide 6 m y forma un ángulo de 24° con el cateto "b"

Resolución:



En el $\triangle AHC$: $\cos 24^\circ = \frac{6}{b}$

$$b = \frac{6}{\cos 24^\circ} = 6,568 \text{ m}$$

$$b = 6,568 \text{ m}$$

En el $\triangle BAH$: $\sin 24^\circ = \frac{b}{c}$

$$c = \frac{6}{\sin 24^\circ} = 14,752 \text{ m}$$

$$c = 14,752 \text{ m}$$

En el $\triangle BAC$: $\sin 24^\circ = \frac{b}{a}$

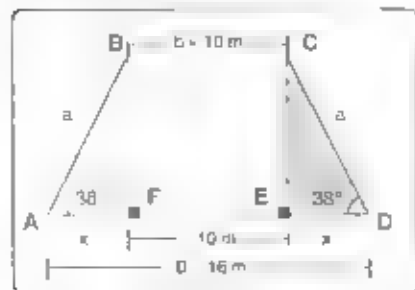
$$a = \frac{b}{\sin 24^\circ} = \frac{6,568 \text{ m}}{0,4067} \Rightarrow a = 16,149 \text{ m}$$

Luego, las longitudes de los lados del triángulo ABC son

$$a = 16,149 \text{ m} \quad ; \quad b = 6,568 \text{ m} \quad \text{y} \quad c = 14,752 \text{ m}$$

Problema 18 - En un trapecio isósceles el ángulo en la base mayor mide 38° y las bases del trapecio miden 10 m y 16 m respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del trapecio?

Resolución:



De la figura: $x + 10 \text{ m} + x = 16 \text{ m}$

$$2x + 10 \text{ m} = 16 \text{ m} \Rightarrow x = 3 \text{ m}$$

En el $\triangle CED$: $\cos 38^\circ = \frac{x}{a} = \frac{3 \text{ m}}{a}$

$$a = \frac{3 \text{ m}}{\cos 38^\circ} = 3,807 \text{ m}$$

$$a = 3,807 \text{ m}$$

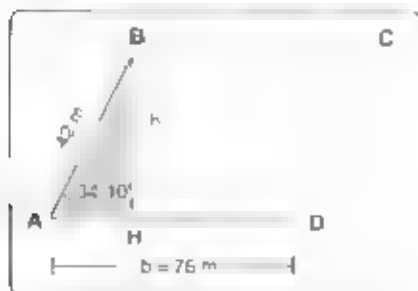
Luego Perímetro del trapecio = suma de sus 4 lados

$$\text{Perímetro} = B + b + 2a = 16 \text{ m} + 10 \text{ m} + 2(3,807 \text{ m})$$

$$\text{Perímetro} = 33,614 \text{ m}$$

Problema 9 Los lados consecutivos de un paralelogramo miden 76 m y 42 m respectivamente. Hallar su área si el ángulo comprendido entre dichos lados es de $34^{\circ}10'$.

Resolución.



• En el $\triangle AHB$, $\text{sen } 34^{\circ}10' = \frac{h}{42}$

$$h = 42 \times \frac{\text{sen } 34^{\circ}10'}{1}$$

$$h = 42 \times (0,5616)$$

$$h = 23,5872 \text{ m}$$

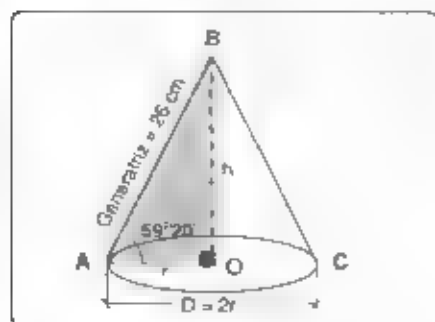
Luego, $\text{Área} / \text{ } = \text{Base} \times \text{altura} = b \times h$

$$\text{Área} = 76 \text{ m} \times 23,5872 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\text{Área} = 1792,6272 \text{ m}^2$$

Problema 10 Hallar la altura y el diámetro de la base de un cono recto, cuya generatriz mide 26 cm y cuál forma con la base un ángulo de $59^{\circ}20'$.

Resolución.



• En el $\triangle BOA$,

$$\text{sen } 59^{\circ}20' = \frac{h}{26}$$

$$h = 26 \times \frac{\text{sen } 59^{\circ}20'}{1}$$

$$h = 26 \times (0,8601)$$

$$h = 22,3626 \text{ cm}$$

En el $\triangle BOA$, $\text{cos } 59^{\circ}20' = \frac{r}{26}$

$$r = 26 \times \frac{\text{cos } 59^{\circ}20'}{1} \Rightarrow r = 26 \times (0,5100) \Rightarrow r = 13,26 \text{ cm}$$

Luego, Diámetro del cono recto $= 2r = 2 (13,26 \text{ cm})$

$$\therefore D = 26,52 \text{ cm}$$



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

NIVEL I

Problema 1 Resuelve el triángulo rectángulo ABC, recto en B, sabiendo que $a = 20$ m $\angle A = 32^\circ 20'$

Problema 2 Resuelve el triángulo rectángulo BAC, con el ángulo recto en "C", sabiendo que el cateto $b = 40$ m, y el ángulo "A" mide $30^\circ 40'$

Problema 3 Resuelve el triángulo rectángulo BAC, con el ángulo recto en "B", cuyos catetos miden 13 m y 5 m respectivamente

Problema 4 La diagonal de un rectángulo mide 25 m y forma con la altura un ángulo de $67^\circ 50'$. Calcular el área del rectángulo.

Problema 5 Una de las diagonales de un rombo mide 60 m y forma con uno de los lados

del mismo un ángulo de $32^\circ 40'$. Calcular la otra diagonal y el área del rombo.

Problema 6 Hallar el área de un círculo en el que una cuerda de 40 m de largo, subtiende un ángulo central $46^\circ 20'$

Problema 7 Determine la longitud de los lados de un triángulo rectángulo ABC sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa AB mide 4 m y forma un ángulo de 63° con el cateto "a"

Clave de Respuestas

- $b = 37,39$ m y $c = 31,59$ m
- $a = 23,72$ m y $c = 46,50$ m
- Uno de sus ángulos $= 21^\circ$ y $b = 13,93$ m
- $218,36$ m²
- Diagonal $= 32,38$ m y área $= 971,4$ m²
- $8\ 119,42$ m²
- $a = 8,81$ m; $b = 4,48$ m y $c = 9,86$ m

NIVEL II

Problema 1 En un trapecio isósceles el ángulo en la base mayor mide 34° si las bases del trapecio miden 12 m y 18 m, respectivamente. ¿Cuánto mide el área del trapecio?

Problema 2 Los lados consecutivos de un paralelogramo miden 70 m y 36 m respectivamente. Hallar su área si el ángulo comprendido entre dichos lados es de $26^\circ 20'$

Problema 3 Hallar el diámetro de la base de un cono recto, cuya generatriz mide 28 cm la cual forma con la base un ángulo de $45^\circ 40'$

Problema 4 El perímetro de un rombo es

de 160 m y uno de sus ángulos es de $36^\circ 40'$. ¿Cuánto miden sus diagonales?

Problema 5 La altura y la base menor de un trapecio isósceles miden 8 m y 14 m respectivamente si uno de los ángulos obtusos es de 126° . ¿Cuánto mide la mediana?

Problema 6 ¿Cuánto mide el lado de un hexágono regular inscrito en un círculo de 6,2 m de radio?

Clave de Respuestas

- $30,345$ m²
- $39,13$ m
- $d = 25,16$ m y $D = 75,93$ m
- $19,81$ m
- $1\ 117,85$ m²
- $6,2$ m



UN NÚMERO MISTERIOSO

Un naturalista del siglo XVIII, el conde Buffon, realizó muchos experimentos, el más famoso de los cuales es el "Problema de la Aguja".

Una superficie plana está dividida por líneas paralelas (como se muestra en la figura), separadas entre sí por una distancia H , tomando una aguja de longitud L , menor que H , Buffon la dejaba caer sobre la superficie rayada. Consideraba que la caída era favorable cuando la aguja quedaba atravesando una raya y desfavorable cuando caía entre dos rayas. Su sorprendente descubrimiento fue que la razón de éxitos a fracasos era una expresión en la que aparecía π .

En caso de que L sea igual a H , la probabilidad de un éxito es $2/\pi$.

A medida que aumentaba el número de pruebas, tanto más se aproximaba el resultado al valor de π .

Experimentos más completos fueron realizados en el año 1901 por un matemático italiano, Lazzerini, quien dejó caer la aguja 3408 veces y obtuvo para π un valor igual a 3.1415929, con un error de sólo 0.0000003.

Resulta notable que el número π aparezca en muchas experiencias además de la conocida relación entre el diámetro y la longitud de la circunferencia.



Capítulo

10

ÁNGULOS

HORIZONTALES

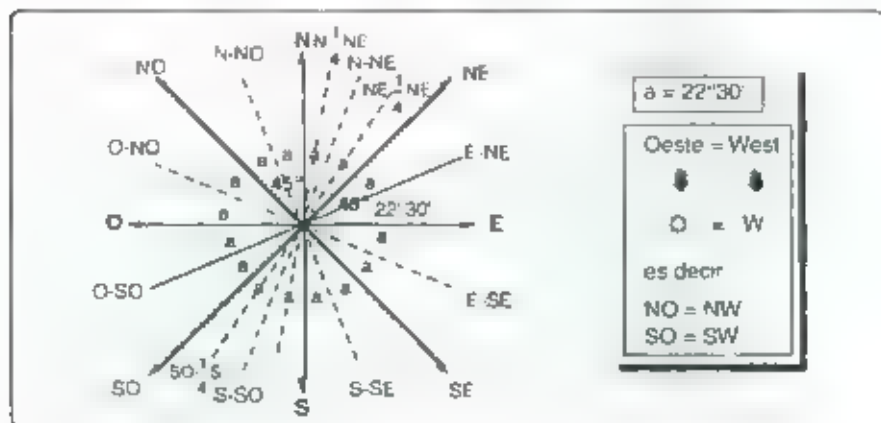
10.1 DEFINICIÓN:

Son aquellos ángulos, cuya medición se realiza en un plano horizontal. El instrumento de medición para estos ángulos se llama **Bruja**.

Su estudio también está basado en la resolución de triángulos rectángulos y por ende la aplicación de Razones Trigonómicas.

10.1.1 CONCEPTOS PRELIMINARES.

Rosa Náutica (o Rosa de los Vientos). - Es el plano, en el cual están contenidos las 32 direcciones notables de la brújula.



10.1.2 DIRECCIONES.

A. Principales. - Se evalúan a 90°

Ejemplos.

N, S, E, O

B. Secundarias.- Se evalúan a 45°**Ejemplos:**

NE = Nor Este

SO = Sur Oeste

SE = Sur Este

NO = Nor Oeste

C. Terciarias.- Se evalúan a 22°30'**Ejemplos:**

N NE = Nor Nor Este

O SO = Oeste Sur Oeste

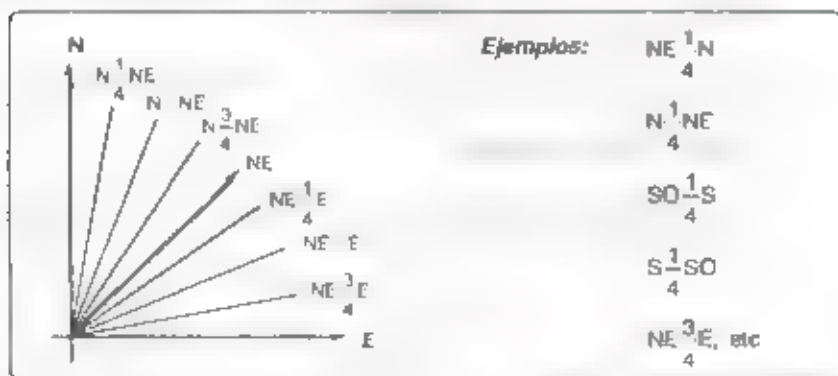
E - NE = Este - Nor - Este

O - NO = Oeste Nor Oeste

S SE = Sur Sur Este

N NO = Nor Nor Oeste

S SO = Sur Sur Oeste

D. Cuaternarias.- Se evalúan a 11°5'**DIRECCIONES EQUIVALENTES**

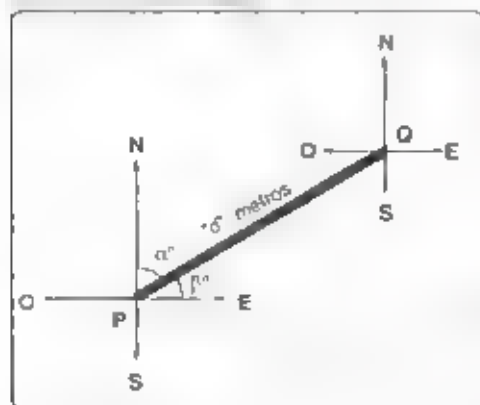
NE <> EN

S SE <> S.E

N NO <> N NO

 $N \frac{1}{4} NO <> N N NE <> NE \frac{3}{4} N$
DIRECCIONES OPUESTASSO - O ; $E \frac{1}{4} NE$
 $NE - E ; O \frac{1}{4} SO$
10.1.3 HUMBO O DIRECCIÓN

Es la desviación angular que sufre la Rosa Náutica con respecto a las dos direcciones principales, al ubicar un punto.



NOMENCLATURAS:

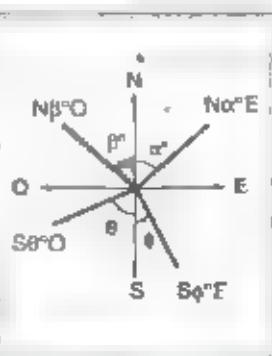
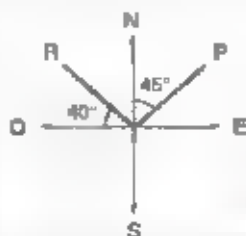
- El punto "Q" se encuentra en la dirección β° al Norte del Este y a "d" metros del punto "P"
- El punto "Q" se encuentra en la dirección α° al Este del Norte y a "d" metros del punto "P"
- El punto "Q" se encuentra en la dirección $N \alpha^\circ E$ y a "d" metros del punto "P"
- El punto "Q" se encuentra en la dirección $E \beta^\circ N$ y a "d" metros del punto "P"

Otros Ejemplos:

- El punto "A" se encuentra en la dirección $S 20^\circ E$



- El punto "R" se encuentra en la dirección $O 40^\circ N$ y el punto "P" en la dirección NE.



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ÁNGULOS HORIZONTALES

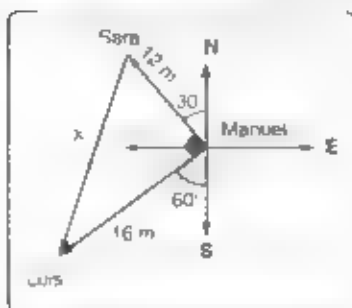


Problema 1. Luis se encuentra a 16 m de Manuel en la dirección $S 60^\circ O$ y Sara se encuentra a 12 m de Manuel en la dirección $N 30^\circ O$. Hallar la distancia entre Luis y Sara.

Resolución.

Sea: x = La distancia entre Luis y Sara

En el Δ LMS calculamos "x" Aplicando el teorema de Pitágoras $SL^2 = SM^2 + ML^2$



Donde: $SL^2 = (12 \text{ m})^2 + (16 \text{ m})^2$

$$SL^2 = 144 \text{ m}^2 + 256 \text{ m}^2 = 400 \text{ m}^2$$

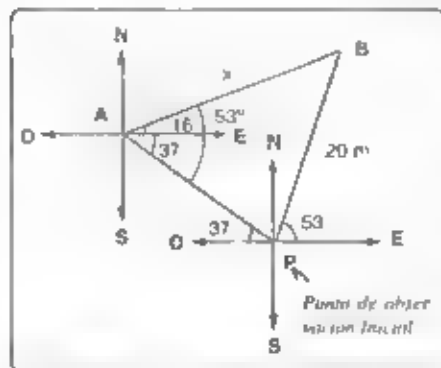
$$SL^2 = \sqrt{400 \text{ m}^2} = 20 \text{ m}$$

$$SL = x = 20 \text{ m}$$

Rpta. La distancia entre Luis y Sara es de 20 metros.

Problema 2 Si desde un punto se observan dos árboles "A" y "B" en los rumbos $O 37^\circ N$ y $E 53^\circ N$ respectivamente. ¿Cua debe ser la distancia entre los dos árboles, si desde "A" se vuelve a observar "B" a 16° al Norte del Este y la distancia del punto de observación inicial al árbol "B" es de 20 metros?

Resolución.



De la figura: $\angle OPA = \angle PAE = 37^\circ$

(Por Alternos Internos)

• Por deducción el $\angle APB$ es igual a 90°

Sea: x = distancia entre los dos árboles

Luego, En el Δ APB

$$\begin{aligned} \text{sen } 53^\circ \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} &= \frac{20 \text{ m}}{x} \\ 4 &= \frac{20 \text{ m}}{5} \\ 5 &= x \end{aligned}$$

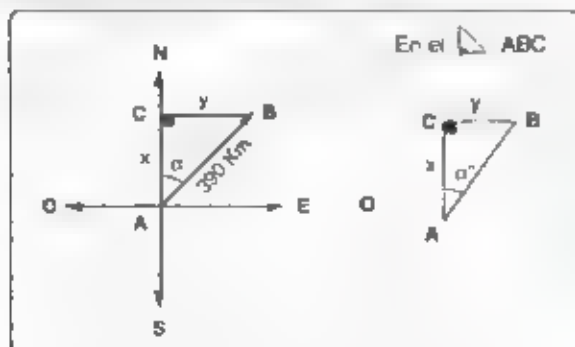
Donde $x = \frac{5}{4} \cdot 20 \text{ m} = 25 \text{ m}$

Rpta. La distancia entre los dos árboles es de 25 metros

Problema 3 Un móvil se desplaza 390 km, según la dirección $N \alpha E$. Con respecto a un punto inicial "A" Hallar cuántos km se ha desplazado hacia el Norte. Sabiendo que la $\text{tg } \alpha = 5/12$

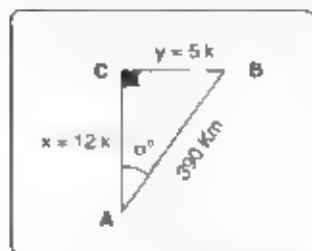
Resolución.

Del Gráfico: $\cos \alpha = \frac{x}{390} \Rightarrow x = 390 \cos \alpha \quad (1)$



$$\begin{aligned} \lg \alpha &= \frac{y}{x} \\ \text{Pero } \lg \alpha &= \frac{5}{12} = \frac{5k}{12k} \\ \frac{5k}{12k} &= \frac{y}{x} \Rightarrow y = 5k \\ &\Rightarrow x = 12k \end{aligned}$$

• Por el Teorema de Pitágoras:



$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= AB^2 \\ (12k)^2 + (5k)^2 &= AB^2 \\ 144k^2 + 25k^2 &= AB^2 \\ \sqrt{169k^2} &= AB \\ 13k &= AB \end{aligned}$$

Según el Gráfico: $AB = 390 \text{ Km}$

$$\begin{aligned} 13k &= 390 \text{ Km} \Rightarrow k = 30 \text{ Km} \end{aligned}$$

Rpta. El número de km que se ha desplazado hacia el corte dicho móvil es $x = 12k = 12(30 \text{ km}) = 360 \text{ km}$



TALLER DE PROBLEMAS N° 29

Problema 1 : Una persona se encuentra alejada 105 Km. en dirección N 37° O de un pueblo situado a orillas de un río, cuyas aguas corren en dirección E - O. Determinar la mínima distancia que deberá caminar la persona para llegar al río.

Resolución:

Rpta. 84 Km

Problema 2 : Un explorador parte de su campamento recorriendo 20 Km en dirección N 78° E. Luego se dirige al S 42° E y recorre la misma distancia. En este punto decide regresar a su campamento. ¿Qué dirección debe tomar?

Resolución:

Rpta. N 72° O

Problema 3 : Un barco parte de su terminal con rumbo N α° E, luego de recorrer una cierta distancia cambia de rumbo y se dirige hacia el Este. Luego de haber navegado 100 Km. En esta dirección vuelve a cambiar su rumbo y se dirige hacia el Sur después de navegar 80 Km, se detiene y observa que se encuentra exactamente al Este de su punto de partida y a una distancia de 160 Km. ¿Hallar aproximadamente el valor de " α "?

Resolución:

Rpta. $\alpha = 37^\circ$

Problema 4 : Un móvil parte de un punto en la dirección S 60° O y recorre una distancia de 40 Km. Luego cambia de dirección y toma el rumbo 60° al Oeste del Norte para recorrer 20 Km. Determinar el desplazamiento total que efectuó el móvil.

Resolución:

Rpta. $20\sqrt{7}$ m



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁNGULOS HORIZONTALES

NIVEL 1

Problema 1 Nataly se encuentra a 80 metros de su casa en la dirección SE (Sur-Este) y Vanessa se encuentra a 60 metros de su casa en la dirección NE (Nor-Este). Hallar la distancia entre Nataly y Vanessa

A) 40 m B) 50 m C) 100 m D) 120 m E) 90 m

Problema 2 Si desde un punto se observan dos personas A y B en los rumbos S 33 O y S 57 E respectivamente. ¿Cuál debe ser la distancia entre las dos personas, si desde B se vuelve a observar a "A" a 20° al sur del Oeste y la distancia del punto de observación inicial a la persona "A" es 64 metros

A) 48 m B) 80 m C) 90 m D) 56 m E) 72 m

Problema 3 Un móvil se desplaza 300 Km según la dirección D a N. Con respecto a un punto inicial "A" Hallar cuántos km se ha desplazado hacia el Oeste. Sabiendo que la cotg $\frac{7}{24}$

A) 288 Km B) 144 Km C) 84 Km
D) 100 Km E) 200 Km

Problema 4 Un móvil se desplaza 7 Km hacia el oeste con respecto a un punto inicial. Luego se desplaza $5\sqrt{2}$ Km hacia el Noroeste

con respecto a su nueva ubicación. Hallar su desplazamiento total.

A) 11 Km B) $(5 + \sqrt{2})$ Km C) 7 Km
D) 13 Km E) 10 Km

Problema 5 Si desde P se observan los puntos Q, R y T en las direcciones E - NE N - NO y S - SO respectivamente, cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) y cual es falsa (F)

a) () P se encuentra al N - NE de T
b) () P se encuentra al S - SO de R
c) () P se encuentra al O - SO de Q

A) VVV B) FFF C) VVF D) VFF E) FVV

Problema 6 Un barco navega en la dirección S 30 E y otro barco lo hace en la dirección N 30 E en un instante dado el segundo barco se encuentra al Norte del primero y a 60 Km. Calcular la separación del primero con respecto del punto A si ambos partieron simultáneamente de A

A) $10\sqrt{3}$ Km B) 20 Km C) $20\sqrt{3}$ Km
D) 10 Km E) Faltan Datos

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. C
4. D	5. D	6. C

10.2 ÁNGULOS VERTICALES

DEFINICIÓN: Se llama así a todos aquellos que se denominan en un plano vertical. El instrumento para medir estos ángulos se llama **TEODOLITO**.

Clases.

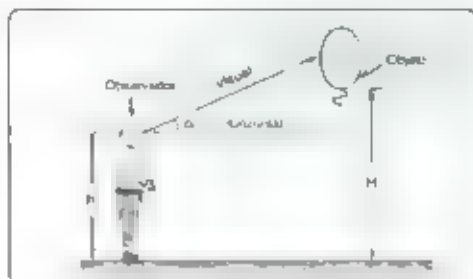
Hay 2 clases de ángulos verticales

- Ángulos de Elevación
- Ángulos de Depresión

10.2.1 ÁNGULO DE ELEVACIÓN.

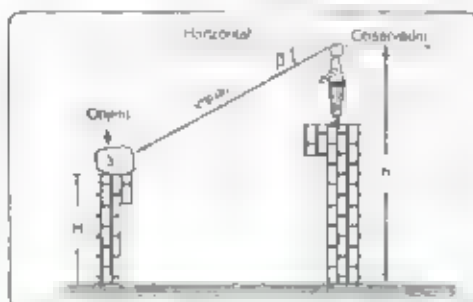
Es aquel, cuya medición se realiza entre la línea visual y la línea horizontal; pero cuando el objeto se encuentra por encima del horizontal

$\alpha^\circ = \text{ángulo de elevación}$

**10.2.2 ÁNGULO DE DEPRESIÓN**

Es aquel, cuya medición se realiza entre la línea visual y la línea horizontal; pero cuando el objeto se encuentra por debajo del horizontal.

$\beta^\circ = \text{ángulo de depresión}$



Observación: Para desarrollar problemas, con estos ángulos (Elevation y Depresion), debemos recurrir a los criterios de semejanza, ya sea de los triángulos rectángulos y resolverlos. La diferencia aquí, es que sus enunciados son más amplios.

- A continuación desarrollaremos algunos problemas, que servirán de ayuda en la comprensión de este tema



**PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE
ÁNGULOS VERTICALES**



Problema 1 El ángulo de elevación de la parte superior de una torre es de 30° acercándose 100 m. Se encuentra que el ángulo de elevación es de 60° . ¿Cuál es la altura de la torre?

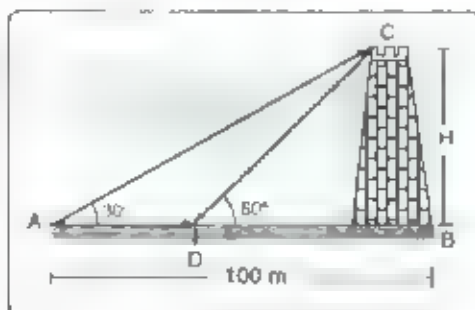
- A) 50 m B) 100 m C) $50\sqrt{3}$ D) $100\sqrt{3}$ m E) 200 m

Resolución.

• En el $\triangle CBD$

$$\operatorname{cog} 60^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BD}}{H} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{BD}}{H}$$

$$\overline{BD} = \frac{H}{\sqrt{3}} = \frac{H\sqrt{3}}{3}$$



En el $\triangle ABC$ $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{H}{\left(100 + \frac{H\sqrt{3}}{3}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{H}{\left(100 + \frac{H\sqrt{3}}{3}\right)}$

Donde. $100 + \frac{H\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}H \Rightarrow 300 + H\sqrt{3} = 3\sqrt{3}H$

$$300 = 2\sqrt{3}H \Rightarrow 150 = \sqrt{3}H \Rightarrow H = \frac{150}{\sqrt{3}}$$

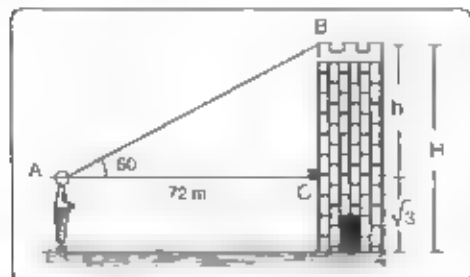
Racionalizando, esta expresión obtenemos

$$H = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times 3} = \frac{150\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{H = 50\sqrt{3}} \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 2 El ángulo de elevación de la cúspide de una torre es de 60° a 72 m de ella, estando el ojo del observador a $\sqrt{3}$ m sobre el suelo. La altura de la torre es aproximadamente

- A) 72 m B) $73\sqrt{3}$ C) 71 m D) 73 m E) $72\sqrt{3}$ m

Resolución



De la figura: $H = h + \sqrt{3}$ (I)

En el $\triangle ABC$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{h}{72}$$

$$\sqrt{3} \frac{h}{72} \Rightarrow h = 72\sqrt{3} \quad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$H = 72\sqrt{3} + \sqrt{3} \Rightarrow H = 73\sqrt{3} \text{ m} \quad \text{Rpta. B}$$

Problema 3 Una asta de bandera está clavada verticalmente en lo alto de un edificio a 6 metros de distancia de la base del edificio, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio de 60° y 30° respectivamente. ¿Hácese la longitud del asta?

- A) $2\sqrt{3}$ m B) $4\sqrt{3}$ m C) $6\sqrt{3}$ m D) $8\sqrt{3}$ m E) $3\sqrt{3}$ m

Resolución.

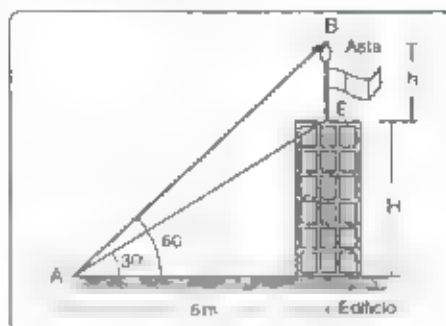
Sea: h = Longitud del asta de la bandera

H = Altura del edificio

- En el $\triangle ACB$: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{h+H}{6}$

$$\sqrt{3} = \frac{h+H}{6}$$

$$h+H = 6\sqrt{3}$$



- En el $\triangle ACE$: $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{EC}{AC} = \frac{H}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{6} \Rightarrow H = 2\sqrt{3}$

Reemplazamos (II) en (I)

$$h + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \therefore h = 4\sqrt{3} \quad \text{Rpta. B}$$

Problema 4 Hallar la distancia que vuela un avión si es observado desde un punto en el suelo inicialmente con 30° y luego con 45° de ángulo de elevación, suponga que vuela horizontalmente a una altura de 2 km

- A) $2(\sqrt{3}+1)$ km B) $2(\sqrt{3}-1)$ km C) $2\sqrt{3}$ km D) 2 Km E) Hay 2 respuestas

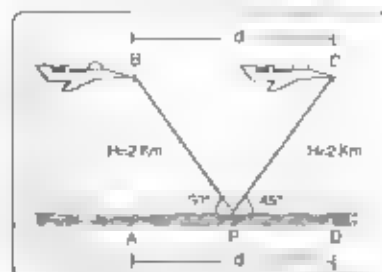
Resolución

Para este tipo de problemas se presentan 2 formas de resolver depende del gráfico que se construya

Primera Forma

- En el $\triangle CDP$: $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{CD}{PD} = \frac{2 \text{ km}}{PD}$

$$1 = \frac{2}{PD} \quad PD = 2 \text{ Km}$$

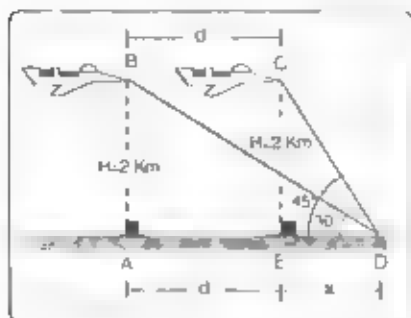


En el $\triangle BAP$ $\cotg 30^\circ = \frac{AP}{2 \text{ Km}} \Rightarrow \dots \therefore AP = 2\sqrt{3} \text{ Km}$

De la figura: $AD = AP + PD$ reemplazando valores obtenemos

$d = 2\sqrt{3} \text{ Km} + 2 \text{ Km} \Rightarrow \underline{d = 2(\sqrt{3} + 1) \text{ Km}} \text{ Rpta.}$

Segunda Forma:



En el $\triangle CED$ $\tg 45^\circ = \frac{CE}{ED} = \frac{2 \text{ Km}}{x}$
 $1 = \frac{2 \text{ Km}}{x} \Rightarrow x = 2 \text{ Km}$

- En el $\triangle BAD$ $\tg 30^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{2 \text{ Km}}{d + x}$
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \text{ Km}}{d + 2 \text{ Km}}$

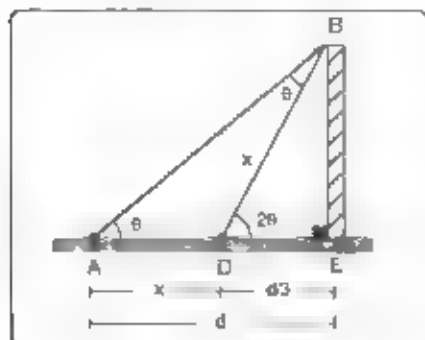
Donde $d + 2 \text{ Km} = 2\sqrt{3} \text{ Km} \Rightarrow d = 2\sqrt{3} \text{ Km} - 2 \text{ Km}$

$\underline{d = 2(\sqrt{3} - 1) \text{ Km}} \text{ Rpta. E}$

Problema 5 Una persona observa un poste con un ángulo de elevación $^\circ\theta$, cuando la distancia que los separa se ha reducido a la tercera parte, el ángulo de elevación se ha duplicado. ¿Cuál es el valor del ángulo $^\circ\theta$?

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 37°

Resolución:



- En el $\triangle ABD$: Por ángulo exterior

$\angle BAD + \angle ABD = 2\theta$

$\theta + \angle ABD = 2\theta$

$\angle ABD = \theta$

Como se observará el $\triangle ABD$ resulta ser isósceles, siendo: $AD = DB = x$

De la figura $x + \frac{d}{3} = d \Rightarrow x = \frac{2}{3}d$

En el $\triangle BCD$ $\cos 20^\circ = \frac{DC}{BD} = \frac{\frac{d}{3}}{\frac{2}{3}d} = \frac{1}{2}$

$$\cos 20^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{Pero } \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 20^\circ = \cos 60^\circ \Rightarrow 20^\circ = 60^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ \quad \text{Rpta. B}$$

Problema 6 Desde un punto del suelo se observa el techo del noveno piso de un edificio con ángulo de elevación de 37° y a parte superior del mismo con un ángulo de elevación de 53° . ¿Cuántos pisos tiene el edificio?

A) 12

B) 14

C) 16

D) 18

E) 20

Resolución.

Sea: a = altura de cada piso del edificio r = número de pisos del edificio

En el $\triangle ABC$: $\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{9a}{x}$

$$\frac{3}{4} = \frac{9a}{x}$$

$$3x = 36a \Rightarrow x = 12a \quad (I)$$

En el $\triangle ABD$: $\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{DB}{AB} = \frac{na}{x}$

$$\frac{4}{3} = \frac{na}{x} \quad (II)$$

Reemplazamos (I) en (II)

$$\frac{4}{3} = \frac{na}{12a} \Rightarrow 48 = 3n \Rightarrow 48 = r \Rightarrow n = 16 \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 7 Desde la parte más alta de un edificio de 30 m de altura se observa con ángulos de depresión de 30° y 60° la parte superior e inferior de otro edificio. Calcular la altura de dicho edificio?

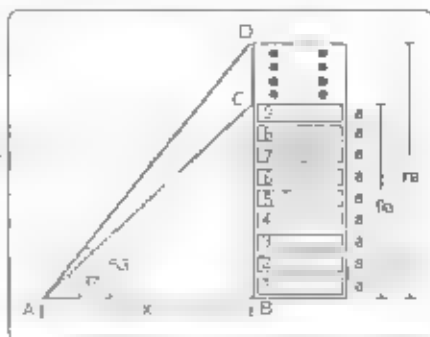
A) 20 m

B) 10 m

C) 15 m

D) 50 m

E) 40 m

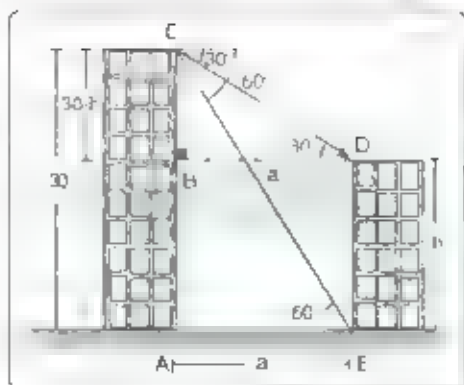


Resolución.

- Hacemos que $AE = a$

De la figura $AE \parallel BD$ (por ser paralelos)

$$\begin{aligned} \text{En el } \triangle CAE \quad \text{tg } 60^\circ &= \frac{CA}{AE} = \frac{30}{a} \\ \Rightarrow \frac{30}{a} &= \sqrt{3} \\ a &= \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ m} \quad (I) \end{aligned}$$



$$\text{- En el } \triangle CBD: \quad \text{tg } 30^\circ = \frac{CB}{BD} = \frac{30 - h}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{30 - h}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (II)$$

Reemplazamos (I) en (II).

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30 - h}{\left(\frac{30}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30 - h}{30} \Rightarrow 30 - h = 30 \Rightarrow h = 20 \text{ m}$$

$$\frac{30}{\sqrt{3} \times 3} = 30 - h \Rightarrow \frac{30}{3} = 30 - h \Rightarrow 10 = 30 - h \Rightarrow h = 20 \text{ m} \quad \text{Rpta. A}$$

Problema 9 Una niña observa la cabeza de su padre con un ángulo de elevación 53° y los pies con un ángulo de depresión 30° si las cabezas de ambos están distanciados 10 metros. ¿Hallar en metros la estatura del padre?

A) $(6 + \sqrt{3}) \text{ m}$

B) $4(2 + \sqrt{3}) \text{ m}$

C) $2(4 + \sqrt{3}) \text{ m}$

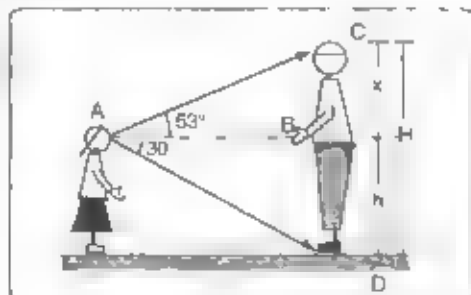
D) $2(2 + \sqrt{3}) \text{ m}$

E) $(4\sqrt{3} - 2) \text{ m}$

Resolución.

- En el $\triangle ABC$

$$\begin{aligned} \text{sen } 53^\circ &= \frac{BC}{AC} = \frac{x}{10 \text{ m}} \\ \Rightarrow \frac{4}{5} &= \frac{x}{10 \text{ m}} \Rightarrow x = 8 \text{ m} \end{aligned}$$



También

$$\cos 53^\circ = \frac{\overline{AB}}{10 \text{ m}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{\overline{AB}}{10 \text{ m}} \Rightarrow \overline{AB} = 6 \text{ m}$$

En el $\triangle ABD$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{h}{6 \text{ m}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{6 \text{ m}}$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{3}} \text{ m} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

De la figura, $H = x + h$ (I)

Reemplazando valores en (I), obtenemos

$$H = 8 \text{ m} + 2\sqrt{3} \text{ m} \Rightarrow \underline{H = 2(4 + \sqrt{3}) \text{ m}} \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 9 Un farolero situado a 1 800 m sobre el nivel del mar observa un barco con un ángulo de depresión " α ". 6 minutos más tarde en la misma dirección al barco ahora observa con un ángulo de depresión " θ ". Calcular la velocidad del barco en Km/h sabiendo que $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} - 1$ y $\operatorname{ctg} \theta = \sqrt{3} + 1$

- A) 9 Km/h B) 36 Km/h C) 24 Km/h D) 12 Km/h E) 180 Km/h

Resolución.

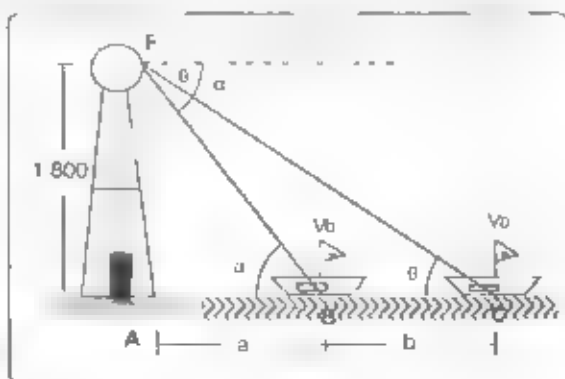
Altura del faro = 1 800 m

Incógnita = V_b = velocidad del barcoEn el $\triangle FAB$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \frac{a}{1800}$$

$$(\sqrt{3} - 1) = \frac{a}{1800}$$

$$a = 1800(\sqrt{3} - 1) \quad (I)$$



$$\text{En el } \triangle FAC \quad \operatorname{ctg} \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{FA}} = \frac{(a+b)}{1800} \Rightarrow a+b = 1800(\sqrt{3}+1) \quad (II)$$

Reemplazando (I) en (II),

$$1\,800(\sqrt{3}-1)\text{ m} + b = 1\,800(\sqrt{3}+1)\text{ m}$$

$$1\,800\cancel{\sqrt{3}\text{ m}} - 1\,800\text{ m} + b = 1\,800\cancel{\sqrt{3}\text{ m}} + 1\,800\text{ m} \Rightarrow b = 3\,600\text{ m} \quad (\text{II})$$

Luego sabemos que el espacio que recorre el barco de "B" a "C" es "b" metros y lo hace en 6 minutos

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} = \frac{b\text{ m}}{6\text{ min}} \quad (\text{IV})$$

Reemplazando (II) en (IV)

$$V_b = \frac{3\,600\text{ m}}{6\text{ min}} = 600\text{ m/min}$$

$$V_b = \frac{600\text{ m}}{\text{min}} \times \frac{1\text{ Km}}{1\,000\text{ m}} \times \frac{60\text{ min}}{1\text{ h}} = 36\text{ Km/h}$$

Convertimos los:

m/min a Km/h

$$V_b = 36\text{ Km/h}$$

Rpta. B



TALLER DE PROBLEMAS Nº 30

Problema 1 Una persona observa la parte alta de una torre, con un ángulo de 37° . Luego se acerca 25 m y ahora la observa con un ángulo de 74° . Hallar la distancia que le falta para llegar a la base de la torre.

Resolución.

Rpta 7 m

Problema 2 Una persona se encuentra exactamente entre dos edificios de altura H y h ($H > h$) y observa la parte más alta de éstos con ángulos de elevación α y β respectivamente. Determinar la distancia que existe entre los edificios.

Resolución.

Rpta $H \cot \alpha + h \cot \beta$

Problema 3 Jaimir curiosamente desde la parte superior del octavo piso de un edificio observa a Juanita que se encuentra a 21 metros del edificio con un ángulo de depresión de 53° . luego se pregunta cuánto mide la altura de cada piso, si todos son iguales.

Resolución.

Rpta 3,5 m

Problema 4 Desde un punto se observa a parte más alta de un muro con un ángulo de elevación " θ ", si en la misma dirección nos acercamos al muro una distancia igual a su altura, el nuevo ángulo de elevación es el complemento del anterior. Hallar el valor de $M = \lg \theta + \lg \theta$.

Resolución

Rpta $1 - \sqrt{5}$



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE
ANGULOS VERTICALES

NIVEL I

Problema ¿Cuanto mide la sombra proyectada por una torre de 30 metros de altura, si el ángulo de elevación es de 30° ?

- A) $15\sqrt{3}$ m B) 60 m C) $30\sqrt{3}$ m
D) $20\sqrt{3}$ m E) 15 m

Problema A 120 metros del pie de un edificio su ángulo de elevación es de 60° . ¿Cuál es la altura del edificio?

- A) $40\sqrt{3}$ m B) $60\sqrt{3}$ m C) $80\sqrt{3}$ m
D) $120\sqrt{3}$ m E) 180 m

Problema Un avión pasa sobre una ciudad de 4 Km de altura, 3 minutos después el ángulo de elevación del avión es de 53° . ¿Cuál es la velocidad del avión en Km/h?

- A) 1 Km/h B) 3 Km/h C) 6 Km/h
D) 60 Km/h E) 12 Km/h

Problema Un árbol quebrado por el viento, forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Cuál era la altura del árbol, si la parte que ha caído hacia el suelo forma con éste un ángulo de 37° y la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 30 metros?

- A) 10 m B) 60 m C) 80 m D) 50 m E) 90 m

Problema A 20 metros de un poste, se ve el foco de la parte superior con un ángulo de elevación que tiene como tangente 0,5. ¿Cuánto habrá que acercarse al poste en la misma dirección, para ver el foco con un ángulo de elevación complemento del anterior

- A) 5 m B) 10 m C) 15 m
D) 20 m E) 12,5 m

Problema Una antena de televisión se encuentra situado en lo alto de un edificio de 18 metros de altura. Si un hombre ve con un ángulo de elevación de 53° a la antena y con un ángulo de 45° el edificio. Hallar la altura de la antena.

- A) 6 m B) 8 m C) 10 m D) 12 m E) 16 m

Problema El ángulo de elevación de un edificio es de $22^\circ 30'$ nos acercamos a una distancia "m" y el nuevo ángulo de elevación es de 45° . Hallar "m" si la altura del edificio es de 10 metros.

- A) 10 m B) 20 m C) $10\sqrt{2}$ m
D) $10\sqrt{3}$ m E) $20\sqrt{2}$ m

Problema La distancia entre dos edificios es de 60 metros. Desde la azotea de menor de los edificios, cuya altura es de 40 metros se observa la azotea del otro con un ángulo de elevación de 60° . ¿Cuál es la altura del edificio mas alto?

- A) $30(2 + \sqrt{3})$ m B) $20(2 + 3\sqrt{3})$ m
C) $20(3 + 2\sqrt{3})$ m D) $10(6 + 3\sqrt{3})$ m
E) $30(\sqrt{3} + 1)$ m

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. D	4. C
5. C	6. A	7. C	8. B

NIVEL II

Problema Desde un punto se observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación $^{\circ}\alpha$ y desde el punto medio de la distancia que separa el pie de la torre el ángulo de elevación es el complemento de $^{\circ}\alpha$. Hallar la tangente del segundo ángulo?

- A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) $\sqrt{3}/3$
 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}/2$

Problema Una rama colocada a la orilla de un río, ve un árbol plantado sobre la rivera opuesta bajo un ángulo de 60° se aleja 40 m y este ángulo no mide más de 30° . ¿Cuál es la altura del árbol?

- A) 43.6 m B) 30.6 m C) 34.6 m
 D) 36.4 m E) 38.4 m

Problema Un avión que esté por aterrizar observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje de extensión igual al doble de la altura a que se encuentra. Si ve el extremo más alejado con ángulo de depresión de $22^{\circ}30'$. Calcule el ángulo de depresión con que observa al otro extremo.

- A) 45° B) 60° C) 54° D) $67^{\circ}30'$ E) 75°

Problema Una persona de altura x metros desea calcular la longitud de un árbol para ello se coloca a una distancia y metros de dicho árbol y observa su parte más alta con un ángulo de elevación α . Calcular en términos de los datos la longitud del árbol.

- A) $x + y \operatorname{tg} \alpha$ B) $x + y \cotg \alpha$ C) $x \operatorname{tg} \alpha + y$
 D) $x \cotg \alpha + y$ E) $(x + y) \operatorname{tg} \alpha$

Problema Una persona que se desliza por un camino que forma 30° con la horizontal,

observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación de 45° . Luego de subir $2\sqrt{3}$ m hacia la torre el nuevo ángulo de elevación mide 60° . Hallar la altura de la torre.

- A) 1 m B) $2\sqrt{3}$ m C) $\sqrt{3}$ m
 D) $3\sqrt{3}$ m E) 2 m

Problema Una persona observa al norte de ella y con un ángulo de elevación de 45° la cima de una montaña. Otra persona situada 30 metros al sur de la primera observa la cima de la misma montaña con un ángulo de elevación de 30° . Determinar usted la altura de la montaña.

- A) $15\sqrt{3}$ m B) $30\sqrt{3}$ m
 C) $30(\sqrt{3}+1)$ m D) $15(\sqrt{3}+1)$ m
 E) $30(\sqrt{3}-1)$ m

Problema Una persona se encuentra entre 2 edificios "A" y "B" cuando está a "x" metros de "B" observa la parte más alta de este con un ángulo de elevación de 40° y la del otro con un ángulo de 30° . Pero cuando se encuentra a "x" metros de "A" observa la parte más alta de este con un ángulo de elevación de 70° . ¿Con qué ángulo de elevación observa a parte más alta de "B"?

- A) 5° B) 10° C) 20° D) 30° E) 40°

Clave de Respuestas

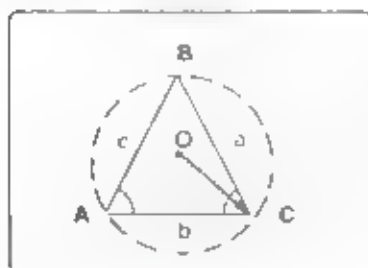
1 D	2 C	3 D	4 A
5 E	6 D	7 B	

10.3 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

La resolución de un triángulo de este tipo exige conocer tres de sus elementos (puede ser dos lados y un ángulo, tres lados, un lado y dos ángulos). Siguiendo las mismas normas que en los triángulos rectángulos estableceremos primero unas fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo de los cuales se deducen en cada caso las fórmulas necesarias para resolver el triángulo.

10.3.1 LEY DE SENOS (LEY DE BRIGGS)

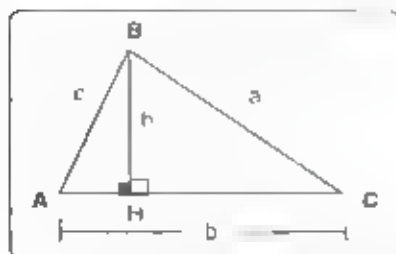
"En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo"



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

Donde $a = 2r \sin A$
 $b = 2r \sin B$
 $c = 2r \sin C$

Demostración.



Sea ABC un triángulo rectángulo cualquiera trazamos su altura BH.

En el $\triangle AHB$: $\sin A = \frac{BH}{c}$
 $BH = c \sin A \quad (1)$

- En el $\triangle BHC$: $\sin C = \frac{BH}{a}$
 $BH = a \sin C \quad (2)$

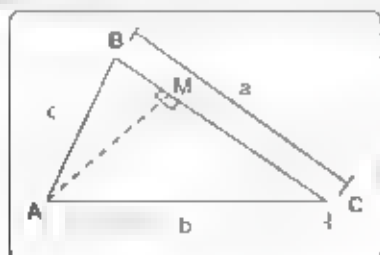
Igualemos las expresiones (2) y (1).

$$a \sin C = c \sin A$$

Donde: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad (1)$

Análogamente trazando la altura desde el vértice "A", se obtiene:

En el $\triangle AMB$: $\sin B = \frac{AM}{c} \Rightarrow AM = c \sin B \quad (3)$



En el $\triangle AMC$ $\text{sen } C = \frac{AM}{b}$

$$AM = b \text{ sen } C \quad \dots (4)$$

Igualemos las expresiones (3) y (4)

$$b \text{ sen } C = c \text{ sen } B$$

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad (II)$$

De las expresiones (I) y (II), obtenemos

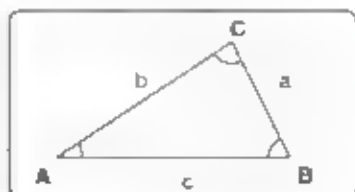
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \text{L. q. q. d.}$$

10.3.2 LEY DE LOS COSENOS (LEY DE CARNOT)

"En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman"

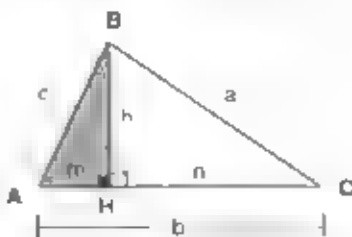
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

\Rightarrow

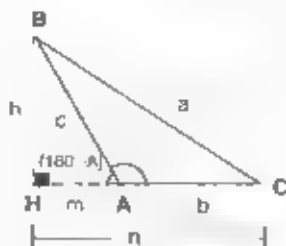


Demostración.

Consideramos un triángulo acutángulo (Figura 1) y otro obtusángulo (Figura 2). Construyamos sus alturas BH.



(Figura 1)



(Figura 2)

Si el ángulo "A" es agudo, sabemos por geometría plana que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (1)

y si el ángulo "A" es obtuso $a^2 = b^2 + c^2 + 2bcm$ (2)

De la figura (1) En el $\triangle AHB$ $\cos A = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cos A$ (3)

De la figura (2) En el $\triangle BHA$, $\cos BHA = \frac{m}{c} \Rightarrow \cos (180^\circ - A) = \frac{m}{c}$
 $= -\cos A = \frac{m}{c} \Rightarrow m = -c \cos A$ (4)

Reemplazamos (3) en (1), resultando: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (5)

y reemplazamos (4) en (2), resultando:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cos A) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (6)$$

Como se observará (5) y (6) son idénticos, llegando a la conclusión de que cualquiera sea el ángulo "A" (agudo u obtuso) la ley de cosenos se cumple

10.3.3 LEY DE LAS TANGENTES

En todo triángulo la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados es proporcional a la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.

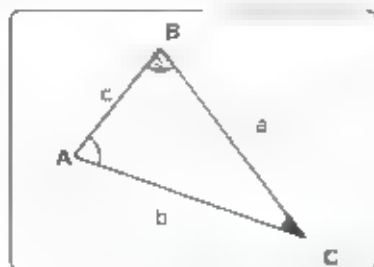
Por ley de senos, se tiene que

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}}$$

Recordar que:

Dada la proporción Por propiedad

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \quad \frac{n+m}{n-m} = \frac{p+q}{p-q}$$



Luego

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B}}{\sin \hat{A} - \sin \hat{B}}$$

Transformamos a producto al numerador y denominador de la fracción del segundo miembro, obteniendo

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \sin \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right) \cos \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right) \sin \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right) \quad \text{Pero} \quad \operatorname{ctg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right) \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)} \right] \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}$$

$$\text{También.} \quad \left[\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \right)} \right] \quad \left[\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2} \right)} \right]$$

Para su mejor comprensión resolveremos algunos ejemplos, veamos

Ejemplo 1 Dado un triángulo ABC, reducir la siguiente expresión: $E = \left(\frac{a+c}{a-c} \right) \times \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \right)$

Expresar la respuesta en función de $\operatorname{ctg} \frac{\hat{B}}{2}$

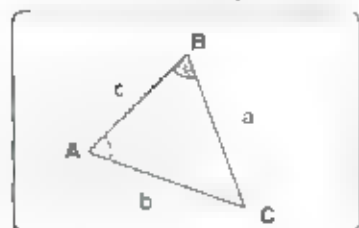
Resolución:

Sabemos que:

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \right)} \quad (I)$$

Reemplazamos el valor de expresión (I) en la expresión "E"

$$E = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \right)} \times \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right) \quad (II)$$



Del ABC sabemos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Donde $\hat{A} + \hat{C} = (180^\circ - \hat{B})$

Dividimos entre 2 a los dos miembros

$$\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \right)$$

Tomamos la función "lg" a ambos miembros

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right) &= \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \right) \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right) &= \operatorname{colog} \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) \quad (I) \end{aligned}$$

Por Co-razón

$$\operatorname{tg} (90^\circ - x) = \operatorname{colog} x$$

Reemplazamos a expresión (I) en (II), obtenemos $E = \operatorname{colog} \frac{B}{2}$ Rpta.

Ejemplo 2 Dado un triángulo ABC reducir la siguiente expresión

$$Q = \left(\frac{b - c}{b + c} \right) \times \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \quad \text{Si } \hat{B} + \hat{C} = 2\hat{A}$$

A) cosec A B) cos A C) sec A D) 2 sec A E) sec² A

Resolución:

Por la ley de las tangentes

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right)} \quad (I)$$

Reemplazamos la expresión (I), en la expresión "Q"

$$Q = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right)} \times \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right), \text{ Por dato } \hat{B} + \hat{C} = 2\hat{A}$$

Luego,

$$Q = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{2\hat{A}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right)} \times \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \hat{A}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right)} \times \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \quad (I)$$

Del Δ ABC $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$

Dividimos entre 2 a los dos miembros $\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \right)$

Tomamos la función "tg" a ambos miembros.

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \right)$$

Por Co-razón

$$\operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \right) = \operatorname{cog} \left(\frac{\hat{A}}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right) = \operatorname{cog} \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I):

$$Q = \frac{\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{cog} \left(\frac{\hat{A}}{2} \right)} \times \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right)$$

$$Q = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2}} \right)}{\left(\frac{\operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}} \right)} \times \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2} \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} \operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2}}$$

$$Q = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{2} \operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2} \right)} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2} \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}$$

$$Q = \frac{2}{\operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2}} \times \frac{1}{\operatorname{cos} \frac{\hat{A}}{2}} = Q = 2 \operatorname{sec} \frac{\hat{A}}{2} \quad \text{Rpta. D}$$



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS



Problema 1 En la figura mostrada, hallar "x".

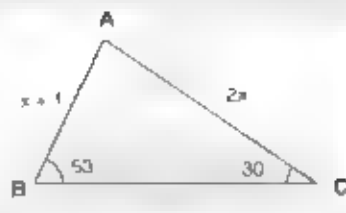
Resolución.

Por ley de senos $\frac{2x}{\sin 53} = \frac{x+1}{\sin 30}$

Pero: $\sin 53^\circ = \frac{4}{5}$ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

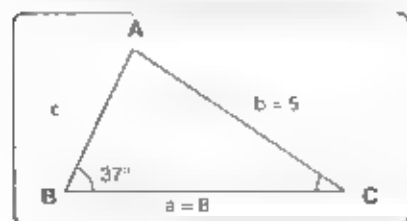
Luego $\frac{2x}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{x+1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \frac{10}{4} x = 2(x+1)$

$10x = 8x + 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$



Problema 2 : En un triángulo ABC se tiene $a = 8$ $b = 5$ y $\hat{B} = 37^\circ$ Hallar " $\operatorname{tg} A$ "

Resolución.



Por la ley de senos $\frac{5}{\sin 37^\circ} = \frac{8}{\sin A}$

Donde

$\sin A = \frac{8}{5} \sin 37^\circ$

$\sin A = \frac{8}{5} \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{24}{25}$

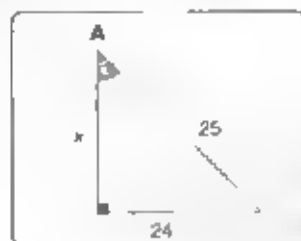
El valor de " $\sin A$ ", hallado lo llevamos a un triángulo, veamos

Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 25^2 - 24^2$

$x^2 = 625 - 576 = 49 \Rightarrow x = \pm \sqrt{49}$

$x = \pm 7$ (Sólo tomamos el valor positivo)



Luego: $\operatorname{tg} A = \frac{24}{x} = \frac{24}{7}$

Rpta.

Problema 3 : En el triángulo ABC $\frac{\sin A + \sin B}{a + b} = \frac{\sin C}{c}$ Es igual a.

Resolución:

Por ley de senos.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$

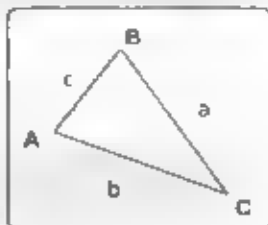
Donde: $a = 2r \operatorname{sen} A$
 $b = 2r \operatorname{sen} B$
 $c = 2r \operatorname{sen} C$

Reemplazando los valores hallados en la expresión inicial

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{a + b} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)}{2r \operatorname{sen} A + 2r \operatorname{sen} B} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{2r \operatorname{sen} C}$$

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{a + b} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)}{2r (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)} \cdot \frac{1}{2r}$$

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{a + b} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{2r} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{a + b} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{c} = 0 \quad \text{Rpta}$$



Problema 4 En un triángulo sus lados son 8, $\sqrt{73}$ y 9; hallar el coseno del ángulo opuesto a $\sqrt{73}$

Resolución.

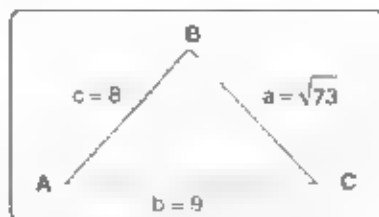
Aplicamos ley de cosenos, obtenemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Luego $(\sqrt{73})^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \times 9 \times 8 \times \cos A$

$$73 = 81 + 64 - 144 \cos A \Rightarrow 144 \cos A = 72$$

$$\cos A = \frac{72}{144} = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore \cos A = \frac{1}{2}$$



Problema 5 Reducir la siguiente expresión $K = \frac{2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C}{a^2 + b^2 + c^2}$

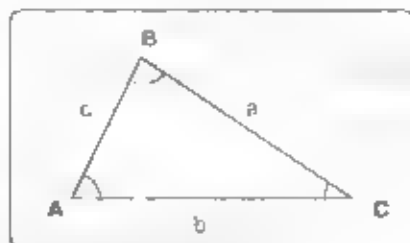
Resolución.

Por ley de cosenos

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $2bc \cos A = (b^2 + c^2 - a^2)$

ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
 $2ac \cos B = (a^2 + c^2 - b^2)$

iii) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C$
 $2ba \cos C = (b^2 + a^2 - c^2)$

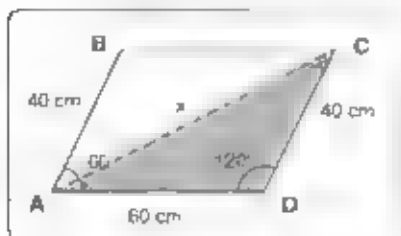


Juego reemplazamos los valores hallados en "K"

$$K = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (b^2 + a^2 - c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow K = 1$$

Problema 6 Dos lados y el ángulo comprendido de un paralelogramo miden 40 cm 60 cm y 60° respectivamente. Hallar la longitud de su diagonal mayor.

Resolución.



Por propiedad: $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$

$$60^\circ + \hat{D} = 180^\circ$$

$$\hat{D} = 120^\circ$$

Nota: Recuerda que a mayor lado se opone mayor ángulo y a menor lado se opone menor ángulo

En el $\triangle ADC$ Por ley de cosenos

$$x^2 = (60)^2 + (40)^2 - 2(60)(40) \cos 120^\circ$$

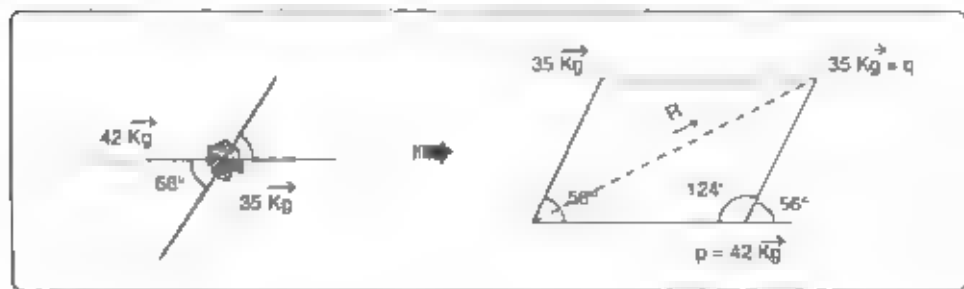
$$x^2 = 3\,600 + 1\,600 - 2(2\,400)(-\cos 60^\circ)$$

$$x^2 = 5\,200 + 2(2\,400)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 7\,600$$

$$x = \sqrt{7\,600} \Rightarrow x = \sqrt{400 \times 19} \Rightarrow x = 20\sqrt{19} \Rightarrow x = 87,17 \text{ cm}$$

Problema 7 Dos fuerzas de 35 Kg y de 42 Kg actúan sobre un cuerpo, si sus direcciones forman un ángulo de 56° Hallar su resultante y el ángulo que forma con la fuerza mayor.

Resolución.



En el triángulo achurado, aplicamos ley de cosenos

$$R^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos 124^\circ$$

$$R^2 = (42)^2 + (35)^2 - 2 (42) (35) \times (\cos (180^\circ - 56^\circ))$$

$$R^2 = (42)^2 + (35)^2 - 2 (42) (35) \times (\cos (-56^\circ))$$

$$R^2 = 1\,764 + 1\,225 + 2\,940 \times (0.5591)$$

$$R^2 = 4\,633.0271 \Rightarrow R = \sqrt{4\,633.0271} \Rightarrow \underline{R = 68.0663 \text{ Kg}}$$

Luego, calculamos el ángulo que forma la resultante (R) con la fuerza mayor o sea "b"

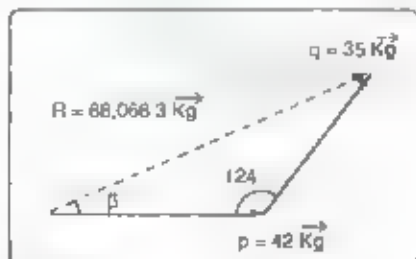
Por ley de senos

$$\frac{68.0663 \text{ Kg}}{\sin 124^\circ} = \frac{35 \text{ Kg}}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{35 (\sin 124^\circ)}{68.0663}$$

$$\sin \beta = \frac{35 (0.8290375)}{68.0663}$$

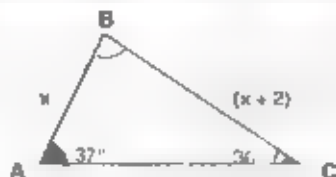
$$\sin \beta = 0.4262948 \Rightarrow \underline{\beta = 25^\circ 13'} \text{ Rpta.}$$





TALLER DE PROBLEMAS Nº 31

Problema 1 De la figura mostrada Hallar "x".



Resolución:

Rpta. $x = 10$

Problema 2 : En un triángulo ABC, se tiene que: $a = 24$, $b = 12$ y $A = 30^\circ$. Hallar " $\operatorname{tg} B$ ".

Resolución:

Rpta. $0,2581$

Problema 3 En un triángulo ABC, se tiene que: $b = 8$, $c = 4$ y $B = 53^\circ$. Hallar " $\cos C$ ".

Resolución:

Rpta. $0,9165$

Problema 4 , En un triángulo ABC, se tiene que: $a = 12$, $c = 20$ y $C = 120^\circ$. Hallar " $\sec A$ ".

Resolución:

Rpta. $1,1704$



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

NIVEL I

Ejercicio 1 Si los lados de un triángulo ABC, son $a = 7$, $b = 5$ y $c = 6$. Reducir

$$E = \frac{\sin A + \sin C}{\sin C - \sin B}$$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

Ejercicio 2 En un triángulo se tiene por lados 5, 7 y 9. Hallar el coseno del menor ángulo

A) 0,79 B) 0,83 C) 0,89 D) 0,78 E) N.A.

Ejercicio 3 En un Δ ABC, simplifica

$$M = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

A) r B) $3r$ C) $4r$ D) $2r$ E) N.A.

Ejercicio 4 En un triángulo sus lados son 25, 39 y 40. Hallar el ángulo opuesto a 39

A) 96° B) 69° C) 72° D) 68° E) 46°

Ejercicio 5 Hallar el equivalente de

$$M = (a \cos B + b \cos A) (c \cos A + a \cos C)$$

A) bc B) ca C) ab D) b^2 E) c^2

Ejercicio 6 Dos lados y la diagonal mayor

de un paralelogramo miden 12 m, 8 m y 7 m. Hallar la longitud de su diagonal menor

A) 16 m B) 11 m C) 15 m D) 14 m E) 9 m

Ejercicio 7 Dos fuerzas de 23 Kg y 36 Kg actúan sobre un cuerpo, si sus direcciones forman un ángulo de 62° . Hallar su resultante y el ángulo que forma con la fuerza menor

A) 51,041 Kg y 39° B) 51,410 Kg y $38,5^\circ$
C) 53,041 Kg y $35,8^\circ$ D) 51,041 Kg y $38,5^\circ$
E) N.A.

Ejercicio 8 Sobre un objeto actúan dos fuerzas de 215 Kg y 115 Kg, que tiene por resultante 275 Kg. Hallar el ángulo que forma la resultante y la fuerza mayor

A) 37° B) 30° C) 24° D) 23° E) 60°

Ejercicio 9 De la figura Hallar BD donde $AB = DC = 8$ m

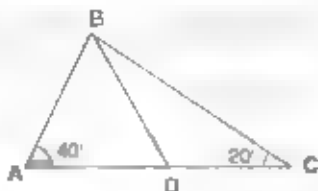
A) 10 m

B) 8 m

C) 5 m

D) 7 m

E) 12 m



Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. D	4. B	5. A
6. B	7. D	8. D	9. B	

NIVEL II

Problema 1 En un triángulo ABC, cuyos lados son a , b y c respectivamente, se cumple que la altura relativa al lado AB tiene la misma medida que este. Hallar "sen C"

A) $\frac{a^2}{bc}$

B) $\frac{c^2}{ab}$

C) $\frac{b^2}{ac}$

D) $\frac{a+c}{b+c}$

E) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c}$

Problema 1 En un triángulo ABC, se tiene que $b = 3a$ y que el ángulo $c = 60^\circ$. Hallar "cosec A"

- A) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{21}}{2}$ C) $3\sqrt{21}$
D) $2\sqrt{21}$ E) $\sqrt{21}$

Problema 2 En un triángulo ABC, simplificar

$$M = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B + \sin C} + \frac{c}{b+c}$$

- A) 2 B) 1 C) a/b D) b/c E) 3

Problema 3 Dado un ΔABC reducir la siguiente expresión:

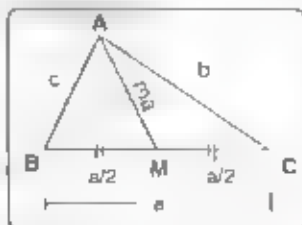
$$E = \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \times \sec^2 \frac{C}{2} \text{ si } \hat{A} + \hat{B} = 2\hat{C}$$

- A) $2 \operatorname{cosec}^2 C$ B) $2 \cos C \operatorname{cosec}^2 C$
C) $2 \cos^2 C \operatorname{cosec} C$ D) $2 \sin C \sec^2 C$
E) $\sin C \operatorname{cosec}^2 C$

Problema 4 En el ΔABC se cumple

$\cos A = \sqrt{bc \cos A} + 1$, Hallar el valor de lado "a"

- A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) 2
E) $3/2$



Problema 5 En la figura:

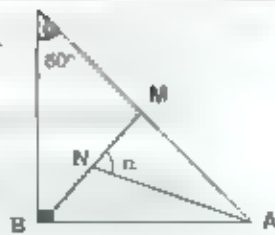
BM Mediana del ΔABC

AN Mediana del ΔABM

$\hat{C} = 60^\circ$

Hallar "cos α "

- A) $2/7$ B) $\frac{1}{\sqrt{7}}$
C) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
E) $\frac{2}{\sqrt{5}}$



Problema 6 Dado un triángulo ABC, reducir la siguiente expresión:

$$R = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{colog} \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right)$$

- A) $\lg \frac{\hat{A}}{2}$ B) $\operatorname{colog} \frac{\hat{A}}{2}$ C) $\sec \frac{\hat{A}}{2}$
D) $\sin \frac{\hat{A}}{2}$ E) $\cos \frac{\hat{A}}{2}$

Problema 7 En un ΔABC , simplificar

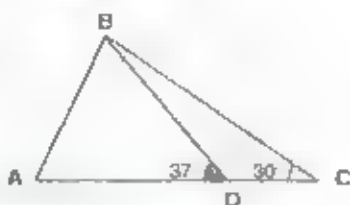
$$n = \frac{(a+b+c)(a+b+c)}{1 + \cos C}$$

- A) ab B) 2ab C) 2a D) 2b E) 2c

Problema 8 En la figura

Hallar la relación $\frac{BD}{BC}$

- A) 5/6
B) 6/5
C) 3/5
D) 4/5
E) 5/2



Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. B	4. B	5. D
6. A	7. A	8. B	9. A	

10.4 CALCULAR SEMIÁNGULOS EN FUNCIÓN DE LOS LADOS Y DEL SEMIPERÍMETRO DE UN TRIÁNGULO.

FÓRMULAS DE BRIGGS

Estas fórmulas relacionan las Funciones Trigonómicas de la mitad de los ángulos de un triángulo con los lados de dichos triángulos

10.4.1 Dado un $\triangle ABC$ Expresar $\cos \frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b y c) y el semiperímetro (p)

Resolución.

• En el $\triangle ABC$ Por la ley de cosenos se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Donde: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1$$



$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} = \frac{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2}{2bc}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} \quad (1)$$

Sabemos que $2p = a + b + c \quad (2)$

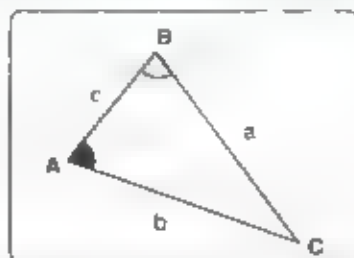
De donde $2p - a = b + c \quad (3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(2p)(2p-a)}{2bc}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(2p-a)}{bc} \Rightarrow 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad (\text{sólo se tomará el valor positivo})$$



Sumamos "1" a ambos miembros

Recordar que

Perímetro = P

Semiperímetro = p

Luego, Perímetro = $2p$

Σ de lados = $2p$

$a + b + c = 2p$

$$\text{Luego, } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

10.4.2 Dado un ΔABC . Expresar $\sin \frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b, c) y el semiperímetro (p)

Resolución:

En el ΔABC , Por la ley de Cosenos, se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Donde:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{multiplicamos por "1" a ambos miembros}$$

$$(-1) \cos A = (-1) \left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right]$$

$$-\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sumamos "1" a ambos miembros

$$1 - \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 \Rightarrow 1 - \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} \Rightarrow 1 - \cos A = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$1 - \cos A = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

Recuerda que:

$$1 - \cos A = 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \right)$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc} \quad (1)$$

Por lo tanto: $a + b + c = 2p \quad \dots(2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 2p - c \quad \dots(3) \\ a + c = 2p - b \quad \dots(4) \end{array} \right.$$

Reemplazando (3) y (4) en (1):

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(2p - c - c)(2p - b - b)}{2bc} = \frac{(2p - 2c)(2p - 2b)}{2bc}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - c)(p - b)}{bc} = \frac{2(p - c)(p - b)}{2bc}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - b)(p - c)}{bc}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \quad (\text{Sólo se tomará el valor positivo})$$

$$\text{Luego: } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}}$$

10.4.3 Dado un $\triangle ABC$. Expresar $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b, c) y el semiperímetro (p)

Resolución:

$$\text{Sabemos que } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \quad (1) \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} \quad (2)$$

Dividimos miembro a miembro (1) (2); obteniendo

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}{\frac{p(p - a)}{bc}}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$$

Por simple Deducción:

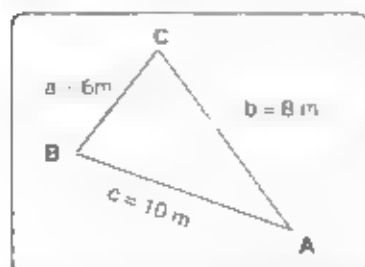
$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{p(p - b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{p(p - c)}}$$

Ejemplo 1 Dado un ΔABC , cuyos lados miden 6 y 8 y 10 metros respectivamente

Calcular $\sin \frac{A}{2}$ y $\cos \frac{C}{2}$

Resolución



En primer lugar calculamos el semiperímetro del ΔABC

$$\text{Semiperímetro } \Delta ABC = \frac{\text{Perímetro } \Delta ABC}{2}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{6 + 8 + 10}{2}$$

$$p = 12$$

En segundo lugar, aplicamos la fórmula

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Reemplazando valores se tiene

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(12-8)(12-10)}{8 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2}{8 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Luego, calculamos:

$$\cos \frac{C}{2}$$

Por fórmula

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

Reemplazando valores se tiene

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{12(12-10)}{6 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

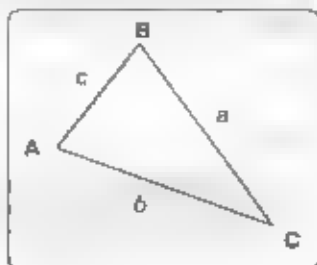
Ejemplo 2 Dado un ΔABC : Reducir la siguiente expresión. $M = a \cos^2 \frac{B}{2} + b \cos^2 \frac{A}{2}$

Resolución:

- Del ΔABC , se tiene que:

$$i) \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \Rightarrow \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{p(p-b)}{ac} \quad (1)$$

$$ii) \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \Rightarrow \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc} \quad (2)$$



Reemplazando (1) y (2) en "M"

$$M = a \left(\frac{p(p-b)}{ac} \right) + b \left(\frac{p(p-a)}{bc} \right)$$

$$M = \frac{p[(p-b) + (p-a)]}{c} = \frac{p(2p-a-b)}{c} \quad (3)$$

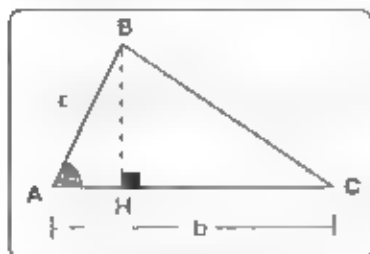
Pero: $2p = a + b + c \quad (4)$

Reemplazando (4) en (3)

$$M = \frac{p(a+b+c-a-b)}{c} = \frac{pc}{c} = p \Rightarrow M = p \quad \text{Rpta.}$$

10.5 FÓRMULAS DEL TRIÁNGULO

1. La superficie de todo triángulo es igual al semiproducto de dos de sus lados por el Seno del ángulo comprendido entre ellos.



Por Geometría: $S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

$$S = \frac{b \times \overline{BH}}{2} \quad (1)$$

- En el $\triangle AHB$ $\sin \hat{A} = \frac{\overline{BH}}{c}$

Donde: $\overline{BH} = c \sin \hat{A} \quad \dots (2)$

Reemplazando (2) en (1): $S = \frac{b \cdot c \sin \hat{A}}{2} \Rightarrow S = \frac{b \cdot c}{2} \sin \hat{A} \quad \text{(Fórmula)}$

II. Si: $S = \frac{b \cdot c}{2} \sin \hat{A} \quad (1)$

Por la ley de Senos

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

De donde $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a}{2R} \quad (2)$

Reemplazando (2) en (1) $S = \frac{bc}{2} \left(\frac{a}{2R} \right) \Rightarrow S = \frac{abc}{4R}$ (Fórmula)

III. Si: $S = \frac{b}{2} \frac{c}{2} \sin \hat{A} \quad (8)$

Por ángulo mitad. $\sin \frac{\hat{A}}{2} = 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2} \quad (9)$

Reemplazando (9) en (8): $S = \frac{bc}{2} \left(2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2} \right)$

$$S = bc \left(\sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2} \right) \quad (w)$$

- De las fórmulas de Briggs.

$$\sin \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \vee \quad \cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Reemplazando el valor de estas fórmulas en (v)

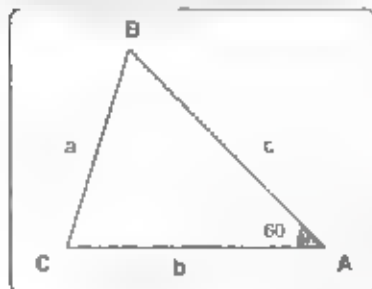
$$S = bc \left(\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \right)$$

$$S = bc \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)p(p-a)}{(bc)^2}} = bc \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{[Fórmula]}$$

Ejemplo 1 En un triángulo ABC, el ángulo \hat{A} mide 60° . Hallar su área si se tiene que $(b+c)^2 = a^2 + 4$

Resolución.



- Por ley de Cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (I)$$

De la condición: $(b+c)^2 = a^2 + 4$ obtenemos

$$b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 4 \quad (II)$$

Reemplazando (I) en (II): $b^2 + c^2 + 2bc = b^2 + c^2 - bc + 4$

$$3bc = 4 \Rightarrow \therefore bc = \frac{4}{3} \quad (III)$$

Luego, calculamos el área del triángulo ABC

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{AC \times AB}{2} \sin 60^\circ$$

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{b \times c}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = bc \times \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (IV)$$

Reemplazamos (III) en (IV): $\text{Área } \Delta ABC = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ u}^2 \quad \text{Rpta.}$$

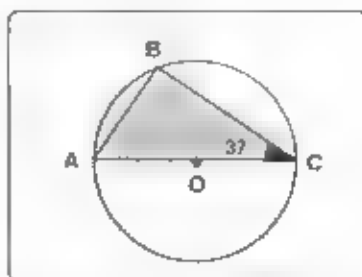
Ejemplo 2 En la figura mostrada. Hallar el valor del área del triángulo ABC

Se: $AB = 12$

Además "O" es el centro del círculo.

Resolución:

- Todo Δ inscrito en medio círculo es un triángulo rectángulo, en el ΔABC ($B = 90^\circ$)



Por ley de Senos $\frac{AB}{\sin 37^\circ} = \frac{AC}{\sin 90^\circ}$

Donde $\frac{12}{\sin 37^\circ} = \frac{AC}{1}$ Pero $\boxed{\sin 37^\circ = \frac{3}{5}}$

$$\frac{12}{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}} AC \Rightarrow AC = 20$$

En el $\triangle ABC$ $\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ}$

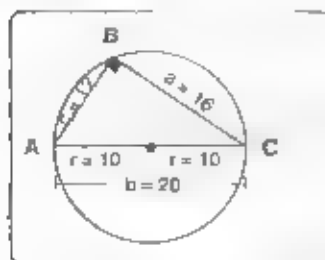
$$\hat{A} + 90^\circ + 37^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 127^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 53^\circ$$

Luego $\text{área } \triangle ABC = \frac{AC \times AB \sin \hat{A}}{2}$

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{20 \times 12 \sin 53^\circ}{2}, \text{ Pero } \sin 53^\circ = \frac{4}{5}$$

$$\text{área } \triangle ABC = 10 \times 12 \times \left(\frac{4}{5}\right) = 96 \text{ u}^2 \Rightarrow \text{área } \triangle ABC = 96 \text{ u}^2 \text{ Rpta.}$$

Otra Forma:



- Por el Teorema de Pitágoras

$$\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$$

$$BC^2 + (12)^2 = (20)^2$$

$$BC^2 = 400 - 144 = 256$$

$$BC = \sqrt{256} \Rightarrow \overline{BC} = 16$$

Luego, Aplicamos la Fórmula:

$$\boxed{S = \frac{abc}{4r}}$$

Reemplazando valores en esta fórmula, obtenemos

$$S = \frac{16 \times 20 \times 12}{4 \times 10} = \frac{16 \times 2 \times 12}{4} = 16 \times 2 \times 3 = 96 \text{ u}^2 \Rightarrow \therefore S = 96 \text{ u}^2 \text{ Rpta.}$$

Otra Forma:

Aplicando la fórmula. $\text{área } \triangle ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Pero $p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow p = \frac{16+20+12}{2} \Rightarrow p = 24$

Reemplazando valores en la fórmula, obtenemos

$$\text{área } \Delta ABC = \sqrt{24(24-16)(24-20)(24-12)}$$

$$\text{área } \Delta ABC = \sqrt{24(8)(4)(12)} = \sqrt{(12 \times 2) \times 8 \times 4 \times 12}$$

$$\text{área } \Delta ABC = \sqrt{(12)^2 \times (8)^2} = 12 \times 8 = 96 \text{ u}^2 \Rightarrow \text{área } \Delta ABC = 96 \text{ u}^2$$

Observación. Este problema se ha resuelto de estas 3 formas pues con la intención es de darnos cuenta cómo se aplican las fórmulas estudiadas.



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE FÓRMULAS DE TRIÁNGULOS

NIVEL 1

Problema 1: Dado un triángulo ABC, sus lados miden 7, 12 y 13 m respectivamente.

Calcular $\sin \frac{A}{2}$ y $\cos \frac{B}{2}$

- A) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ y $\frac{8\sqrt{91}}{91}$ B) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ y $\frac{4\sqrt{91}}{13}$
 C) $\frac{\sqrt{13}}{31}$ y $\frac{2\sqrt{91}}{31}$ D) $\frac{\sqrt{31}}{13}$ y $\frac{8\sqrt{91}}{19}$ E) N.A.

Problema 2: Dado un ΔABC : Reducir la siguiente expresión.

$$R = a + p \lg \frac{B}{2} \lg \frac{C}{2}$$

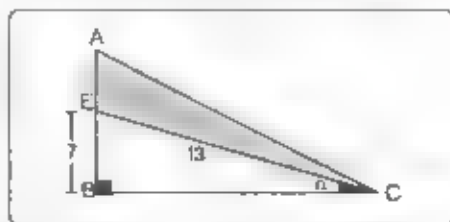
- A) $R = a$ B) $R = b$ C) $R = c$
 D) $R = p$ E) $R = 2p$

Problema 3: Dado un triángulo ABC. Reducir la siguiente expresión.

$$M = \left[bc \sin^2 \frac{A}{2} + ac \sin^2 \frac{B}{2} \right] \times \left(\frac{1}{p-c} \right)$$

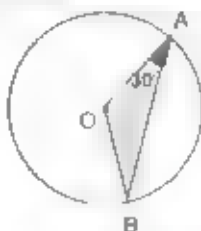
- A) $a-b$ B) $a+b$ C) $a-c$
 D) $a+c$ E) ab

Problema 4: En la figura mostrada, hallar el área del triángulo AEC, si: $AB = BC$



- A) $\frac{65}{3} \cos \alpha$ B) $\frac{65}{2} \sin \alpha$
 C) $\frac{65}{2} \cos \alpha$ D) $\frac{65}{4} \cos \alpha$
 E) $\frac{65}{2} \sec \alpha$

Problema 5: En la figura mostrada. Hallar el área del triángulo AOB, si: $AB = 60 \text{ m}$, "O" es el centro del círculo.



- A) $200\sqrt{3} \text{ m}^2$ B) $300\sqrt{3} \text{ m}^2$
 C) $100\sqrt{3} \text{ m}^2$ D) $600\sqrt{3} \text{ m}^2$
 E) 600 m^2

Clave de Respuestas

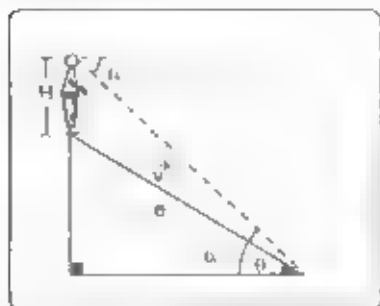
1 A | 2 D | 3 A | 4 C | 5 B

10.6 RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS

Resolver un triángulo es dar 3 elementos principales uno de ellos por lo menos es el lado.
 Hallar los demás elementos.

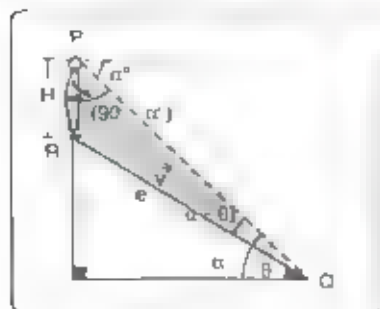
La ley de Senos, y la ley de Cosenos es lo mas usual para estos problemas.

Problema 1 Qué tiempo emplea en descender por el plano inclinado el observador de la figura mostrada



- A) $t = \frac{H \sin (90^\circ - \alpha) \cos (\alpha - \theta)}{V}$
 B) $t = \frac{H \cos (90^\circ - \alpha) \sec (\alpha - \theta)}{V}$
 C) $t = \frac{H}{V} \cos \alpha \operatorname{cosec} (\alpha - \theta)$
 D) $t = \frac{H}{V} \sin \alpha \operatorname{cosec} (\theta - \alpha)$
 E) $t = \frac{H}{V} \sin \alpha \sec (\alpha - \theta)$

Resolución.



Sabemos que $\text{Espacio} = \text{Velocidad} \times \text{Tiempo}$

De donde: $\text{Tiempo} = \frac{\text{Espacio}}{\text{Velocidad}}$

$$t = \frac{e}{V} \quad (1)$$

- En el ΔRPQ : Por la ley de Senos, se tiene:

$$\frac{H}{\sin (\alpha - \theta)} = \frac{e}{\sin (90^\circ - \alpha)}$$

$$b = \frac{H \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)} \Rightarrow \text{Por Co-Razón. } \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$b = \frac{H \cos \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)} \quad \dots (II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$t = \frac{\left(\frac{H \cos \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)} \right)}{V} = \frac{H \cos \alpha}{V \operatorname{sen}(\alpha - \theta)} = \frac{H}{V} \cos \alpha \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)}$$

$$t = \frac{H}{V} \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec}(\alpha - \theta) \quad \text{Rpta. C}$$

Problema 2 Desde el punto "A" de la base de una montaña se observa su Cima con un ángulo de 45° . Luego se avanza hacia la montaña 1 200 metros por una pendiente de 30° y se observa nuevamente la Cima con un ángulo de 75° . Calcular la altura de la montaña.

A) 1 400 m

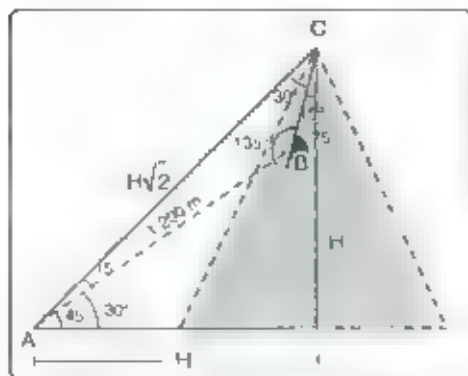
B) 1 200 m

C) 1 500 m

D) 1 000 m

E) 600 m

Resolución:



- En el ΔABC : Por ley de Senos:

$$\frac{H\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135^\circ} = \frac{1\,200}{\operatorname{sen} 30^\circ}$$

$$H\sqrt{2} = \frac{1\,200 \operatorname{sen} 135^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \quad (I)$$

Pero $\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 180^\circ - 135^\circ$

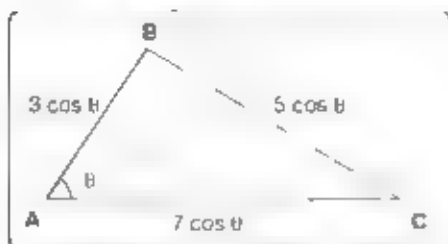
$$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ \quad (II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$H\sqrt{2} = \frac{1\,200 \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1\,200 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow H\sqrt{2} = 1\,200 \sqrt{2}$$

$$H = 1\,200 \text{ m} \quad \text{Rpta. B}$$

Problema 3 Hallar el perímetro del triángulo ABC.



- A) $105/4$ B) $165/14$ C) $115/14$
D) $125/14$ E) $185/14$

Resolución.

Por la "ley de Cosenos", se tiene que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

Donde

$$(5 \cos \theta)^2 = (3 \cos \theta)^2 + (7 \cos \theta)^2 - 2(3 \cos \theta)(7 \cos \theta) \cos \theta$$

$$25 \cos^2 \theta = 9 \cos^2 \theta + 49 \cos^2 \theta - 42 \cos^2 \theta \cos \theta \quad \text{Simplificamos "cos" } \theta$$

$$25 = 9 + 49 - 42 \cos \theta \Rightarrow 42 \cos \theta = 58 - 25 \Rightarrow 42 \cos \theta = 33$$

$$\cos \theta = \frac{33}{42} \Rightarrow \therefore \cos \theta = \frac{11}{14}$$

Luego: Perímetro del $\Delta ABC =$ Suma de sus tres lados

$$\text{Perímetro del } \Delta ABC = AB + BC + AC = 3 \cos \theta + 5 \cos \theta + 7 \cos \theta$$

$$\text{Perímetro del } \Delta ABC = 15 \cos \theta$$

$$\text{Perímetro del } \Delta ABC = 15 \times \frac{11}{14} = \frac{165}{14}$$

$$\text{Perímetro del } \Delta ABC = \frac{165}{14} \quad \text{Rpta. B}$$

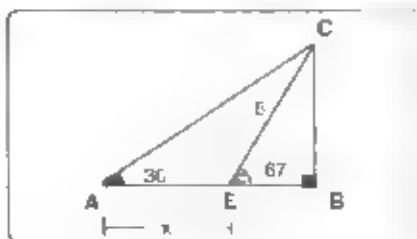


**PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS**



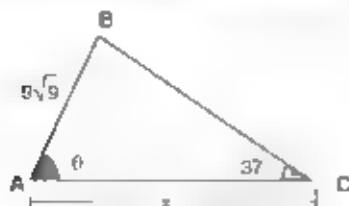
NIVEL I

Problema 1 En la figura, calcular " x " (Usar $\sin 37^\circ = 0,6$)



- A) 8 B) 7 C) 9 D) $\sqrt{5}$ E) $36/5$

Problema 1 Sabiendo que $\tan \theta = 2/5$ Halle el valor de x° en la figura mostrada:

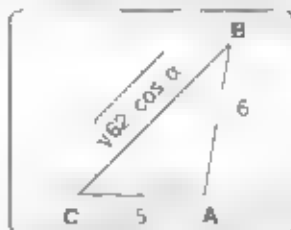


- A) 35 B) 53 C) 69 D) 96 E) 89

Problema 2 En un triángulo equilátero ABC se toman los puntos P y Q en BC de tal manera que $BP = PQ = QC$. Calcular $\cos \angle PAQ$ ($AB = 6$)

- A) $13/14$ B) $14/15$ C) $17/19$
D) $15/19$ E) N.A

Problema 3 En la figura mostrada Hallar $\sin \theta$



- A) $\frac{2\sqrt{93}}{13}$ B) $\frac{3\sqrt{39}}{31}$ C) $\frac{3\sqrt{93}}{13}$
D) $\frac{3\sqrt{93}}{31}$ E) $\frac{13\sqrt{93}}{3}$

Clave de Respuestas

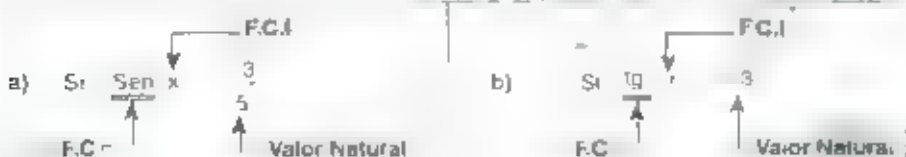
1. E | 2. C | 3. A | 4. D

Capítulo

11

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si vas a esas relaciones que se logran con los datos: Valor Natural y Función Circular



F.C.I. Función Circular Inversa

F.C. Función Circular

SIMBOLOGÍA. Existen 2 formas de abreviaturas matemáticas para una función circular inversa: Francesa e Inglesa

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \cos \theta &= \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \text{arc Cos } \frac{4}{5} = \text{arc Cos } 0.8 & \rightarrow \text{Representación Francesa} \\ \cos^{-1} \frac{4}{5} = \cos^{-1} 0.8 & \rightarrow \text{Representación Inglesa} \end{cases} \\
 \text{b) } \sec \beta &= \frac{3}{2} \Rightarrow \beta = \begin{cases} \text{arc Sec } \frac{3}{2} = \text{arc Sec } 1.5 & \rightarrow \text{Representación Francesa} \\ \sec^{-1} \frac{3}{2} = \sec^{-1} 1.5 & \rightarrow \text{Representación Inglesa} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Observación:

La expresión: $\theta = \cos^{-1} N$ significa la función inversa del Coseno y no

$\frac{1}{\cos N}$ o función inversa algebraica

$$\cos^{-1} \frac{4}{5} \neq \frac{1}{\cos \frac{4}{5}}$$

$$\cos^{-1} \frac{4}{5} \neq \sec \frac{4}{5} \text{ (No confundir)}$$

SUGERENCIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS CON FUNCIONES INVERSAS:

- I) Es conveniente aplicar este capítulo cuando el valor natural no es notable
- II) Los problemas los podemos resolver por 2 procedimientos:
 - a) Con fórmulas o identidades del presente capítulo.
 - b) Por cambio de variable: con este procedimiento un problema se identifica con algún capítulo tratado anteriormente.

Fórmula Importante: Sea $\text{Sen } \alpha = N$ por inversas se obtiene
 $\alpha = \text{arc Sen } N$ ó $\text{arc Sen } N = \alpha$

Tomamos "Sen" a ambos miembros: $\text{Sen}(\text{arc Sen } N) = \text{Sen } \alpha$

Generalizando: $\frac{\text{F.T.}}{N}(\text{arc F.T. } N) = \text{Sen } \alpha$



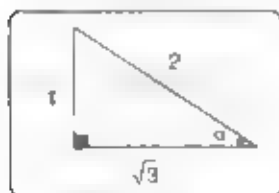
**EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS**



Ejercicio 1 Calcular los valores de a) $\text{Cotg} \left(\text{arc Sen} \left(\frac{1}{2} \right) \right)$

Resolución:

Hacemos que $\text{arc Sen} \left(\frac{1}{2} \right) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{Sen } \alpha$ (Graficamos en un Δ)



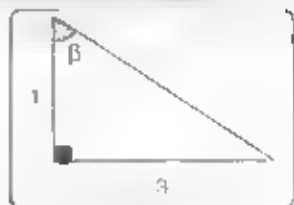
$$\text{Donde: } \text{Cotg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{Cotg} \left(\text{arc Sen} \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \sqrt{3} \quad \text{Rpta.}$$

b) $\text{tg} \left(\text{arc Cotg} \left(\frac{1}{3} \right) \right)$

Resolución:

Hacemos que $\text{arc Cotg} \left(\frac{1}{3} \right) = \beta \Rightarrow \frac{1}{3} = \text{Cotg } \beta$ (Graficamos en un Δ)



Donde

$$\tan \beta = \frac{3}{1}$$

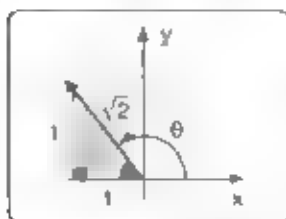
$$\tan \left(\arctan \left(\frac{1}{3} \right) \right) = 3 \quad \text{Rpta.}$$

c) $\sin \left(\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$

Resolución

Hacemos que $\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \theta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \theta \quad (\theta \in \text{al } Q_2 \text{ ó } Q_1)$

Graficamos el valor de "Cos θ" en el Q_1



$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

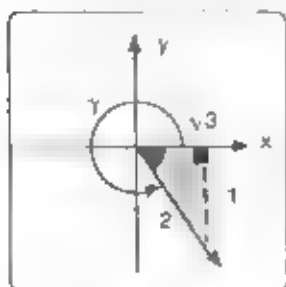
$$\sin \left(\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{Rpta.}$$

d) $\operatorname{Cosec} \left(\arctan \left(-\sqrt{3} \right) \right)$

Resolución

Hacemos que $\arctan \left(-\sqrt{3} \right) = \gamma \Rightarrow -\sqrt{3} = \tan \gamma \quad (\gamma \in \text{al } Q_2 \text{ ó } Q_4)$

Graficamos el valor de "Tan γ" en el Q_4



$$\tan \gamma = -\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{-1}$$

$$\operatorname{Cosec} \gamma = \frac{2}{-1} = -2$$

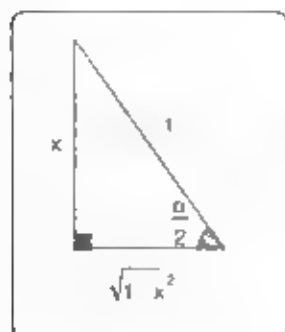
$$\operatorname{Cosec} \left(\arctan \left(-\sqrt{3} \right) \right) = -2 \quad \text{Rpta.}$$

- A) $2x \sqrt{1-x^2}$ B) $2x \sqrt{x^2-1}$ C) $x \sqrt{1+x^2}$ D) $(1-x^2) \sqrt{2x}$ E) $(x^2-1) \sqrt{2x}$

Resolución

En la expresión: $\text{Sen}(2 \arcsin x) = \text{Sen } \alpha$

Hacemos que $\frac{\alpha}{2 \arcsin x} = \alpha \Rightarrow \arcsin x = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \dots, x = \text{Sen } \frac{\alpha}{2}$ (Graficamos en un \triangle)



$$\text{Sen } \frac{\alpha}{2} = x = \frac{x}{1}$$

$$\text{Cos } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-x^2}$$

Luego: $\text{Sen } \alpha = 2 \text{ Sen } \frac{\alpha}{2} \text{ Cos } \frac{\alpha}{2}$

$$\text{Sen } \alpha = 2x \sqrt{1-x^2}$$

$\text{Sen}(2 \arcsin x) = 2x \sqrt{1-x^2}$ Rpta. A

Ejemplo 3. Calcular: $R = \text{Cos} \left[3 \arcsin \left(\frac{2}{3} \right) \right]$

- A) $\pm \frac{7\sqrt{5}}{27}$ B) $\frac{-7\sqrt{5}}{27}$ C) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ D) $\pm \frac{5\sqrt{5}}{27}$ E) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$

Resolución

Hacemos que $\arcsin \left(\frac{2}{3} \right) = \alpha \Rightarrow \frac{2}{3} = \text{Sen } \alpha$

Luego la expresión dada, se transforma en

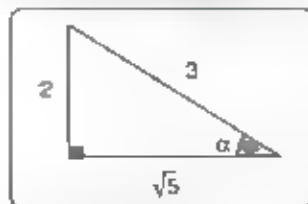
$$R = \text{Cos} \left[\underbrace{3 \arcsin \left(\frac{2}{3} \right)}_{\alpha} \right] = \text{Cos} [3\alpha]$$

$$R = 4 \text{ Cos}^3 \alpha - 3 \text{ Cos } \alpha \quad (I)$$

El valor de "Sen α " lo graficamos en un \triangle

$$\text{Sen } \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (II)$$



Reemplazamos (II) en (I)

$$R = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$R = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{20}{27} \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{7\sqrt{5}}{27} \quad \text{Rpta. B}$$

Ejemplo 4 Hallar "x" si: $\arctg x = \arccos \left(\frac{3}{4}\right)$

A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

B) $\sqrt{7}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{3}{5}$

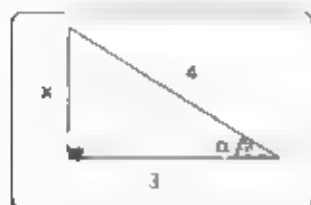
E) $\frac{5}{3}$

Resolución

De la expresión: $\arctg x = \arccos \left(\frac{3}{4}\right)$ hacemos que cada miembro sea igual a " α "

Luego $\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \arctg x = \alpha \Rightarrow x = \operatorname{tg} \alpha \\ \text{ii) } \arccos \left(\frac{3}{4}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{3}{4} = \cos \alpha \end{array} \right.$

Grificando el valor de " $\cos \alpha$ " en un \triangle obtenemos



$\cos \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \begin{array}{l} 3 \rightarrow \text{Cateto Adyacente} \\ 4 \rightarrow \text{Hipotenusa} \end{array}$

Por el Teorema de Pitágoras

$$4^2 = 3^2 + x^2$$

$x = \sqrt{7} \quad \text{Rpta. B}$

Ejemplo 5 Calcular $E = \operatorname{Sen} \left\{ \arccos \left[5 \operatorname{Cosec} \left(\arccos \frac{2}{3} \right) \right] \right\}$

A) $\frac{2\sqrt{46}}{13}$

B) $\frac{3\sqrt{46}}{46}$

C) $\frac{\sqrt{23}}{23}$

D) $\frac{\sqrt{46}}{46}$

E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

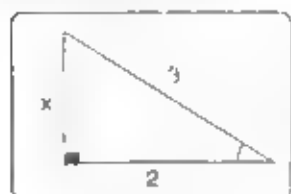
Resolución:

De la expresión dada, es recomendable empezar a trabajar de lo último hacia adelante, veamos:

$$E = \operatorname{Sen} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{Cotg} \left[5 \operatorname{Cosec} \left(\operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{2}{3} \right) \right] \right\}$$

 α

hacemos que $\operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{2}{3} = \alpha \Rightarrow \frac{2}{3} = \operatorname{Cos} \alpha$ (Lo graficamos en un Δ)



Por el Teorema de Pitágoras $x^2 = 3^2 - 2^2$

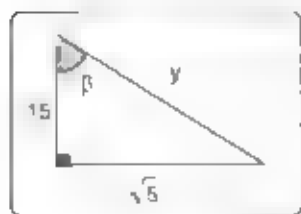
$$x = \sqrt{5}$$

Donde: $\operatorname{Cosec} \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$

Reemplazamos el valor de "Cosec α " en la expresión "E"

$$E = \operatorname{Sen} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{Cotg} \left[5 \times \frac{3}{\sqrt{5}} \right] \right\} \Rightarrow E = \operatorname{Sen} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{Cotg} \frac{15}{\sqrt{5}} \right\} \quad (I)$$

Hacemos que $\operatorname{arc} \operatorname{Cotg} \frac{15}{\sqrt{5}} = \beta \Rightarrow \frac{15}{\sqrt{5}} = \operatorname{Cotg} \beta$ (Lo graficamos en un Δ)



Por el Teorema de Pitágoras $y^2 = 15^2 + (\sqrt{5})^2$

$$y^2 = 230 \Rightarrow y = \sqrt{230}$$

Donde $\operatorname{Sen} \beta = \frac{\sqrt{5}}{y} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{230}}$, racionalizando obtenemos

$$\operatorname{Sen} \beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{230}} \times \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{230}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times 46}{230} = \frac{5\sqrt{46}}{230} \Rightarrow \operatorname{Sen} \beta = \frac{\sqrt{46}}{46} \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$E = \operatorname{Sen} \beta \Rightarrow E = \frac{\sqrt{46}}{46} \quad \text{Rpta. D}$$

Ejercicio 6 El valor de $E = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{Cotg} x$ es

- A) 0° B) 45° C) 90° D) 180° E) 360°

Resolución:

De la expresión $E = \underbrace{\arctg x}_{\alpha} + \underbrace{\operatorname{arccotg} x}_{\beta}$, hacemos $E = \alpha + \beta$ (I)

Luego i) $\arctg x = \alpha \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{tg} \alpha}$ ii) $\operatorname{arccotg} x = \beta \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{cotg} \beta}$

De las expresiones (i) y (ii), obtenemos que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$ (II)

Reemplazamos (II) en (I) $\Rightarrow \boxed{E = 90^\circ}$ Rpta. C

Ejercicio 7 ¿A qué es igual? $K = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[2 \operatorname{Sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right]$

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 120°

Resolución.

Empezamos a trabajar de lo último hacia adelante, veamos.

$$K = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[2 \operatorname{Sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right] \quad (I)$$

$$i) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \alpha \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Reemplazamos el valor de "α" en (I)

$$K = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[2 \operatorname{Sen} (2 \times 30^\circ) \right] = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$K = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{3}) \quad (II)$$

$$ii) \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{3}) = \beta \Rightarrow \boxed{\sqrt{3} = \operatorname{tg} \beta} \Rightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

Reemplazamos el valor de "β" en (II) $K = 2 (60^\circ) \Rightarrow \boxed{K = 120^\circ}$ Rpta. E

Ejercicio 8 Calcular $F = \operatorname{Sen} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{12}$

A) $1/2$ B) $\sqrt{2}/2$ C) $\sqrt{3}/2$

D) 0

E) 1

Resolución:

Hacemos los siguientes cambios de variables, veamos:

$$E = \text{Sen} \left(\underbrace{2 \arctg \frac{1}{5}}_{\alpha} \underbrace{\arctg \frac{5}{12}}_{\beta} \right) \quad (I)$$

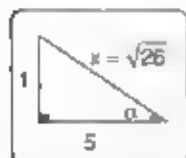
Donde: I) $\arctg \frac{1}{5} = \alpha \rightarrow \frac{1}{5} = \text{tg } \alpha$ II) $\arctg \frac{5}{12} = \beta \rightarrow \frac{5}{12} = \text{tg } \beta$

Reemplazamos valores hallados en (I)

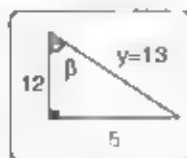
$$E = \text{Sen} (2\alpha - \beta)$$

$$E = \text{Sen } 2\alpha \text{ Cos } \beta - \text{Cos } 2\alpha \text{ Sen } \beta$$

$$E = (2 \text{ Sen } \alpha \text{ Cos } \alpha) \text{ Cos } \beta - (1 - 2 \text{ Sen}^2 \alpha) \text{ Sen } \beta \quad (II)$$

Los valores de $\text{tg } \alpha = \frac{1}{5}$ y $\text{tg } \beta = \frac{5}{12}$, los graficamos en un \triangle 

$$\begin{aligned} \text{Sen } \alpha &= \frac{1}{\sqrt{26}} \\ \text{Cos } \alpha &= \frac{5}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Sen } \beta &= \frac{5}{13} \\ \text{Cos } \beta &= \frac{12}{13} \end{aligned}$$

Reemplazamos valores en (II), obtenemos

$$E = \left(2 \times \frac{1}{\sqrt{26}} \times \frac{5}{\sqrt{26}} \right) \times \frac{12}{13} - \left(1 - 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{26}} \right)^2 \right) \times \frac{5}{13}$$

$$E = \frac{10 \times 12}{26 \times 13} - \left(1 - \frac{2}{26} \right) \times \frac{5}{13}$$

$$E = \frac{60}{169} - \frac{60}{169} = 0 \Rightarrow E = 0 \quad \text{Rpta. D}$$

Ejercicio 9 Calcular $K = \text{Sen} \left\{ \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{3}{4} \right) \right\}$

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

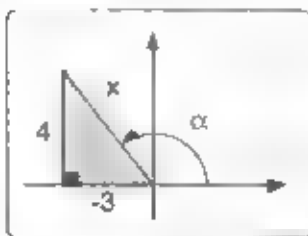
Resolución.

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$K = \text{Sen} \left\{ \frac{1}{2} \underbrace{\text{arc Cotg} \left(\frac{3}{4} \right)}_{=\alpha} \right\} \Rightarrow K = \text{Sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (*)$$

De la expresión $\text{arc Cotg} \left(\frac{3}{4} \right) = \alpha$, $\frac{3}{4} = \text{Cotg } \alpha$ ($\alpha \in \text{al } Q_2 \text{ ó } Q_4$)

• Ubicamos " α " en el Q_2 .



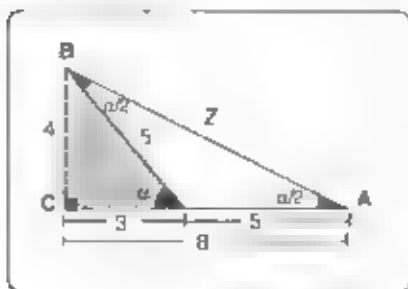
Calculamos " x " por el Teorema de Pitágoras

$$x^2 = 4^2 + (-3)^2$$

$$x = 5$$

Siendo, $\boxed{\text{Sen } \alpha = \frac{4}{5}}$

El valor de " $\text{Sen } \alpha$ " lo graficamos en el siguiente triángulo.



Por el Teorema de Pitágoras

$$Z^2 = 4^2 + 8^2$$

$$Z^2 = 80 \Rightarrow$$

$$\boxed{Z = 4\sqrt{5}}$$

Siendo $\text{Sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\boxed{K = \frac{\sqrt{5}}{5}} \quad \text{Rpta. A}$$

Ejercicio 10. Calcular $E = \text{tg} \left[\frac{1}{2} \text{arc Sen} \left[\frac{1}{2} \text{Cos} \left(\text{arc tg } \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \right]$

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

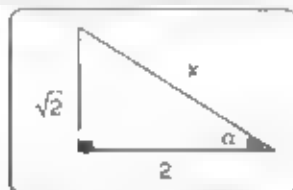
C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

Resolución.

Llamamos a " $\text{arc tg } \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha$ " $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{tg } \alpha$ (Graficamos en un Δ)



Por el Teorema de Pitágoras

$$x^2 = \sqrt{2}^2 + 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\text{Siendo: } \cos \alpha = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad (I)$$

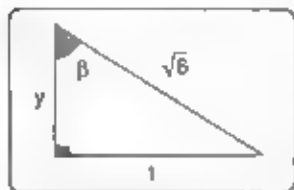
Reemplazamos (I) en la expresión "E"

$$E = \lg \left\{ 2 \arcsen \left[\frac{1}{2} \cos \left(\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \right\}$$

$$E = \lg \left\{ 2 \arcsen \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right] \right\} = \lg \left\{ 2 \arcsen \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\} \quad (II)$$

β

Hacemos que $\arcsen \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \beta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} = \text{Sen } \beta$ (Graficamos en un Δ)



Por el Teorema de Pitágoras.

$$y^2 = \sqrt{6}^2 - 1^2 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

$$\text{Siendo: } \lg \beta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \lg \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (III)$$

De la expresión (II) obtenemos

$$E = \lg (2\beta) = \frac{2 \lg \beta}{1 - \lg^2 \beta} \quad (IV)$$

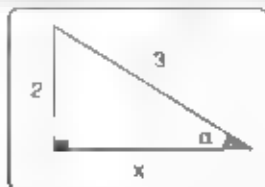
$$\text{Reemplazamos (III) en (IV)} \quad E = \frac{2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{Apta. D}$$

Ejercicio 11. Calcular $R = \cos \left[3 \arcsen \left(\frac{2}{3} \right) \right]$

- A) $\pm \frac{7\sqrt{5}}{27}$ B) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ C) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ D) $+\frac{5\sqrt{5}}{27}$ E) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$

Resolución.

Hacemos que $\arcsen \left(\frac{2}{3} \right) = \alpha \Rightarrow \frac{2}{3} = \text{Sen } \alpha$ (Graficamos en un Δ)



Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 - 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$\text{Siendo } \cos \alpha = \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (I)$$

De la expresión $R = \cos \left[3 \underbrace{\arcsin \left(\frac{2}{3} \right)}_{\alpha} \right]$

$R = \cos 3\alpha$ por fórmula de arco triple, obtenemos

$$R = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (II)$$

Reemplazamos (I) en (II)

$$R = 4 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)$$

$$R = \frac{\sqrt{5}}{3} \left[4 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 - 3 \right] = \frac{\sqrt{5}}{3} \left[\frac{20}{9} - 3 \right] \Rightarrow R = -\frac{7\sqrt{5}}{27} \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 12 Calcular $R = \operatorname{Cotg} \left[\frac{1}{2} \arcsin \left[\cos \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{7}{30}} \right) \right] \right]$

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10

Resolución:

Hacemos que $\arcsin \sqrt{\frac{7}{30}} = \alpha \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{30}} = \sin \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{30}} = \sin \alpha$ (Graficamos en un \triangle)



Por el Teorema de Pitágoras

$$x^2 = \sqrt{30}^2 - \sqrt{7}^2 \Rightarrow x = \sqrt{23}$$

$$\text{Siendo } \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{30}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{30}} \quad (II)$$

De la expresión "E" obtenemos

$$R = \operatorname{Cotg} \left[\frac{1}{2} \arcsin \left[\cos \left(2 \underbrace{\arcsin \left(\sqrt{\frac{7}{30}} \right)}_{\alpha} \right) \right] \right]$$

$$R = \operatorname{Cotg} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\cos 2\alpha}{1} \right) \right\}$$

$$R = \operatorname{Cotg} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(2 \cos^2 \alpha - 1 \right) \right\} \quad (\text{II})$$

Reemplazamos (II) en (I)

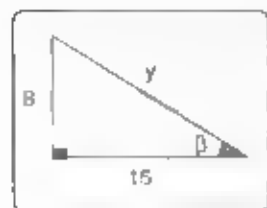
$$R = \operatorname{Cotg} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(2 \times \left(\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{30}} \right)^2 - 1 \right) \right\}$$

$$R = \operatorname{Cotg} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{8}{15} \right) \right\} \quad (\text{IV})$$

β

Hacemos que $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{8}{15} \right) = \beta \Rightarrow \frac{8}{15} = \operatorname{tg} \beta$ (Graficamos en un Δ)

Por el Teorema de Pitágoras $y^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow y = 17$



Siendo $\cos \beta = \frac{15}{y} \Rightarrow \cos \beta = \frac{15}{17}$ (V)

De la expresión (IV), obtenemos

$$R = \operatorname{Cotg} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{8}{15} \right) \right\} = \operatorname{Cotg} \left\{ \frac{1}{2} \beta \right\}$$

$$R = \operatorname{Cotg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}} \quad (\text{VI})$$

Reemplazamos (V) en (VI).

$$R = \sqrt{\frac{1 + \frac{15}{17}}{1 - \frac{15}{17}}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4 \Rightarrow R = 4 \quad \text{Rpta. B}$$

Ejercicio 13 Si: $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$ Calcular "tg x"

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) $-\sqrt{3}/3$

Resolución.

Hacemos que

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 = \alpha & \rightarrow & 3 = \operatorname{tg} \alpha \\ \text{ii)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 = \beta & \rightarrow & 2 = \operatorname{tg} \beta \\ \text{iii)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \theta & \rightarrow & 1 = \operatorname{tg} \theta \end{array}$$

De la expresión $x = \arctg 3 + \arctg 2 + \arctg 1$ obtenemos $x = \alpha + \beta + \theta$

Donde $x - \alpha = \beta + \theta$ tomamos "tg" a ambos miembros $\operatorname{tg}(x - \alpha) = \operatorname{tg}(\beta + \theta)$

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta} \quad \text{reemplazamos valores, obtenemos}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - 3}{1 + 3 \operatorname{tg} x} = \frac{2 + 1}{1 - 2 \cdot 1}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - 3}{1 + 3 \operatorname{tg} x} = \frac{3}{-1} \Rightarrow 3 \cdot \operatorname{tg} x = 3 + 9 \operatorname{tg} x$$

$$0 = 10 \operatorname{tg} x \Rightarrow \therefore \boxed{\operatorname{tg} x = 0} \quad \text{Rpta. A}$$

Ejercicio 14. Sabiendo que $\alpha = \arccotg \left[2 \operatorname{Sen} \left(\arccos \frac{1}{2} \right) \right]$

$$\text{Calcular } V = \frac{\operatorname{Sen} 2\alpha}{2 \operatorname{Sen} \alpha} + \frac{2 \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Cos} 2\alpha}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

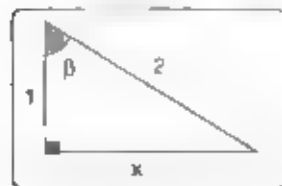
D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

E) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

$$\text{En la expresión } \alpha = \arccotg \left[2 \operatorname{Sen} \left(\underbrace{\arccos \frac{1}{2}}_{\beta} \right) \right] \quad (I)$$

$$\text{Hacemos: } \arccos \frac{1}{2} = \beta \Rightarrow \frac{1}{2} = \operatorname{Cos} \beta \quad (\text{Graficamos en un } \Delta)$$



Por el Teorema de Pitágoras

$$x^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow \therefore x = \sqrt{3}$$

$$\text{Siendo, } \operatorname{Sen} \beta = \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{Sen} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (II)$$

$$\text{Reemplazamos (II) en (I)} \quad \alpha = \arccotg \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$\alpha = \arccotg \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \operatorname{Cotg} \alpha$$

$$\operatorname{Cotg} 30^\circ = \operatorname{Cotg} \alpha \Rightarrow \therefore \boxed{\alpha = 30^\circ}$$

Reemplazamos el valor de "n" en la expresión "V"

$$V = \frac{\text{Sen } 60^\circ}{2 \text{ Sen } 30} + \frac{2 \text{ Cps } 30^\circ}{\text{Cos } 60^\circ}$$

$$V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \left(\frac{1}{2} \right)} + \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\left(\frac{1}{2} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \Rightarrow \underline{V = \frac{5\sqrt{3}}{2}} \quad \text{Rpta. E}$$

Ejercicio 15 Calcular $M = \text{arc tg } \frac{1}{3} + \text{arc tg } \frac{1}{5} + \text{arc tg } \frac{1}{7} + \text{arc tg } \frac{1}{8}$

- A) $\frac{5\pi}{8}$ B) $\frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

Resolución.

Aplicando la fórmula $\text{arc tg } x \pm \text{arc tg } y = \text{arc tg } \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$, obtenemos

$$M = \text{arc tg } \frac{1}{3} + \text{arc tg } \frac{1}{5} + \text{arc tg } \frac{1}{7} + \text{arc tg } \frac{1}{8}$$

$$M = \text{arc tg } \left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}} \right) + \text{arc tg } \left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{7} \times \frac{1}{8}} \right)$$

$$M = \text{arc tg } \left(\frac{4}{7} \right) + \text{arc tg } \left(\frac{3}{11} \right), \text{ nuevamente aplicamos la fórmula anterior}$$

$$M = \text{arc tg } \left(\frac{\frac{4}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{7} \times \frac{3}{11}} \right) = \text{arc tg } (1)$$

$$M = \text{arc tg } (1) \Rightarrow 1 \text{ tg } M \Rightarrow \underline{\text{tg } 45^\circ} \text{ tg } M \Rightarrow \underline{M = 45^\circ = \frac{\pi}{4}} \quad \text{Rpta. D}$$



TALLER DE EJERCICIOS N° 32

Ejercicio 1 : Calcular

$$M = \sec(\arctg 2\sqrt{5}) \operatorname{cosec}(\arccotg 5\sqrt{2})$$

Resolución:

Rpta. $M = 3\sqrt{119}$

Ejercicio 2 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera

- A) $\arctg(3/4) = 53^\circ$
- B) $\arccos(\sqrt{3}/2) = \arctg(\sqrt{3})$
- C) $\arcsen(4/5) - \arctg(4/3) = 0$
- D) $\arccos(\sqrt{8}/3) = \arcsen(\sqrt{8}/9)$
- E) $6 \arccsc(5/2) = 1/6 \arcsen(2/5)$

Resolución

Rpta. C

Ejercicio 3 : $\cos(2 \arcsen 2x)$ es equivalente a:

Resolución.

Rpta. $1 - 8x^2$

Ejercicio 4 : Calcular

$$y = \operatorname{sen} \left\{ \arccos \left[\operatorname{sen} \left(\arctg \frac{1}{4} \right) \right] \right\}$$

Resolución

Rpta. $y = 4/\sqrt{17}$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS



NIVEL 1

Ejercicio 1 :Cuál o cuáles son correctas:

I. $\arctg(1) = 45^\circ$

II. $\arcsen(\sqrt{2}) = 45^\circ$

III. $\text{arc sec}(2) = 60^\circ$

IV. $\text{arc cosec}\left(2/\sqrt{3}\right) = 30^\circ$

- A) I, II y III B) I, I y IV C) II y IV
D) I y III E) Todas

Ejercicio 2 : Reducir

$$R = \frac{1}{4} \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctg(1) \\ + \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- A) 1 B) 1/4 C) 1/8 D) -1 E) 1/4

Ejercicio 3 : Calcular

$$A = \arccos\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right) - \arccos(5)$$

- A) 60° B) 30° C) 45° D) 37° E) 53°

Ejercicio 4 : El valor de

$$E = \arctg x + \arccos x, \text{ es}$$

- A) 0° B) 45° C) 90° D) 180° E) 360°

Ejercicio 5 : ¿A qué es igual?

$$K = 2 \arctg\left[2 \arcsen\left(2 \arctg\sqrt{3}/3\right)\right]$$

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 120°

Ejercicio 6 : Hallar el valor de:

$$M = \frac{2 \lg^2(\arcsen \sqrt{2}/2) + 3 \sin^2(\arctg \sqrt{3}/3)}{4 \cos^2(\text{arc sec } 2)}$$

- A) 5/4 B) 5/2 C) 1/6 D) 5/6 E) 3/2

Ejercicio 7 : Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

I. $\arccotg x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

II. $\sec(\arcsen 0.6) = 1.20$

III. $\arccos\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cotg 45^\circ\right) = \arctg \sqrt{3}$

- A) I y II B) II y III C) III D) I E) II

Ejercicio 8 : Marque lo incorrecto:

A) $\sin(\arcsen 1/2) = 1/2$

B) $\cos(\arctg \sqrt{3}) = 1/2$

C) $\cotg(\arctg 1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}/3$

D) $\arccos(1) + \arcsin(\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$

E) $\arctg(3) - \arctg(2) = 8^\circ$

Ejercicio 9 : Si

$$A = \arcsin\left[\arctg\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)\right] \text{ y}$$

$$B = \arccos\left[\arctg\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\right]$$

Siendo $a > b$, se puede afirmar que

- A) $A = B$ B) $A + B = 0$ C) $A = B$
D) $A = B$ E) $A + B = 2$

Ejercicio 10 : Calcular

$$R = \cotg \left\{ 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[2 + \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3} \right) \right] \right\}$$

- A) -1 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 1

NIVEL II

Ejercicio 1 : Calcular

$$W = \operatorname{arc} \cotg \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arc} \cotg \left(-\frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

- A) $\pi/6$ B) $\pi/3$ C) $5\pi/6$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) π

Ejercicio 2 : A qué es igual:

$$B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{3}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{9}$$

- A) $\pi/3$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\pi/6$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

Ejercicio 3 : Calcular

$$F = \operatorname{sen} \left\{ 2 \operatorname{arc} \cos \left[\operatorname{tg} \left(\operatorname{arc} \sec \frac{17}{15} \right) \right] \right\}$$

- A) $\frac{\sqrt{161}}{225}$ B) $\frac{4\sqrt{161}}{225}$ C) $\frac{16\sqrt{161}}{225}$
D) $\frac{4}{225}$ E) $\frac{16}{225}$

Ejercicio 4 : Reducir

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$$

- A) $\pi/3$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\pi/6$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

Clave de Respuestas

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. D | 2. A | 3. C | 4. C | 5. E |
| 6. A | 7. C | 8. C | 9. C | 10. E |

Ejercicio 5 : Sabiendo que:

$$n = \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sec} 50^\circ \operatorname{sec} 70^\circ \operatorname{sec} 60^\circ$$

Calcular

$$W = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{n^2 - 1} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{n - 1}}{n} \right)$$

- A) $\pi/3$ B) $\pi/4$ C) $\pi/6$ D) $\pi/2$ E) $\pi/12$

Ejercicio 6 : Calcular

$$L = \operatorname{sen} \left\{ 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\cos \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{5} \right) \right] \right\}$$

- A) -4/9 B) 12/13 C) 4/13 D) 3/4 E) 9/13

Ejercicio 7 : Calcular

$$R = \cotg \left\{ 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[2 + \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3} \right) \right] \right\}$$

- A) 1 B) $\sqrt{3}/3$ C) $\sqrt{3}/2$ D) $\sqrt{3}$ E) $1/2$

Ejercicio 8 : Si $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x/3)$; Calcular

$$Q = f(\sqrt{3}) + f(3) + f(3\sqrt{3})$$

- A) $\frac{89\pi}{180}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{95\pi}{180}$ E) $\frac{97\pi}{180}$

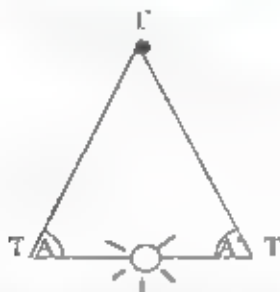
Clave de Respuestas

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. C | 2. A | 3. C | 4. A |
| 5. D | 6. B | 7. A | 8. E |



LA TRIGONOMETRÍA Y LA ASTRONOMÍA

¿Cómo puede medirse la distancia a la que se encuentra una estrella?



Un método clásico para la determinación de grandes distancias consiste en fotografiar la estrella cuando la Tierra está en un punto cualquiera T de su órbita y se determina el ángulo A con un instrumento adecuado (teodolito). Se esperan seis meses hasta que la Tierra llega al punto T' y se determina el ángulo A. La distancia TT' es el diámetro de la órbita terrestre y es conocido (XXX millones de kilómetros).

Para poder calcular la distancia LT necesitamos aprender un poco más de trigonometría.

El teodolito es un instrumento que miden los agrimensores para medir los ángulos sobre un terreno

Está compuesto de un círculo horizontal y un semicírculo vertical, ambos graduados y con anteojos, para medir ángulos en sus planos respectivos



Capítulo

12

POTENCIACIÓN

12.1 ANÁLISIS COMBINATORIO - BINOMIO DE NEWTON

12.1.1 FACTORIAL DE UN NUMERO

Se denomina **factorial** de un número entero y positivo al producto indicado desde la unidad en forma consecutiva, hasta el número dado. Al factorial de un número se puede representar por cualquiera de los dos símbolos: $!$ ó L .

Si el número es "n", su factorial se representa por



Por definición:

$$n! = L = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$$

$$n! = L = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

Ejemplos:

$$2! = L = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = L = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = L = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = L = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$6! = L = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$7! = L = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5\,040$$

Observaciones

1. Los factoriales sólo están definidos para cantidades enteras y positivas así:

$5! = 120$, factorial de 5	→ (Sí existe)
$(-3)! = 12$, factorial de (-3)	→ (No existe)
$4! = 24$	factorial de 4	→ (Sí existe)
$\frac{6!}{2} = \frac{720}{2}$, un medio de factorial de 6	→ (Sí existe)
$\left(\frac{1}{3}\right)! = \frac{1}{6}$, factorial de $\frac{1}{3}$	→ (No existe)
$(\sqrt{2})! = \sqrt{2}$	factorial de $\sqrt{2}$	→ (No existe)

2. El factorial de un número puede expresarse en función del factorial de otro número menor:

Ejemplo: Sea $6! = 720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$$6! = 720 = 5! \times 6 \Rightarrow 6! = 720 = 6 \cdot 120$$

También $6! = 720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$$6! = 720 = 4! \times 5 \times 6 \Rightarrow 6! = 720 = 5 \times 6 \times 24$$

O también $6! = 720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$$6! = 720 = 3! \times 4 \times 5 \times 6 \Rightarrow 6! = 720 = 4 \times 5 \times 6 \times 24$$

Nótese que en los tres casos todos ellos son iguales a $6!$ y a su vez el número contenido en el factorial y los que están fuera de él son sus consecutivos posteriores a él

Ejemplo: Escribir $12!$ en función del factorial de 9

Resolución:

$$12! = 9! \times 10 \times 11 \times 12$$

Ejemplo: Escribir $20!$ en función del factorial de 16

Resolución:

$$20! = 16! \times 17 \times 18 \times 19 \times 20$$

Ejemplo: Escribir $(x+5)!$ en función del factorial de $(x+2)$

Resolución:

$$(x+5)! = (x+2)! (x+3)(x+4)(x+5)$$

Ejemplo: Escribir $(x-2)!$ en función del factorial de $(x-4)$

Resolución:

$$(x-2)! = (x-4)! (x-3)(x-2)$$

3. Por convención:

$$0! = 1$$

:

y Por definición:

$$1! = 1$$

Lo que implica que no podrá hacerse $0! = 1!$ $\rightarrow 0 = 1$ porque los dos conceptos tienen diferente punto de partida en cuanto a su definición.

* Demostrar que: $0! = 1$

Demostración:

Se sabe que: $n! = (n-1)! \cdot n$ y que esta igualdad cumple para todo número entero positivo a partir de la unidad.

Acomodando la expresión, obtenemos

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Reemplazando para:

$$n=1 \Rightarrow \frac{1!}{1} = (1-1)! \Rightarrow 1 = 0! \quad \text{L.q.q.d.}$$

** Demostrar que: $1! = 1$

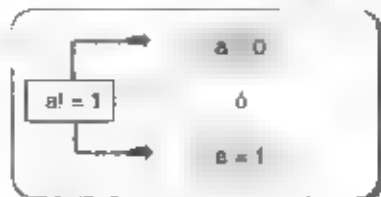
Demostración:

Se sabe que: $n! = (n-1)! \cdot n$

Es decir $\frac{n!}{n} = (n-1)!$, Damos a "n" valor de 2, obteniendo:

$$\frac{2!}{2} = (2-1)! \Rightarrow \frac{2}{2} = 1! \Rightarrow 1 = 1! \quad \text{L.q.q.d.}$$

4. De lo anterior, si:



Ejemplo: Dar la suma de los posibles valores de "x" en: $(x-3)! = 1$

Resolución:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{(x-3)! = 1} \rightarrow \begin{array}{l} x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \\ 0 \\ x-3=1 \rightarrow \boxed{x=4} \end{array}
 \end{array}$$

La suma de los posibles valores de "x" será $3 + 4 = 7$

5. Si: $\boxed{a = b \rightarrow a = b}$ $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} \text{ (}\forall = \text{para todo)}}$

Ejemplo: Determine el valor de "x" si $\boxed{x-1} = 24$

Resolución

Tal como se presenta la igualdad, no es posible el despeje directo de "x", para ello es recomendable desdoblar el 24 en factores que sean de forma consecutiva veamos

$$\boxed{x-1} = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$\boxed{x-1} = \boxed{4}$$

Donde, por comparación de miembros, obtenemos $x-1=4 \rightarrow x=4+1$

$$x=5$$

Recomendaciones En factoriales las siguientes operaciones no se cumplen

i) $(n+m)! \neq n! + m!$ (\neq significa diferente)

Ejemplo:

$$(3+2)! \neq 3! + 2!$$

$$5! \neq 6 + 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$120 \neq 8$$

ii) $(n-m)! \neq n! - m!$

Ejemplo:

$$(4-2)! \neq 4! - 2!$$

$$2! \neq 24 - 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \neq 22$$

iii) $(n \times m)! \neq n! \times m!$

Ejemplo:

$$(3 \times 2)! \neq 3! \times 2!$$

$$6! \neq 6 \times 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$720 \neq 12$$

$$IV) \left(\frac{n}{m}\right)! = \frac{n!}{m!}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{6}{3}\right)! = \frac{6!}{3!}$$

$$(2)! = \frac{720}{6}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \times 120$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FACTORIAL DE UN NUMERO

Ejercicio 1 Determinar el valor de M; sabiendo que: $M = \frac{13!}{9! \times 4!}$

Resolución:

- En primer lugar escribimos 13! en función del factorial de 9

$$13! = 9! \times 10 \times 11 \times 12 \times 13$$

- En segundo lugar reemplazamos el valor hallado en "M"

$$M = \frac{9! \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{9! \times 4!}$$

Pero $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$$M = \frac{10 \times 11 \times 12 \times 13}{24} = \frac{10 \times 11 \times 13}{2}$$

$$M = 5 \times 11 \times 13 \Rightarrow \therefore \underline{M = 715} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Determinar el valor de S; sabiendo que: $S = \frac{6! \times 4!}{8}$

Resolución:

- En primer lugar escribimos 10! en función 6!

$$8 = 6 \times 7 \times 8$$

- En segundo lugar reemplazamos el valor hallado en "S"

$$S = \frac{6! \times 4}{6! \times 7 \times 8} \quad \text{pero } 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$S = \frac{24}{7 \times 8} = \frac{3}{7} \Rightarrow \therefore \underline{S = \frac{3}{7}} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3 Determinar el valor de "E" sabiendo que $E = \frac{10! \times 5!}{12! \times 3!}$

Resolución:

♦ Escribimos el factorial de 12 en función de 10!

$$12! = 10! \times 11 \times 12$$

Luego $E = \frac{10! \times 5!}{(10! \times 11 \times 12) \times 3!}$ escribimos 5! en función 3!

$$E = \frac{\cancel{10!} \times \cancel{4!} \times 5}{11 \times 12 \times \cancel{3!}} = \frac{5}{11 \times 3} = \frac{5}{33} \Rightarrow E = \frac{5}{33} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 4 Simplificar $R = \frac{n!}{(n-2)!} + n(2-n)$

Resolución:

♦ Escribimos n! en función de (n-2)!

$$n! = (n-2)! \times (n-1) \times n$$

Luego: $R = \frac{(n-2)! \times (n-1) \times n}{(n-2)!} + n(2-n)$

$$R = n^2 - n + 2n - n^2 \Rightarrow R = n \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 5 Calcular el valor de $P = \left(\frac{8! \times 7!}{(7! + 6!)(7! - 6!)} - \frac{25}{6} \right)$

Resolución:

♦ Sabemos que $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ (Diferencia de cuadrados)

Luego $P = \left(\frac{8! \times 7!}{(7! + 6!)(7! - 6!)} - \frac{25}{6} \right)$

$$P = \left(\frac{8! \times 7!}{(6! \times 7 + 6!)(6! \times 7 - 6!)} - \frac{25}{6} \right)$$

$$P = \left(\frac{8! \times 7!}{6! (7+1) 6! (7-1)} - \frac{25}{6} \right) \quad \text{pero} \quad \frac{8!}{7!} = \frac{6! \times 7 \times 8}{6! \times 7}$$

$$P = \left(\frac{(6! \times 7 \times 8) \times (6! \times 7)}{(6! \times 8)(6! \times 6)} - \frac{25}{6} \right)$$

$$P = \left(\frac{49}{6} - \frac{25}{6} \right) = 4 \Rightarrow P = 4 \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 6: Hallar el equivalente de $E = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{(n+1)!}{n!}$

Resolución:

Escribimos $(n+1)!$ en función de $n!$, veamos $(n+1) = n! (n+1)$

Luego
$$E = \frac{n!}{n!(n+1)} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{n!(n+1)}{n!}$$

$$E = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)} - \frac{\cancel{1}}{(n+1)} + (n+1) \Rightarrow \boxed{E = (n+1)} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 7: Reducir $P = \frac{n[n! + (n-1)!]}{(n+1)!}$

Resolución:

• Escribimos $n!$ en función de $(n-1)!$, veamos. $n! = (n-1)! n$

Luego
$$P = \frac{n[(n-1)! n + (n-1)!]}{(n+1)!} = \frac{n[(n-1)! (n+1)]}{(n+1)!}$$

Ordenando los factores del numerador obtenemos

$$P = \frac{(n-1)! n (n+1)}{(n+1)!} = \frac{\cancel{(n-1)!} n \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n-1)!} (n+1)} = 1 \Rightarrow \boxed{P = 1} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 8: Hallar el equivalente de $Q = (n+2)! - (n+1)!$

Resolución:

Escribimos $(n+2)!$ en función de $(n+1)!$ veamos

$$Q = \overbrace{(n+1)!}^{(n+1)!} (n+2) - \overbrace{(n+1)!}^{(n+1)!} \quad \text{Factorizando } (n+1)!$$

$$Q = \overbrace{(n+1)!}^{(n+1)!} [(n+2) - 1] \Rightarrow \boxed{Q = (n+1)! \times (n+1)} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 9: Resolver la ecuación $\frac{(x-2)! (x+1)!}{(x-1)! x!} = 3$

Resolución:

Escribimos $(x+1)!$ En función de $x!$, veamos $\frac{(x-2)! \cancel{(x+1)!}}{(x-1)! x!} = 3$

• También escribimos $(x-1)!$ en función de $(x-2)!$ Obteniendo

$$\frac{\cancel{(x-2)!} (x+1)!}{\cancel{(x-2)!} (x-1)!} = 3$$

Donde: $(x + 1) = 3(x - 1)$

$$x + 1 = 3x - 3$$

$$1 + 3 = 3x - x \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 10 Resolver la ecuación: $\frac{(3x + 1)!}{(3x - 1)!} = 42$

Resolución

La expresión del primer miembro, se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\cancel{(3x-1)!} (3x) (3x+1)}{\cancel{(3x-1)!}} = 42$$

Donde $3x(3x+1) = 42$

hacemos que $3x = A$

$$A(A+1) = 42 \Rightarrow A^2 + A = 42$$

;Factorizamos por el método del Aspa

$$\begin{array}{r} A^2 + A - 42 = 0 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ A \quad \quad - 6 \\ A \quad \quad + 7 \end{array}$$

Luego $(A - 6)(A + 7) = 0 \Rightarrow$ Igualamos cada factor a cero

i) $A - 6 = 0 \Rightarrow A = 6; \Rightarrow$ Pero inicialmente $A = 3x$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

ii) $A + 7 = 0 \Rightarrow A = -7 \Rightarrow$ Pero: $A = 3x$

$$3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

La ecuación, sólo cumple cuando $x = 2$; y no cuando $x = -\frac{7}{3}$ ya que al remplazar dicho valor en la ecuación resultaría el factorial de un número negativo y esto no existe.

Ejercicio 11 Resolver la ecuación: $\frac{(x-3)! + (x-2)!}{(x-1)!} = 120$

Resolución

Escribimos $(x-2)!$ en función de $(x-3)!$ obteniendo:

$$\frac{(x-3)^1 + (x-3)^1(x-2)}{(x-1)} = 120$$

Factorizamos $(x-3)^1$

$$\frac{(x-3)^1 [1 + (x-2)]}{(x-1)} = 120$$

$$\frac{(x-3)^1 \cancel{(x-1)}^1}{\cancel{(x-1)}^1} = 120$$

Pero $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$

Donde

$$(x-3)^1 = 5$$

\Rightarrow por comparación de miembros

$$x-3 = 5$$

\Leftrightarrow

$$x = 8 \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 12. Simplificar $R = \frac{n^{n+1} + 1}{(n-1)^2} \cdot n^{n-1}$

Resolución.

Para este tipo de problema es necesario hacer cambio de variable o sea hacemos que $n^1 = a$
Reemplazamos este valor en "R" obteniendo

$$R = \frac{(a+1)^1 + a}{(a-1)^2} \rightarrow \text{Esta expresión se puede escribir así}$$

$$R = \frac{(a-1)^1 + a + 1}{(a-1)^2} = \frac{(a-1)^1 + a}{(a-1)^2}$$

Factorizamos en el
numerador $(a-1)^1$

$$R = \frac{\cancel{(a-1)}^1 \times [a + \cancel{(a-1)}^1]}{\cancel{(a-1)}^1 (a-1)} = \frac{[a^2 + a - a]}{(a-1)}$$

$$R = a^2$$

\rightarrow

$$\text{pero } n^1 = a$$

\Rightarrow

$$R = (n^1)^2 \quad \text{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS N° 33

Ejercicio 1 Evalúa cada proposición siguiente y coloca dentro del paréntesis una V o una F según la proposición sea verdadera o falsa.

1. $5! = 3! \times (20)$ ()

2. $7! = 5! + 2!$ ()

3. $\frac{4!}{2!} = 4$ ()

4. $3! < 10 < (5 \cdot 1)!$... ()

5. $6! = (10 - 4)!$... ()

6. $(3!)^2 = 36$ ()

7. $4! \times 3! = 12!$ ()

8. $3! (2! + 1) = 6! + 3!$... ()

Ejercicio 3 : Determinar el valor que representa cada expresión.

a) $\frac{23!}{20! \times 253}$

b) $\frac{8! \times 16!}{8 \times 10! \times 14!}$

Rpta. a) 42 b) 4/9

Ejercicio 2 Determinar el valor que representa cada expresión siguiente

a) $\frac{12!}{10!}$

b) $\frac{15!}{13! \times 2!}$

c) $\frac{11! \times 6!}{9!}$

d) $\frac{4! \times 7!}{6! \times 5!}$

Rpta. a) 132 b) 105
c) 79 200 d) 7/5

Ejercicio 4 Reducir la siguiente expresión

$$E = \frac{n! - (n-1)!}{(n-1)!}$$

Resolución.

Rpta. $E = n - 1$

Ejercicio 5 : Calcular el valor de

$$R = \left[\frac{5! \times 4}{(4!)^2 - (3!)^2} \cdot \frac{10}{3} \right]$$

Resolución.

Rpta. $R = 2$

Ejercicio 7 : En la siguiente expresión

$$(n-1)! + n! = 0,2 (n+1)!$$

Resolución.

Rpta. $n = 5$

Ejercicio 6 :

a) ¿Qué valor tiene "K"?

$$\text{Si: } K! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$$

b) ¿Qué valor tiene "n"?

$$\text{Si: } (n-3)! \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 12!$$

Resolución.

Rpta. a) $K = 6$ b) $n = 11$

Ejercicio 8 Resolver

$$(2x+1)! = 72$$

$$(2x-1)!$$

Resolución.

Rpta. $x = 4$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FACTORIAL DE UN NÚMERO

NIVEL 1

Ejercicio 1. Reducir $E = (n+2) \cdot 2(n+1)$

- A) $(n+2)!$ B) $(n+3)!$ C) $n(n+1)$
D) $n(n+1)!$ E) $n!(n+1)$

Ejercicio 2. Reducir $M = \frac{7! - 2 \times 5!}{6! - 10 \times 4!}$

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Ejercicio 3. El valor de $\frac{1}{4! + 3!}$ es

- A) $\frac{1}{7!}$ B) $\frac{4}{5!}$ C) $\frac{1}{4 \cdot 3!}$ D) $\frac{1}{5!}$ E) N.A.

Ejercicio 4. Efectuar $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

- A) $\frac{n}{n!}$ B) $\frac{n+1}{n!}$ C) $\frac{n-1}{(n+1)!}$
D) $\frac{n}{(n+1)!}$ E) $\frac{1}{n(n+1)!}$

Ejercicio 5. Reducir $R = \frac{(n+1)! \cdot n!}{(n-1)!}$

- A) n B) n^2 C) $2n$ D) $1/n^2$ E) n^3

Ejercicio 6. Calcular el valor de "n"

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 6$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 7. Calcular el valor de "n"

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 10$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Ejercicio 8. Indicar la solución entera de la ecuación.

$$(x-1)! + x! + (x+1)! = 5880$$

- A) 5 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

Ejercicio 9. Resolver $\frac{(x-1)!(x+2)}{x!} = \frac{5}{3}$

- A) $x = 2$ B) $x = 3$ C) $x = 4$
D) $x = 5$ E) $x = 6$

Ejercicio 10. Simplificar $E = \frac{n!(n+1)!}{(n+1)!n!}$

- A) $\frac{n-1}{n+1}$ B) $\frac{n+1}{n+1}$ C) $\frac{n+1}{n-1}$ D) $\frac{n+1}{n-1}$ E) $\frac{n}{n}$

Ejercicio 11. Simplificar $R = \frac{1! + 10! + 9!}{12! \cdot 6!}$

- A) 8 B) 9 C) 12 D) 24 E) 36

Ejercicio 12. Resolver

$$2 \left[\frac{(n+1)!}{n!} \right] - \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = 6$$

- A) $n = 5$ B) $n = 6$ C) $n = 7$ D) $n = 8$ E) $n = 9$

Ejercicio 13. Resolver $\frac{(x+6)!}{(x+4)!} \cdot \frac{(x+2)!}{x!} = 44$

- A) $x = 1$ B) $x = 3$ C) $x = 4$ D) $x = 2$ E) $x = 5$

Ejercicio 14. Señale el valor entero positivo de "n" para el cual

$$(n+1)! \cdot (n-1)! = 36n + (n!)^2$$

- A) 13 B) 72 C) 4 D) 6 E) 2

Clave de Respuestas

1 D	2 E	3 B	4 D	5 B
6 A	7 B	8 B	9 B	10 B
11 B	12 C	13 D	14 C	

NIVEL II

Ejercicio 1 Reducir $R = \frac{n!}{(n-2)!} - n^2$

- A) n B) $2n$ C) n^2 D) $-n$ E) nl

Ejercicio 2 Reducir $M = \frac{n[(n+1)! - n!]}{(n-1)!}$

- A) n B) n^2 C) n^3 D) $n!$ E) $2(n!)^2$

Ejercicio 3 Reducir

$$P = \frac{(n+2)!}{n!} - n(n+3) + \frac{(n-2)!}{(n-3)!}$$

- A) n^2 B) $n!$ C) n D) $(n+1)!$ E) $3n$

Ejercicio 4 Resolver $\frac{(x-5)!}{(x-3)!} = \frac{2(x-4)!}{(x-2)!}$

- A) 4 B) 5 C) 3 D) 6 E) 8

Ejercicio 5 Resolver $\frac{(x-2)! + (x-1)!}{x} = 720$

- A) 6 B) 8 C) 5 D) 4 E) 3

Ejercicio 6 Calcular el valor de "n"

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = 25$$

- A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 5

Ejercicio 7 Al simplificar

$$\left[\frac{(n+1)! + n!}{(2n+1)! + (2n+2)!} \right] \left[\frac{(2n+3)!}{(n+2)!} \right] \text{ Se obtiene}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) n

Ejercicio 8 Resolver

$$\frac{(n+7)!}{(n+6)!} + \frac{(n+5)!}{(n+5)!} = 10!$$

- A) $n=6$ B) $n=9$ C) $n=5$ D) $n=3$ E) $n=4$

Ejercicio 9 Simplificar

$$R = \frac{(a! + 2)! - 2(a! + 1)!}{(a! + 1)!}$$

- A) $a!$ B) $a!!$ C) $a!!!$
D) $a(a+1)!$ E) $(a+1)!$

Ejercicio 10 Simplificar

$$E = (n! - 1)!(n! - 1)!(n - 1)!n - n!!!$$

- A) $n!$ B) $(n+1)!$ C) 0 D) $n!$ E) n

Ejercicio 11 Realiza las operaciones siguientes

$$\frac{(13!)^2}{(12!)^2 + 2(12!1!) + (1!)^2} - \frac{13!}{10! + 1!}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) -1

Ejercicio 12 Calcular el valor de "x"

$$(119!)^{24} (5!)^{24} = (5!)^{24} 24$$

- A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) 6

Ejercicio 13 El valor de $\frac{5}{5! + 4! + 3!}$ es

- A) $\frac{5}{12!}$ B) $\frac{6}{5!}$ C) $\frac{3}{4!}$ D) $\frac{4}{5!}$ E) N.A.

Ejercicio 14 Resolver

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 5 + \frac{(n+12)!}{(11+n)!}$$

Dar como respuesta la suma de los valores de "n"

- A) -2 B) 5 C) 3 D) 2 E) 3

Clave de Respuestas

1 D	2 C	3 C	4 D	5 B
6 C	7 B	8 E	9 B	10 C
11 A	12 B	13 D	14 C	

12.2 ANÁLISIS COMBINATORIO

Parte de la matemática que se encarga del estudio de los grupos o conjuntos que se pueden formar con distintos elementos (Objetos, letras, números, etc.) de modo que cada grupo formado se diferencie de otro por el número de elementos. Por las clases de elementos o por el orden de colocación en el análisis combinatorio en las agrupaciones, las estudiaremos en tres casos: Variaciones, Permutaciones y Combinaciones.

12.2.1 PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

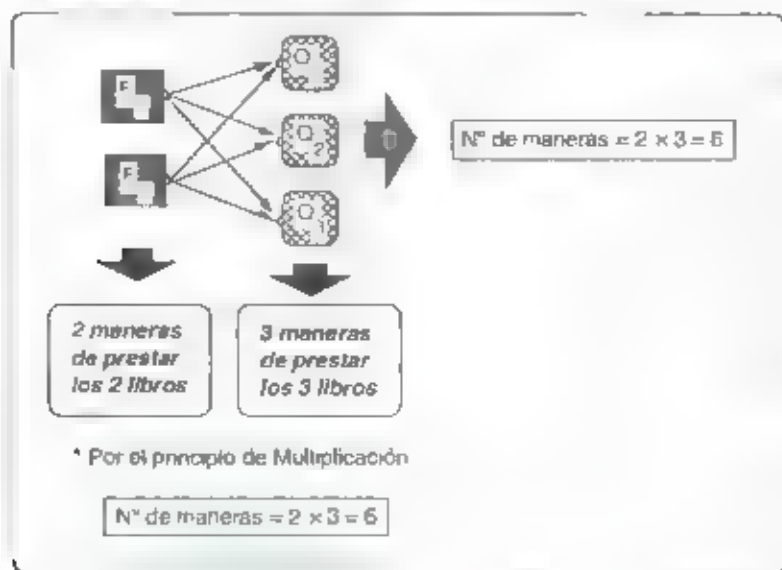
Si el suceso "A" se puede realizar de "m" maneras y el suceso "B" se puede realizar en "n" maneras, entonces los sucesos A y B se pueden realizar en forma conjunta de $m \times n$ maneras, siempre que se efectúe uno después del otro.

Nota: Este principio se puede generalizar para más de 2 sucesos.

Ejemplo 1 Un alumno tiene dos libros de física y una alumna tiene tres libros de química. ¿De cuántas maneras podría prestarse un libro?

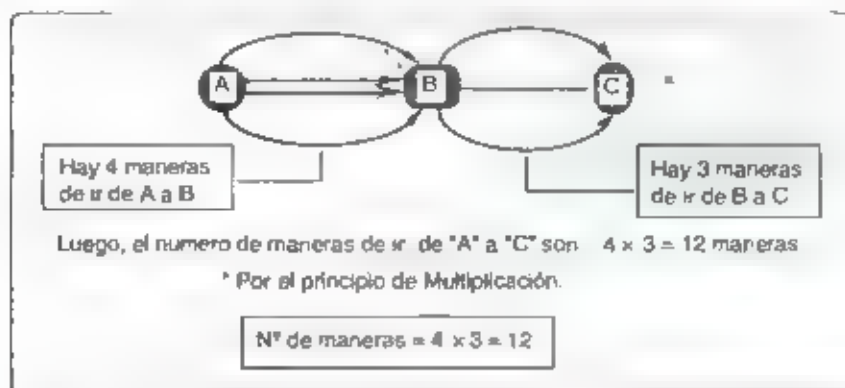
Resolución

Para su mejor comprensión, hacemos el siguiente gráfico:



Ejemplo 2 De una ciudad "A" a otra "B" hay 4 caminos diferentes y de la ciudad "B" a la ciudad "C" hay 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá ir de A a C?

Resolución:



12.2.2 PRINCIPIO DE ADICIÓN

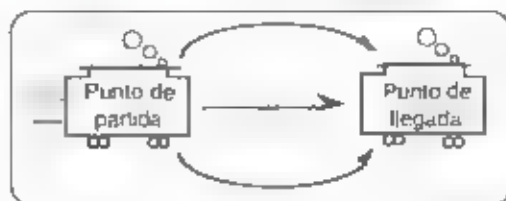
Si el suceso "A" puede realizarse de "m" maneras y el suceso "B" de "n" maneras entonces el suceso "A" o el suceso "B" se puede realizar de: " $(m + n)$ " maneras.

Nota: Para que se cumpla el principio de adición, se debe verificar que no sea posible que los sucesos A y B ocurran juntos.

Ejemplos: Proyectamos un viaje y decidimos ir en tren o en microbus. si hay 3 rutas para el tren y 4 para el microbus. ¿De cuántas maneras tenemos que decidir nuestro viaje?

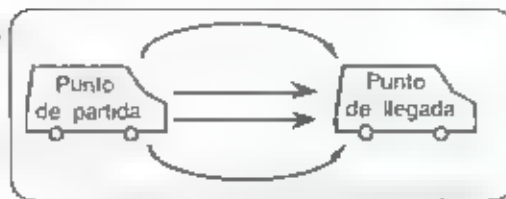
Resolución:

a) Viaje en tren:



Para el tren hay 3 maneras de llegar

b) Viaje en microbus:



Para el microbus hay 4 maneras de llegar

$$\text{N° de maneras} = 3 + 4 = 7$$

12.2.3 VARIACIONES O ARREGLOS

Variación es cada una de las ordenaciones que puedan formarse con varios elementos, tomados de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc. de modo que dos ordenaciones cualquiera del mismo número de elementos se diferencien, por lo menos en un elemento o por el orden en que están colocados

Ejemplo: Dado: $A = \{a, b, c\}$
3 elementos

Si tomamos de 2 en 2 las variaciones serían

$$\{ab, ac, bc, ba, ca, cb\}$$

Si nos interesa el orden
ya que no es lo mismo
ab que ba

Si tomamos de 3 en 3, las variaciones serían

$\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$

Luego, el número de variaciones está dado por la siguiente fórmula

$$V_n^m = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) \quad (m > n > 0)$$

De otra forma: $V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ Donde $m = \#$ total de elementos de los " m " elementos tomados de " n " en " n ".

Ejemplos:

$$V_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

$$V_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 840$$

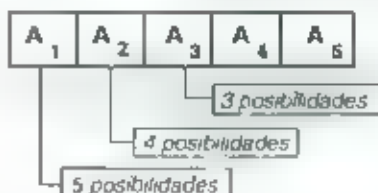
$$V_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = \frac{m!}{1} = m!$$

Nota: Para las variaciones el orden de sus elementos interesa ya que no es lo mismo decir 23 que 32 como se observará estos dos números están compuestos por las mismas cifras pero en su valor son diferentes.

Ejemplo: 3 alumnos llegan a matricularse a una academia pre-universitaria que dispone de 5 aulas. ¿De cuántas maneras se les puede distribuir de modo que siempre ocupen aulas diferentes?

Resolución:

Sean las 5 aulas, las que se muestran en la figura



- El primer alumno puede ocupar cualquiera de las 5 aulas, existiendo 5 posibilidades para tomarlo.
- El segundo alumno puede ocupar cualquiera de las 4 aulas que quedan por ocupar, existiendo para este alumno 4 posibilidades de tomarlo.

El tercer alumno puede ocupar cualquiera de las 3 aulas restantes, existiendo 3 posibilidades para tomarlo.

Luego: $\# \text{ de maneras} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

Por fórmula obtenemos:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde

$m = 5$ (total de elementos = 5)

$n = 3$ (alumnos)

Luego

$$V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \times 3 \times 4 \times 5}{2!} = 60$$

Ejemplo: ¿Cuántos números diferentes de 2 cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 7?

Resolución:

De los dígitos dados, 1, 2, 3, 4, tomamos de 2 en 2, obteniendo

12, 21, 23, 32
13, 31, 24, 42
14, 41, 34, 43



Se forman 12 números de 2 cifras cada uno

Por fórmula, obtenemos

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde $m = 4$

$n = 2$

$$V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{2! \times 3 \times 4}{2!} = 12$$

Los números de 2 cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 son 12



TALLER DE EJERCICIOS N° 34

Ejercicio 1 . Calcular el valor de las siguientes variaciones.

i) V_2^0

ii) V_4^0

iii) V_3^3

Resolución

Rpta. i) 20 ii) 1 680 iii) 6

Ejercicio 2 Resolver $V_2^x = 42$

Resolución.

Rpta. $x = 6$

Ejercicio 3 Calcular el valor de "x" que satisface la expresión

$$V_2^x + V_2^{x-2} + V_2^{x-4} = 98$$

Rpta. $x = 8$

Ejercicio 4 Calcular de cuántas maneras se pueden distribuir los asientos para cinco personas, en una fila de 10 sillas.

Resolución.

Rpta. 30 240

12.2.4 PERMUTACIONES

Se llaman permutaciones a las variaciones en las que entran todos los elementos en sus diversas ordenaciones de modo que dos grupos cualesquiera contienen los mismos elementos y solamente difieren en el orden en que están colocados.

Ejemplo: Sean los elementos a, b, c

Permutaciones de 3 elementos: abc, acb, bca, bac, cba, cab

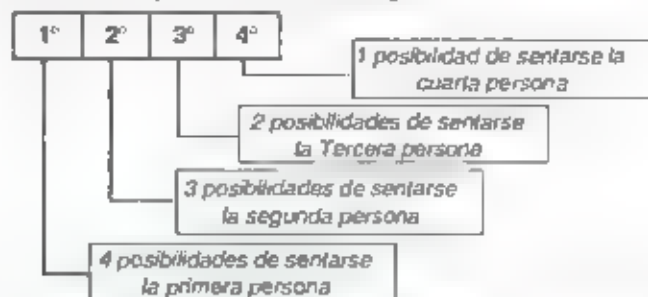
Permutaciones son aquellas variaciones de tipo V_n^m en donde $m = n$

$$P_n = V_n^n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \Rightarrow \boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden sentarse 4 personas en 4 asientos uno a continuación de otro?

Resolución.

Sean los 4 asientos, los que se muestran en la figura



Luego N de permutaciones $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Por fórmula. $\boxed{P_n = n!}$, Donde: $n = 4$ Luego. $P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Ejemplo: ¿Calcular el número de palabras de 3 letras que se pueden formar con las letras "a, n, e"?

Resolución.

Las palabras de 3 letras que se pueden formar con las letras, "a, n, e" son



Por fórmula $\boxed{P_n = n!}$ Donde $n = 3$

Luego: $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 35

Ejercicio 1 : Escribe todas las permutaciones posibles de las letras A, B, C, D, de acuerdo con la condición que se indica en cada caso

- i) La primera letra es A y la última D
- ii) En los extremos deben estar las letras B y D.

Resolución.

Ejercicio 3 ¿Cuántas "palabras" no necesariamente pronunciables pueden formarse con las letras de la palabra "vestido" (no pueden repetirse las letras ni pueden omitirse)

Resolución.

Rpta. | 5 040

Ejercicio 2 ¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse 8 alumnos en una fila?

Resolución.

Ejercicio 4 ¿Cuántas de estas "palabras" obtenidas en el ejercicio anterior empiezan con V y terminan en O?

Resolución.

Rpta. 40 320

Rpta. 120

12.2.5 NÚMEROS COMBINATORIOS

Un número combinatorio se simboliza de la siguiente manera:

$\binom{n}{k}$ ó C_k^n en la que "n" y "k" son números naturales, y $n \geq k$, se lee "número combinatorio n sobre k"

En un número combinatorio $\binom{n}{k}$ a "n" se le denomina numerador del número combinatorio y a "k" se le denomina denominador del número combinatorio

* Todo número combinatorio $\binom{n}{k}$ equivale a una fracción cuyo numerador es el producto de "k" factores que comenzando en "n", disminuye de 1 en 1 es decir

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Ejemplos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

Si "k" es igual a 3, nos indica que en el numerador de la fracción debe existir sólo 3 factores ($5 \times 4 \times 3$) y en el denominador debe ir el 3!

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 35$$

* Otra forma de obtener el número combinatorio $\binom{n}{k}$ es la siguiente:

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Ejemplos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! 3!} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5!}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! 4!} = \frac{7!}{3! 4!} = \frac{7!}{3! 4!} = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

PROPIEDADES:

$$\textcircled{1} \quad \left(\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right) = n$$

Demostración: $\left(\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right) = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{\overbrace{n!}^{(n-1)! \cdot n}}{\overbrace{(n-1)!}^{(n-1)!} \cdot 1!} = n \Rightarrow \left(\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right) = n \quad \text{l.q.q.d.}$

Ejemplos: $\left(\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) = 3, \quad \left(\begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right) = 6$

$$\textcircled{2} \quad \left(\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right) = 1$$

Demostración: $\left(\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right) = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1 \Rightarrow \left(\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right) = 1 \quad \text{l.q.q.d.}$

Ejemplos: $\left(\begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right) = 1, \quad \left(\begin{matrix} 7 \\ 7 \end{matrix} \right) = 1$

$$\textcircled{3} \quad \left(\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right) = 1$$

Demostración: $\left(\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right) = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \left(\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right) = 1 \quad \text{l.q.q.d.}$

Ejemplos: $\left(\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \right) = 1, \quad \left(\begin{matrix} 12 \\ 0 \end{matrix} \right) = 1$

- ④** Dos números combinatorios con igual numerador son iguales si la suma de sus denominadores es igual al numerador

Ejemplos:

$$\left(\begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right) \quad (\text{Tienen el mismo numerador 6, y } 2 + 4 = 6)$$

$$\left(\begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix} \right) \quad (\text{Tienen el mismo numerador 8, y } 3 + 5 = 8)$$

En General:

$$\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix} \right)$$

5. Si los números combinatorios son de las formas respectivamente, es decir, si tienen igual numerador y sus denominadores son consecutivos, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ejemplos.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \binom{6}{3} + \binom{6}{4} &= \binom{6+1}{4} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{6!}{(6-3)!3!} + \frac{6!}{(6-4)!4!} &= \binom{7}{4} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!4!} &= \frac{7!}{(7-4)!4!} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{2 \times 4 \times 5 \times 6}{2! \times 1 \times 2 \times 3} + \frac{4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 4!} &= \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{3! \times 4!} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 20 + 15 &= 35 \end{aligned}$$

Se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \binom{4}{2} + \binom{4}{3} &= \binom{4+1}{3} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{4!}{(4-2)!2!} + \frac{4!}{(4-3)!3!} &= \binom{5}{3} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!3!} &= \frac{5!}{2!3!} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2 \times 1} + \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 2!} \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 6 + 4 &= 10 \end{aligned}$$

Se cumple la igualdad

12.2.6 COMBINACIONES

Se llama combinación a las variaciones que pueden formarse con varios elementos de modo que dos cualesquiera de ellos difieran por lo menos en un elemento

Ejemplo. Sean los elementos a, b, c, d

Combinaciones de los 4 elementos tomados de 2 en 2 son:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

Formula para calcular el número de combinaciones de "n" elementos tomados "k" a la vez

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Donde $n \geq k \geq 0$

Ejemplo 1 De un grupo de 3 estudiantes, cuántos grupos diferentes de 2 alumnos podrían formarse

Resolución:

Sean A, B y C los 3 alumnos, los diferentes grupos de dos serían AB, AC y BC = 3 grupos

Por fórmula:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 1} = 3 \text{ grupos}$$

Ejemplo 2 ¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en un campeonato de fútbol en una rueda, en la que participan 6 equipos?

Resolución:

Este problema se trata de una combinación ya que el orden a jugar no interesa. Cada partido se juega de 2 en 2, luego el número de combinaciones sería

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 15 \text{ partidos}$$

Nota: Para una combinación el orden no interesa, por ejemplo, queremos sacar 3 puntos (que se muestran a continuación) a 6 estudiantes para luego empezar una investigación en los puntos.

El orden para empezar no importa, es decir, si queremos empezar por el último de ellos.

12.2.7 DIFERENCIA ENTRE COMBINACIONES Y VARIACIONES

Las combinaciones se diferencian por sus elementos y las variaciones por el orden de los mismos.

Ejemplo: Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, calcular las variaciones y las combinaciones de los elementos de "A" tomados de 3 en 3 a la vez.

Resolución:

COMBINACIONES	VARIACIONES
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cdb, cdb, dbc, dc b
Los combinaciones son diferentes solo si difieren por lo menos en un elemento	Si cambiamos el orden de los elementos se produce variación distinta al anterior



TALLER DE EJERCICIOS Nº 36

Ejercicio 1 - Calcule E

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$$

Resolución:

Rpta. $E = 56$

Ejercicio 2 - Calcule

$$M = \binom{8}{3} + 2 \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$$

Resolución:

Rpta. $M = 30$

Ejercicio 3 - Calcule

$$S = \frac{10! + \binom{5}{2} \cdot 9!}{8! \cdot \binom{5}{3} \cdot 9}$$

Resolución:

Rpta. $S = 2$

Ejercicio 4 - ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos se pueden formar a partir de un conjunto de 6 elementos?

Resolución:

Rpta. 15

Ejercicio 5 - Determine el valor de "x" de modo que la igualdad se cumpla

$$\binom{x}{1} + 2 \binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 20$$

Resolución:

Rpta. $x = 4$

Ejercicio 6 - ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un grupo de 4 personas entre un total de 3 hombres y 5 mujeres?

Resolución:

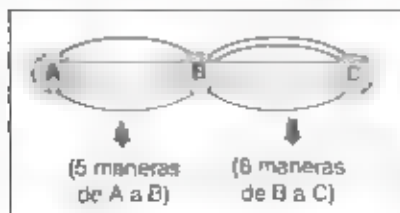
Rpta. 70

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DIFERENCIA ENTRE COMBINACIONES Y PERMUTACIONES

Problema 1 Para ir de una ciudad "A" a otra "B" existen 5 caminos diferentes y para ir de "B" a "C" existen 6 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras puedo ir de "A" a "C" y luego retornar sin pasar 2 veces por un mismo camino?

Resolución:

- Para su mejor entendimiento, construimos el siguiente gráfico



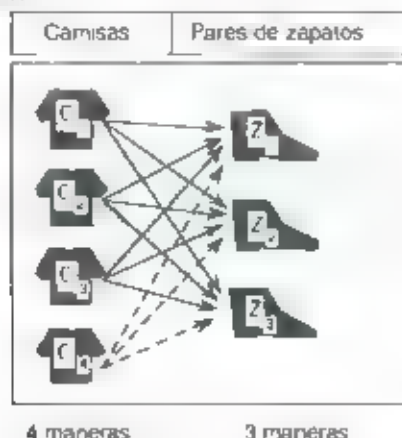
Luego:

$5 \times 6 = 30$ formas y al regresar 29 porque no puede regresar por el mismo camino; en total.

$$30 \times 29 = 870 \text{ maneras.} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 2 Manuel tiene 4 camisas y tres pares de zapatos. ¿De cuántas maneras distintas puede ponerse una camisa y un par de zapatos?

Resolución:



$$\# \text{ de maneras} = 4 \times 3 = 12$$

Por el principio de multiplicación.

$$\# \text{ de maneras} = 4 \times 3 = 12 \quad \text{Rpta.}$$

Problema 4 Nataly desea prepararse en una academia pre-universitaria. Puede hacerlo en una de las tres que funcionan cerca a su casa y en turnos de mañana o tarde. De cuántas maneras diferentes puede matricularse?

Resolución



Por el principio de multiplicación:

de maneras = $3 \times 2 = 6$ Rpta.

Problema 5 Determinar el valor que representa cada expresión siguiente

a) $V_4^7 =$

b) $V_3^9 =$

Resolución

Por definición de variación, obtenemos $V_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{3} = 840$

$V_3^9 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{6! \times 7 \times 8 \times 9}{6!} = 504$

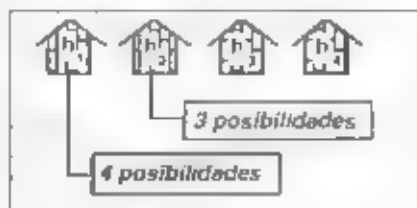
Problema 5 2 viajeros llegan a una ciudad en la que hay cuatro hoteles. ¿De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar en hoteles distintos?

Resolución

Sean los 4 hoteles, los que se muestran en la figura

Como son 2 viajeros, uno de ellos podrá ocupar cualquier de los 4 hoteles, existiendo para este viajero 4 posibilidades de ocuparlo, para el otro quedarán 3 hoteles existiendo para este 3 posibilidades de ocuparlo. Luego

de maneras = $4 \times 3 = 12$



* Aplicando la fórmula de variación, obtenemos

$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$

Donde: $\begin{cases} m = \# \text{ de hoteles} \\ n = \# \text{ de viajeros} \end{cases}$

Luego $V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{\cancel{4} \times 3 \times 4}{\cancel{2}} = 12$ Apts.

Problema 6: Un club de 12 miembros debe elegir su directiva formada por un presidente, un tesorero, un secretario y un vocal. ¿De cuántas maneras puede elegir el club su directiva?

Resolución.

Por definición de variación, obtenemos.

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde $\begin{cases} m = 12 \text{ miembros en total} \\ n = \text{se toman grupos de 4 miembros} \end{cases}$

Luego $V_4^{12} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{\cancel{8} \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{\cancel{8}} = 11880$ Apts.

Problema 7 Con los dígitos 2, 3, 5 y 8 se desean formar números de tres cifras, sin permitirse repeticiones. ¿Cuántos números se pueden formar?

Resolución.

Por definición de variación obtenemos

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde $\begin{cases} m = \# \text{ de elementos en total} = 4 \\ n = \text{grupos de 3} \end{cases}$

Luego $V_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1} = 24$ Apts.

Problema 8 ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 4 alumnos en 4 asientos unipersonales?

Resolución.

En este caso se trata de una permutación, porque participan todos los elementos. Veamos



Este asiento lo ocupa el alumno que falta = 1 manera

Este asiento lo puede ocupar cualquiera de los 2 restantes = 2 maneras

Este asiento lo puede ocupar cualquiera de los 3 restantes = 3 maneras

Este asiento lo puede ocupar cualquiera de los 4 alumnos = 4 maneras

de maneras = $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ Apts.

Por definición de permutación: $P_n = n!$. Donde $n = 4$ elementos
 Luego, $P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Problema 9 ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 4 alumnos en 4 asientos impersonales ubicados alrededor de una mesa?

Resolución.

En este caso se trata de una permutación donde un alumno se sienta en cualquier asiento y los tres restantes pueden ubicarse en los otros 3 asientos o sea

$$P_n = (n-1)! \quad \text{Donde } r = \# \text{ de elementos}$$

$$P_4 = (4-1)! = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \text{ maneras} \quad \text{Rpta.}$$

Generalizando si tenemos que ubicar n personas alrededor de una mesa circular el número de maneras distintas de hacerlo sería

$$P_n = (n-1)! \quad \text{Donde } n = \# \text{ de elementos}$$

A este tipo de permutaciones se le llama **Permutaciones Circulares**.

Problema 10 Calcular el número de triángulos que se pueden trazar por 7 puntos no colineales.

Resolución.

En este caso se trata de una combinación, ya que al unir los puntos para obtener los triángulos, el orden no interesa.

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!} \quad \text{Donde } \begin{cases} m = \# \text{ total de elementos (puntos)} \\ n = \text{Puntos que se toman para formar los triángulos siendo este en grupos de 3 en 3} \end{cases}$$

$$\text{Luego } \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! 3!} = \frac{7!}{4! 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

Se forman 35 triángulos Rpta.

Problema 11 Un entrenador de básquetbol tiene 9 jugadores para él, en igualdad de condiciones ¿De cuántas maneras puede elegir a sus jugadores para comenzar a jugar un partido?

Resolución.

Se sabe que un equipo de básquetbol está conformado por 5 jugadores. Donde $m = 9$ y $n = 5$

$$\left[\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \right]$$

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{(9-5)! \cdot 5!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{3! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{24 \times 5!} = \frac{6 \times 7 \times 9}{5}$$

$$\binom{9}{5} = 6 \times 7 \times 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\binom{9}{5} = 126} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 12. ¿De cuántas maneras puede escogerse un comité compuesto de 3 hombres y 2 mujeres de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres?

Resolución.

De los 7 hombres se pueden escoger 3 de $\binom{7}{3}$ maneras y

de las 5 mujeres se pueden escoger 2 de $\binom{5}{2}$ maneras.

Por consiguiente el comité puede escoger de: $\binom{7}{3} \times \binom{5}{2}$

$$\text{Luego: } \binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} \times \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!}$$

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \times \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{4! \times 3!} \times \frac{3! \times 4 \times 5}{3! \times 2!}$$

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = 35 \times 10 = 350 \quad \rightarrow \quad \boxed{\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = 350 \text{ maneras}} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 13: ¿Cuántas diagonales tiene un exágono?

Resolución.

$$\# \text{ Diagonales} = C_2^n - n \text{ siendo: } n = \# \text{ de lados del polígono.}$$

$$\text{Luego } \# \text{ Diagonales} = C_2^6 - 6 = \frac{6!}{4! \times 2!} - 6$$

$$= \frac{4! \times 5 \times 6}{4! \times 2} - 6 \Rightarrow \boxed{\# \text{ Diagonales} = 9} \quad \text{Rpta.}$$



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE
ANÁLISIS COMBINATORIO

NIVEL I

Problema 1 De una ciudad A a otra B hay 5 caminos diferentes y de la ciudad "B" a "C" hay 4 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje redondo de "A" a "C" pasando por "B"?

A) 20 B) 10 C) 12 D) 24 E) 15

Problema 2 Maria tiene 5 pantalones y 3 blusas. ¿De cuántas maneras distintas puede ponerse un pantalón y una blusa?

A) 8 B) 60 C) 15 D) 30 E) 12

Problema 3 Determinar el valor de "m" en la expresión: $V_2^m = 20$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Problema 4 ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una banca de seis asientos, 4 personas?

A) 120 B) 360 C) 24 D) 720 E) 180

Problema 5 Una persona posee 3 anillos distintos. ¿De cuántas maneras puede colocarlos en sus dedos de la mano derecha, colocando sólo un anillo por dedo, sin contar el pulgar?

A) 15 B) 12 C) 24 D) 18 E) 42

Problema 6 Una señora tiene 10 amigas de confianza. ¿De cuántas maneras puede invitar a 6 de ellas a cenar?

A) 120 B) 210 C) 720 D) 60 E) N.A.

Problema 7 Determinar el valor de "n" en la siguiente expresión $\left(\frac{n}{4} \right) = 15$

A) 5 B) 6 C) 8 D) 4 E) 3

Problema 8 Resolver $C_5^r + C_4^r = 28$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 8

Problema 9 ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 5 alumnos en 5 asientos unipersonales?

A) 60 B) 24 C) 120 D) 102 E) 42

Problema 10 ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 5 alumnos en 5 asientos unipersonales ubicados alrededor de una mesa?

A) 120 B) 24 C) 25 D) 48 E) 42

Problema 11 ¿Cuántos números mayores de 6 000 se podrán formar con las siguientes cifras 2, 5, 6, 3?

A) 24 B) 12 C) 20 D) 6 E) 8

Problema 12 ¿Calcular el número de cuadriláteros que se pueden trazar por 8 puntos no colineales?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) N.A.

Problema 13 ¿Cuántos números de 3 cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 sin que se repita uno de ellos en el número formado?

A) 24 B) 15 C) 30 D) 60 E) 120

Problema 14 Calcular $\left(\frac{n+1}{n} \right) + \left(\frac{n}{n-1} \right)$

A) n B) $\frac{n+1}{n-1}$ C) $\frac{n-1}{n+1}$
D) $\frac{n+1}{n}$ E) $\frac{n}{n+1}$

Problema 1 De un total de "x" personas se pueden formar 21 grupos de 5. Determinar el valor de "x".

- A) 4 B) 8 C) 5 D) 6 E) 7

NIVEL II

Problema 1 De cuántas maneras se puede viajar de "A" a "C" y regresar a "A" sin usar el mismo camino de la ida.

- A) 63 B) 72
C) 81 D) 90
E) 93



Problema 2 ¿Cuántas banderas tricolores diferentes de franjas horizontales se pueden confeccionar si se disponen 7 colores distintos?

- A) 35 B) 70 C) 140 D) 210 E) 220

Problema 3 ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 9 sin repetir?

- A) 15 012 B) 15 210 C) 15 120
D) 12 150 E) 12 510

Problema 4 ¿Cuántas "palabras" se pueden formar con las letras de la palabra LIBRO?

- A) 24 B) 120 C) 720 D) 60 E) 50

Problema 5 La primera división de la liga de fútbol de Huevo consta de 25 equipos. ¿Cuántos partidos deben jugarse para completar la primera rueda?

- A) 120 B) 150 C) 600 D) 300 E) 50

Problema 6 ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

- A) 30 B) 20 C) 40 D) 12 E) 18

Clave de Respuestas

1 D	2 C	3 C	4 B	5 C
6 B	7 B	8 C	9 C	10 B
11 D	12 B	13 D	14 D	15 E

Problema 1 El número combinatorio $\binom{p+q}{p}$ es equivalente a

I. $\binom{p+q}{q}$ II. $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ III. $\binom{p+q}{p-q}$

A) Solo I B) I y II C) II y III D) Sólo II E) I y II

Problema 2 De un grupo de 4 biólogos, 3 químicos y 5 matemáticos, se tiene que escoger un comité de 7, de modo que se incluyan 2 biólogos, 2 químicos y 3 matemáticos. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

- A) 360 B) 120 C) 180 D) 240 E) 210

Problema 3 Señale el producto de las raíces positivas de la ecuación

A) 3! B) 11! C) $\binom{x}{10} = 0$
D) 8! E) 9!
E) 10!

Problema 4 Hallar el equivalente de

$$C = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n-1}$$

- A) $4n^2$ B) $n^2 + 3n$ C) n^2
D) $(n+3)!$ E) $n(n-3)$

Problema 5 Si $\binom{n}{n+1} + \binom{n-1}{n-2} = 99$

Calcular el valor de "n".

A) 33 B) 50 C) 98 D) 100 E) 101

Problema 1 ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 6 personas en un auto si solo una de ellas sabe manejar?

A) 5 B) 6 C) 30 D) 60 E) 120

Problema 2 ¿De cuántas maneras se puede escoger un "menu" (1 entrada, plato de fon-

do, postre) si se dispone de 3 entradas, 3 platos de fondo y 5 postres?

A) 45 B) 15 C) 11 D) 14 E) 125

Clave de Respuestas

1. B	2. D	3. C	4. B	5. D
6. B	7. B	6. C	9. D	10. B
11. D	12. E	13. A		

11.3 BINOMIO DE NEWTON

11.3.1 POTENCIA DE UN BINOMIO

Veamos como varía $(x + a)$ al ser elevado a un exponente

$$(x + a)^1 = x + a = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xa + \binom{2}{2}a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2a + \binom{3}{2}xa^2 + \binom{3}{3}a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3a + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}xa^3 + \binom{4}{4}a^4$$

En General: $(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \dots + \binom{n}{n}a^n$

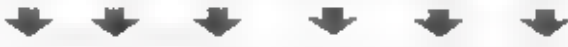
Nota: Esta fórmula solo se cumple para "n" números naturales

Ejemplo 1. Hallar el desarrollo de $(x + a)^5$

Resolución.

Aplicando la fórmula general del binomio de Newton, obtenemos

$$(x + a)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4a + \binom{5}{2}x^3a^2 + \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}xa^4 + \binom{5}{5}a^5$$



1 5 10 10 5 1

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Recomendaciones.

Para desarrollar $(x + a)^n$ se puede tener en cuenta lo siguiente:


1. El desarrollo es un polinomio homogéneo de grado n .
2. El número de términos del desarrollo es $(n + 1)$.
3. Los exponentes de la letra "x" van aumentando de uno en uno a partir de valor de n hasta cero inclusive.
4. Los exponentes de la letra "a" van aumentando de uno en uno a partir de cero hasta el valor de "n" inclusive.
5. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales en valor absoluto.
6. El coeficiente de un término cualquiera se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de "x" en dicho término y dividiendo el resultado en x e a aumentando en la unidad.
7. El coeficiente del primer término del desarrollo es la unidad y el del segundo término es directamente el exponente del binomio.
8. Cuando se desarrolla en el siguiente caso: $(x - a)^n$ se deberá tener en cuenta que los signos de los términos del desarrollo van alternadamente positivos y negativos.

Ejemplo 2. Hallar el desarrollo de $(x + a)^6$

Resolución

Aplicando la fórmula general del binomio de Newton, obtenemos

$$(x + a)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5a + \binom{6}{2}x^4a^2 + \binom{6}{3}x^3a^3 + \binom{6}{4}x^2a^4 + \binom{6}{5}xa^5 + \binom{6}{6}a^6$$



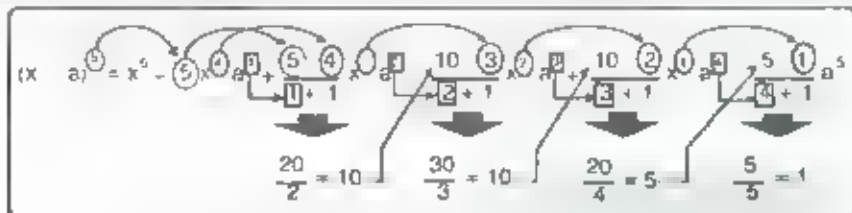
1 6 15 20 15 6 1

$$(x + a)^6 = 1x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + 1a^6$$

Ejemplo 3. Hallar el desarrollo de $(x - a)^6$

Resolución.

En este caso los signos son alternados positivos y negativos, además aplicando las recomendaciones 6 y 7, veamos

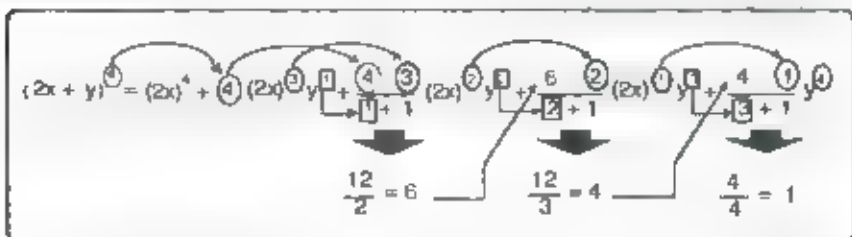


$$(x-a)^5 = x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5$$

$$(x-a)^5 = x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5$$

Ejemplo 4 c: Hallar el desarrollo de $(2x+y)^4$

Resolución.



$$(2x+y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3y + 6(2x)^2y^2 + 4(2x)y^3 + y^4$$

$$(2x+y)^4 = 16x^4 + 4(8x^3)y + 6(4x^2)y^2 + 8xy^3 + y^4$$

$$(2x+y)^4 = 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$$

12.3.2 TRIÁNGULO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

Si distribuimos en línea los coeficientes del desarrollo del binomio para sus potencias consecutivas, toma la forma geométrica de un triángulo de Pascal o de Tartaglia en honor a sus descubridores, veamos

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = 1 \ 1$$

$$(x+a)^2 = 1 \ 2 \ 1$$

$$(x+a)^3 = 1 \ 3 \ 3 \ 1$$

$$(x+a)^4 = 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

$$(x+a)^5 = 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1$$

$$(x+a)^6 = 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1$$



En donde un coeficiente cualquiera es igual a la suma de los dos que están encima de él en la fila anterior

Ejemplo Hallar el desarrollo de $(x + a)^5$ En consecuencia

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & &
 \end{array}
 \quad (x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Nota El triángulo de Pascal sólo se aplicará para potencias pequeñas; caso contrario habrá que emplear la fórmula general

12.3.3 FÓRMULA PARA CALCULAR UN TÉRMINO CUALQUIERA DEL DESARROLLO DE UN BINOMIO A UN EXPONENTE DADO $(x + a)^n$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

Donde:

- " $(k+1)$ " es el lugar del término pedido
- " n " es el exponente del binomio
- " x " es el primer término de binomio
- " a " es el segundo término del binomio

* Para el binomio $(x - a)^n$ usaremos

$$T_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

Ejemplo 1 Calcular el quinto término del desarrollo de $(x^2 + 2y)^7$

Resolución

Sabemos que $n = 7$ (exponente del binomio)

$(k+1) = 5$ (lugar del término pedido)

$$k = 5 - 1 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

Los valores hallados los reemplazamos en la fórmula

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \Rightarrow T_5 = \binom{7}{4} (x^2)^{7-4} (2y)^4$$

$$T_5 = \frac{7!}{(7-4)! 4!} (x^2)^3 (16y^4)$$

$$T_5 = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{4 \cdot 4!} x^6 (16y^4)$$

$$\Delta \boxed{T_5 = 560 x^6 y^4}$$

Ejemplo 2 Calcular el cuarto término del desarrollo de $(3x^2 - 2y)^6$

Resolución

Sabemos que:

$$\begin{cases} n = 6 \\ (k+1) = 4 \rightarrow k = 3 \end{cases}$$

Los valores hallados, los reemplazamos en la fórmula:

$$T_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \rightarrow T_4 = (-1)^3 \binom{6}{3} (3x^2)^{6-3} (2y)^3$$

$$T_4 = -1 \times \frac{6!}{(6-3)! 3!} (3x^2)^3 (8y^3)$$

$$T_4 = -1 \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{3! \times 1 \times 2 \times 3} (27x^6) (8y^3)$$

$$T_4 = -20 (216x^6 y^3)$$

$$T_4 = -4320 x^6 y^3$$

12.3.4 CÁLCULO DEL TÉRMINO CENTRAL DEL DESARROLLO DE $(x+a)^n$ EN DONDE: $n = \text{NÚMERO PAR}$

En este caso se aplicará la fórmula: $K = \frac{n}{2}$

Ejemplo 1 Calcular el término central de $(x+a)^6$

Resolución

Sabemos que: $n = 6$ (exponente del binomio)

De la fórmula: $K = \frac{n}{2} \rightarrow K = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow k = 2$

Luego, aplicamos la fórmula: $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$

$$T_{2+1} = \binom{6}{2} x^{6-2} a^2$$

$$T_3 = \frac{6!}{(4-2)! 2!} x^2 a^2 \rightarrow T_3 = \frac{2 \times 3 \times 4}{2! \times 2} x^2 a^2 \quad T_3 = 6x^2 a^2$$

Ejemplo 2 Calcular el término central de $(x+a)^8$

Resolución

Sabemos que $n = 8$

De la fórmula, $k = \frac{n}{2} \rightarrow k = \frac{8}{2} \rightarrow [k = 4]$

Luego: aplicamos la fórmula $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$

$$T_{4+1} = \binom{8}{4} x^{8-4} a^4$$

$$T_5 = \frac{8!}{4!4!} x^4 a^4 = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{4! \times 24} x^4 a^4$$

$$T_5 = 70x^4a^4$$



TALLER DE EJERCICIOS N° 37

Ejercicio 1 Hallar el desarrollo de

$$(2x + 3y)^5$$

Resolución.

Ejercicio 3 Calcular el tercer término del desarrollo de $(2x + 3)^5$

Resolución:

Apta. $720 x^3$

Ejercicio 2 Hallar el desarrollo de

$$(x + \sqrt{3})^6$$

Resolución.

Ejercicio 4 Calcular el séptimo término del

desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$

Resolución.

Apta. $84/x^3$

Ejercicio 5 Calcular el término central del desarrollo de $(a + 2b)^9$

Resolución.

Rpta. $1\ 120a^5b^4$

Ejercicio 7 Hallar el término que contiene a x^8 en el desarrollo de $(x + y)^{13}$

Resolución.

Rpta. $1\ 287x^8y^5$

Ejercicio 6 : Calcular el término central del

desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{20}$

Resolución.

Rpta. $252/x^5$

Ejercicio 8 . Halla el valor de "x" de tal manera que la suma del 3ro. y 5to. término en el desarrollo de $(x + 1)^4$ sea igual a 25.

Resolución.

Rpta. $x = \pm 2$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE EL TEMA DE LA UNIDAD 1

NIVEL I

Ejercicio 1 Obtienga los siguientes desarrollos

- a) $(x - 2y)^5$ b) $(1 + 3a)^7$ c) $(1 - b)^{11}$
 d) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ e) $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^4$ f) $\left(\frac{3}{x^4} - \frac{x^3}{4}\right)^8$

Ejercicio 2 Determine el término indicado en el desarrollo correspondiente:

- a) 7º término en $(x - y)^{11}$
 b) 5º término en $(a + b)^{21}$
 c) 10º término en: $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{16}$
 d) 6º término en: $\left(x^2y - \frac{2}{xy^2}\right)^7$
 e) 11º término en $(2a - b)^{10}$
 f) 2º término en: $\left(1 - \frac{1}{xyz}\right)^4$

Ejercicio 3 Determine el coeficiente numérico del término indicado.

- a) 2º término en $(2x - y)^4$
 b) 3º término en $(3a + 4b)^6$
 c) 8º término en: $(x^2/y - y^2/x)^{10}$
 d) 5º término en: $(a + 12)^5$

- e) 8º término en $(p^2v^3 - 1)^{14}$
 f) término central $(2x^2y + xy^2)^8$

Ejercicio 4 En el desarrollo de $(3x^2 - 1/x)^8$ determine

- a) El coeficiente numérico del cuarto término.
 b) El término que contiene x^4
 c) El término independiente de x

Ejercicio 5 En el desarrollo de

$$\left(\frac{2}{x^2y} - 3xy^3\right)^{12}, \text{ determine}$$

- a) El término que contiene x^{-3}
 b) El término que contiene y^{12}
 c) El término independiente de x
 d) El término independiente de y

Ejercicio 6 Determine el término que contiene q^9 en los siguientes desarrollos:

- a) $(2p + q)^{11}$ b) $\left(q - \frac{1}{pq}\right)^{10}$
 c) $(p^2 - q^2)^7$ d) $\left(3q^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{q}\right)^3$

Ejercicio 7 Encuentre los 3 primeros términos en el desarrollo de

$$\left(\sqrt{2}x + \sqrt{3}\right)^{10}$$

Ejercicio 8 Calcule el producto de los coeficientes numéricos del primero y del último término del desarrollo ordenado de $(1 + 3x^2)^6$

Clave de Respuestas

1. a) $x^5 - 10x^3y + 40x^2y^2 - 80xy^3 + 32y^5$
 b) $1 + 21a + 189a^2 + 945a^3 + 2835a^4 + 5103a^5 + 5103a^6 + 2187a^7$

- c) $1 \ 11b + 55b^2 \ 165b^3 + 330b^4 \ 462b^5 + 462b^6 \ 330b^7 + 165b^8 \ 55b^9 + 11b^{10} \ b^{11}$
 d) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + 15/x^2 - 6/x^4 + 1/x^6$
 e) $1/z^3 + 4/z^4 + 6 + 4z^4 + z^6$

f)
$$\frac{729}{x^{24}} - \frac{729}{2x^{17}} + \frac{1 \ 215}{16x^{10}} - \frac{135}{16x^3} + \frac{135}{256}x^4 - \frac{9}{512}x^{11} + \frac{x^{18}}{4 \ 096}$$

2. a) $T_7 = 462x^3y^6$ b) $T_5 = 5 \ 985a^{-7}b^4$ c) $T_{10} = 10/ab^9$
 d) $T_8 = 128/x^3y^{14}$ e) $T_1 = b^0$ f) $T_2 = -4/xyz$
3. a) 32 b) 19 440 c) 45 d) $5 \ 12^4$ e) 3432 f) 1 120
4. a) 90 b) $T_3 = 270x^4$ c) No existe
5. a) $T_6 = \binom{12}{7} 3^7 2^5 x^{-3} y^{16}$ b) $T_7 = \binom{12}{6} 2^5 3^5 x^6 y^2$
 c) $T_8 = \binom{12}{8} 2^4 3^5 y^{10}$ d) $T_4 = \binom{12}{3} 2^9 3^3 x^{15}$
6. a) $T_{10} = 220p^2q^6$ b) No hay c) $T_4 = \binom{7}{3} p^6 q^3$ d) $T_2 = 27q^8$
7. $32x^{10} + 160\sqrt[3]{6}x^9 + 2 \ 160x^8$ 8. 729

NIVEL II

Ejercicio 1 El último término en el desarrollo de $(x - 3y)^5$ es

- A) $-15y^5$ B) $15y^5$ C) $243y^5$
 D) $-243y^5$ E) $243xy^5$

Ejercicio 2 El coeficiente numérico del 8º término del desarrollo de $(2 - x)^{11}$ es

- A) 330 B) 330 C) 5 280
 D) -5 280 E) Otro valor

Ejercicio 3 El coeficiente numérico del 2º término en el desarrollo de $(2a + b)^5$ es.

- A) 16 B) 32 C) 80 D) 10 E) 50

Ejercicio 4 El término central en el desarrollo de $\left(3x - \frac{y}{2}\right)^7$ es

- A) $\frac{2 \ 835}{8} x^4 y^3$ B) $\frac{2 \ 835}{8} x^4 y^3$ C) $\frac{945}{16} x^3 y^4$
 D) $\frac{945}{16} x^3 y^4$ E) No hay término central

Ejercicio 5 El término central en el desarrollo de $\sqrt{2x - y}^6$ es.

- A) $-60x^2y^4$ B) $60x^2y^4$ C) $150x^3y^3$
 D) $160x^3y^3$ E) No hay término central

Ejercicio 6 El término independiente de x^2

en el desarrollo de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ es:

- A) 2º término B) 3º término
C) 4º término D) último término
E) No hay término independiente de "x"

Ejercicio 15 Halla el valor de "x" de la manera que el cociente del 3º y 5º término en el desarrollo de $(2x - 1)^5$ sea igual a 72

- A) $x = \pm 2$ B) $x = +4$ C) $x = +3$
D) $x = +5$ E) $x = +6$

Ejercicio 16 Qué valor debe tener "n" para que el cuarto término del desarrollo de

$\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^n$ sea el término independiente citar el coeficiente del término que sigue al término de grado cero.

- A) 25/4 B) 15/2 C) 15/4 D) 24/5 E) 25/2

Ejercicio 17 Hallar el término anterior al independiente de "x" en el desarrollo del siguiente binomio de Newton

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^3$$



EXERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1 Calcular el 6º término en el desarrollo de $(a + 2b)^{11}$

- A) 14 784a⁵b⁶ B) 14 784a⁴b⁵ C) 14 874a⁶b⁵ D) 14 478a⁶b⁶ E) N.A

Resolución.

Sabemos que $n = 11$. (Exponente del binomio)

- A) $\frac{715}{16}x^{13/16}$ B) $\frac{453}{15}x^{45/13}$ C) $720x^{1/2}$
D) $760x^{1/4}$ E) $485x^3$

Ejercicio 18 Qué lugar ocupa el término del desarrollo binomial de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{120}$ que es de grado 100

- A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

Ejercicio 19 El término independiente de "x" en el desarrollo de $\left(0,4x^2 + \frac{0,5}{x}\right)^9$ es

- A) 0,01 B) 0,001 C) 0,084 D) 0,0084 E) 0,018

Ejercicio 20 Hallase la relación entre "K" y "n" de modo que los coeficientes de los $(K + 2)$ ésimo y $(2K - 3)$ ésimo términos de: $(1 + x)^{2n}$ puedan ser iguales

- A) $K = n + 1$ B) $K = 2n + 3$ C) $3K = 3n + 2$
D) $K = n - 1$ E) $3K = 3n - 2$

Clave de Respuestas

1 D	2 D	3 C	4 E
5 D	6 E	7 C	8 C
9 A	10 E	11 C	12 A

$$(K+1) = 6 \quad \text{. (Lugar del término pedido)}$$

$$K = 5$$

Luego, los valores hallados, los reemplazamos en la fórmula

$$T_{K+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \Rightarrow T_6 = \binom{11}{5} (a)^{11-5} (2b)^5$$

$$T_6 = \frac{11!}{6! \times 5!} a^6 (32b^5)$$

$$T_6 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6! \times 120} a^6 (32b^5)$$

$$T_6 = 14\,784 a^6 b^5 \quad \text{Apta. B}$$

Ejercicio 2:Cuál es el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(x^2 + x^3)^5$

A) 12

B) 18

C) 15

D) 21

E) 24

Resolución.

Sabemos que $n = 5$. (Exponente del binomio)
 $(K+1) = 7$. (Lugar del término pedido)

Luego, aplicamos la fórmula $T_{K+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \Rightarrow T_{K+1} = \binom{5}{K} (x^2)^{5-K} (x^3)^K$

$$T_{K+1} = \binom{5}{K} x^{12-2K} x^{3K}$$

$$T_{K+1} = \binom{5}{K} x^{K+12} \quad \text{queremos}$$

el coeficiente de x^{14} es decir, debemos igualar exponentes

$$x^{K+12} = x^{14} \Rightarrow K+12 = 14 \Rightarrow K = 2$$

• Ahora, hallamos el coeficiente de x^{14} , esea

$$\binom{5}{K} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{4! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2} = 15 \quad \text{Apta. C}$$

Ejercicio 3: Determinar el exponente de x^* en el 8º término del desarrollo de $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$

A) 5

B) 6

C) 8

D) 5

E) 7

Resolución.

Sabemos que $n = 10$... (Exponente del binomio)
 $K + 1 = 8$... (Lugar del término pedido)
 $K = 7$

Luego los valores, hallamos los reemplazamos en la fórmula

$$T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} a^K \Rightarrow T_8 = \binom{10}{7} (x^3)^{10-7} \left(\frac{1}{x^2}\right)^7$$

$$T_8 = \binom{10}{7} x^9 \cdot x^{-4}$$

$$T_8 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} x^5 \Rightarrow T_8 = 120x^5$$

El exponente de "x" en el 8º término es 5 **Rpta. D**

Ejercicio 4 Determinar el término independiente de "x" en el desarrollo de $\left(\frac{1}{x^2} - x^4\right)^6$

A) 8

B) 10

C) 15

D) -10

E) 14

Resolución.

Sabemos que $n = 6$... (Exponente del binomio)
 $K + 1 = ?$... (Lugar del término pedido)

Luego, aplicamos la fórmula $T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} a^K \Rightarrow T_{K+1} = \binom{6}{K} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-K} (-x^4)^K$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} (x^{-2})^{6-K} (-1)^K (x^4)^K$$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} x^{2K-12} (-1)^K (x^{4K})$$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} x^{6K-12} (-1)^K (1)$$

para que el término sea independiente de "x" es necesario que el exponente de "x" sea igual a 0

A) $\left(\frac{x}{y}\right)^5$ B) $\left(\frac{x}{y}\right)^4$ C) $\left(\frac{x}{y}\right)^{5/2}$ D) $\left(\frac{x}{y}\right)^{7/6}$ E) x/y

Resolución.

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente

$$\left(\sqrt[5]{\frac{x}{y}} + \sqrt[5]{\frac{y}{x}}\right)^{11}, \text{ luego, los términos centrales son.}$$

$$i) T_6 = \binom{11}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)^{11-5} \left(\frac{\sqrt[5]{y}}{x}\right)^5 = \binom{11}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)^6 \left(\frac{\sqrt[5]{y}}{x}\right)^5 \quad (I)$$

$$ii) T_7 = \binom{11}{6} \left(\frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)^{11-6} \left(\frac{\sqrt[5]{y}}{x}\right)^6 = \binom{11}{6} \left(\frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)^5 \left(\frac{\sqrt[5]{y}}{x}\right)^6 \quad (II)$$

- Calculamos el cociente de los términos centrales

$$\frac{T_6}{T_7} = \frac{\cancel{\binom{11}{5}} \left(\frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)^6 \left(\frac{\sqrt[5]{y}}{x}\right)^5}{\cancel{\binom{11}{6}} \left(\frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)^5 \left(\frac{\sqrt[5]{y}}{x}\right)^6} = \frac{\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{y}\right)}{\left(\frac{\sqrt[5]{y}}{x}\right)} = x \sqrt[5]{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{T_6}{T_7} = \frac{\sqrt[5]{x^7}}{\sqrt[5]{y^7}} = \sqrt[5]{(x/y)^7} \Rightarrow \frac{T_6}{T_7} = \left(\frac{x}{y}\right)^{7/6} \quad \text{Rpta. D}$$

Recuerda que:

$\binom{11}{6}$ es igual a

$\binom{11}{5}$ ¿Por qué?

12.4 DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO Y/O FRACCIONARIO

FINALIDAD: En el estudio, del desarrollo del binomio de Newton para exponente negativo y/o fraccionario, se utiliza el concepto de coeficiente binómico, que a diferencia del "numero de combinaciones" el valor del índice superior puede tomar valores negativos y/o fraccionarios, mientras que el índice inferior siempre será positivo y entero.

Su representación y su valor es

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad \text{o} \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k}$$

Ejemplos ilustrativos. Hallar

¡ATENCIÓN!

Si $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$

"m" índice superior
"k" índice inferior
Además $m \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$a) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{(5)(4)(3)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$b) \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{(-6)(-5)(-4)(-3)}{4!} = \frac{(-6)(-7)(-8)(-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

$$c) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{\left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) \left(\frac{1}{3} - 4 \right)}{5!} = \frac{\left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{5}{3} \right) \left(\frac{8}{3} \right) \left(\frac{11}{3} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{22}{729}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) \left(\frac{1}{2} - 4 \right)}{5!} = \frac{\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{7}{2} \right) \left(\frac{9}{2} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{63}{256}$$

12.5 BINOMIO DE NEWTON PARA EXPONENTE FRACCIONARIO Y/O NEGATIVO.

Hemos visto, que en la fórmula del binomio ($n \in \mathbb{Z}^+$)

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \dots + \binom{n}{n} a^n$$

Se observa, "cuando 'n' es un número entero y positivo, tiene un número limitado de términos es decir '(n + 1)' términos;

Ahora, Generalizando para 'n' igual a un número fraccionario y/o negativo ($n \in \mathbb{Q}$)

$$(x+a)^n = x^n + \binom{-n}{1} x^{n-1} a + \binom{-n}{2} x^{n-2} a^2 + \binom{-n}{3} x^{n-3} a^3 + \dots \text{en Términos}$$

Es una serie que tiene un número limitado de términos es decir infinitos términos, válida para todo valor de $x > a$.

Ejemplo Ilustrativo (1): Hallar los cuatro primeros términos del desarrollo de $(1+x)^{-2} = ?$

Resolución.

$$(1+x)^{-2} = 1^{-2} + \binom{2}{1} 1^{-2-1} x + \binom{2}{2} 1^{-2-2} x^2 + \binom{2}{3} 1^{-2-3} x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{2!} 1^2 x^2 + \frac{2(-3)(-4)}{3!} 1^3 x^3 + \dots \\
 1 - 2x + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\
 (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \\
 (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Ejemplo Ilustrativo (2) Hallar los cinco primeros términos del desarrollo de $(1+x)^{1/5}$

Resolución.

$$(1+x)^{1/5} = 1^{1/5} + \binom{1/5}{1} 1^{1/5-1} x + \binom{1/5}{2} 1^{1/5-2} x^2 + \binom{1/5}{3} 1^{1/5-3} x^3 + \binom{1/5}{4} 1^{1/5-4} x^4 + \dots$$

Desarrollando cada coeficiente, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{1}{5} x + \frac{\binom{1}{5} \binom{4}{5}}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\binom{1}{5} \binom{4}{5} \binom{3}{5}}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{\binom{1}{5} \binom{4}{5} \binom{3}{5} \binom{2}{5}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots \\
 (1+x)^{1/5} &= 1 + \frac{1}{5} x - \frac{2}{25} x^2 + \frac{6}{125} x^3 - \frac{21}{625} x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Ejemplo Ilustrativo (3) Hallar los cuatro primeros términos del desarrollo de $(1-x)^{1/3}$

Resolución.

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{1/3} &= [1+(-x)]^{1/3} \\
 &= 1^{1/3} + \binom{1/3}{1} 1^{1/3-1} (-x) + \binom{1/3}{2} 1^{1/3-2} (-x)^2 + \binom{1/3}{3} 1^{1/3-3} (-x)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Desarrollando cada coeficiente, obtenemos

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \binom{1}{3} (-x) + \frac{\binom{1}{3} \binom{4}{3}}{1 \cdot 2} (-x)^2 + \frac{\binom{1}{3} \binom{4}{3} \binom{7}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-x)^3 + \dots \\
 (1-x)^{1/3} &= 1 - \frac{1}{3} x + \frac{2}{9} x^2 - \frac{14}{81} x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

12.5.1 PROPIEDADES DEL DESARROLLO DEL BINOMIO

1. Al obtener los términos del desarrollo se observa que es una serie infinita, denominada serie binómica o serie de Newton.
2. Para determinar el desarrollo de $(x + a)^n$ para un número fraccionario y/o negativo el valor de "n" debe ser uno y además $x > a$. Los valores de "a" deben ser $0 < a < 1$.

$$\text{Si } (1+a)^{1/n}, \quad 0 < a < 1$$

3. Los términos del desarrollo con respecto a sus signos, no tienen ninguna relación.
4. Para determinar el término general en el desarrollo se utiliza la siguiente fórmula. Sea el binomio $(x + a)^n$ donde "n" es un número fraccionario y/o negativo.

Donde:

T_{k+1} Es el término de lugar "K + 1"

n Es el exponente fraccionario y/o negativo del binomio

K + 1 Es el lugar del término pedido

x Es el primer término

a Es el segundo término

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

Ejemplo Ilustrativo: Hallar el séptimo término del desarrollo de: $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)^3 \quad x \neq 1 \quad 0$

Resolución:

- Para determinar un término "K + 1" se utiliza la siguiente fórmula:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \Rightarrow T_7 = \binom{3}{6} (\sqrt[3]{x})^{3-6} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)^6$$

$$T_7 = \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)}{6!} (\sqrt[3]{x})^{-3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^4})^6}$$

$$T_7 = \frac{\cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8}}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6}} \sqrt[3]{x}^{-3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^{24}}} = 28 \frac{x^{-3}}{x^8}$$

$$T_7 = \frac{28}{x^7} \quad \text{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS N° 38

Ejercicio 1 Hallar

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Ejercicio 3 Hallar los tres primeros términos del desarrollo de $(1+x)^3$

Resolución:

Rpta. -84

Rpta. $1 - 3x + 6x^2$

Ejercicio 2 Hallar $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Resolución:

Ejercicio 4 Hallar los tres primeros términos del desarrollo de $(1+x)^{1/2}$

Resolución:

Rpta. 25/243

Rpta. $1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + \dots$



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO Y/O FRACCIONARIO

Ejercicio 1 Indicar el quinto término en el desarrollo de $(1 - 2x)^{1/5}$

- A) $\frac{226}{625}x^4$ B) $\frac{137}{125}x^4$ C) $-\frac{336}{625}x^4$
D) $16x^4$ E) $\frac{336}{25}x^4$

Ejercicio 2 Hallar el cuarto término del desarrollo de $\left(\frac{1}{4} + x^{1/3}\right)^{1/2}$

- A) $1/2x^{4/3}$ B) $2x$ C) $12x$ D) $6/5x^{2/3}$ E) $2x^2$

Ejercicio 3 Calcule $E = \binom{-3}{33}$

- A) 195 B) -195 C) 595 D) -595 E) 0

Ejercicio 4 Hallar el equivalente de

$$E = \binom{15}{3} + \binom{15}{4} + \binom{15}{5}$$

- A) 9 248 B) 5 298 C) 2 948
D) 4 928 E) 8 924

Ejercicio 5 Hallar el tercer término de $(x^2 - 3)^{1/2}$, para: $x = 3$

- A) $(-42)^{1/2}$ B) 9 C) $-1/9$
D) 32 E) $(-24)^{1/2}$

Ejercicio 6 Hallar el término independiente en $\left(\frac{1}{2}x^{-3} - \sqrt{x}^{-4}\right)^{-2}$

- A) 230 B) 320 C) 510
D) 245 E) -340

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. D
4. A	5. E	6. B



LA DISTANCIA A UNA ESTRELLA

Entonces ahora en condiciones de solucionar el problema planteado

Conocidos los ángulos A y A' (y por lo tanto el 1) y el valor de TT' , podemos usar el teorema del seno para calcular la distancia ET

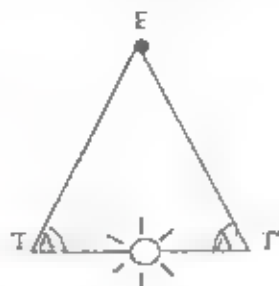
$$\frac{ET}{\sin A} = \frac{TT'}{\sin E}$$

y de aquí $ET = \frac{TT'}{\sin E} \sin A$

Cuando se empezó a poner en práctica este método, hace dos siglos, no se podía detectar alguna diferencia entre los ángulos A y A' los dos eran prácticamente de 90° , como si las estrellas estuviesen a una distancia infinita. Esto se debía a que las distancias a las estrellas son mucho más grandes que el diámetro de la órbita terrestre y, por esto, los ángulos A y A' difieren de 90° en una fracción de segundo.

En astronomía existen otros métodos indirectos para determinar las distancias de estrellas muy lejanas.

La estrella más cercana, Próxima Centauri, se encuentra a una distancia de 135,000 veces el diámetro TT'



Capítulo

13

LOGARITMOS

13.1 LOGARITMO DE UN NÚMERO

A partir de la expresión $b^n = p$ podemos plantear distintas ecuaciones, dependiendo de cuál de sus tres elementos es el desconocido.

$$b^n = p$$

Se desconoce el valor de la **potencia (p)**

Si $p = x$, entonces se tiene la ecuación $x = b^n$. Esto implica el cálculo del valor de una potencia, operación que se denomina **potenciación**.

El valor de "x" es la **enésima potencia de b**

$$x = b^n$$

Ejemplo: $x = 5^2 = 25$

ATENCIÓN

La operación potencia, *cuán* no es *comutativa*, porque en General

$$b^n \neq p^b$$

Se desconoce la base (b) de la potencia

Si $b = x$, entonces se tiene la ecuación $x^n = p$

Esto implica el cálculo de una raíz enésima, operación que se denomina **radicación**.

El valor de "x" es la raíz enésima de p.

$$x^n = p \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{p}$$

Ejemplo

$$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Se desconoce el valor del **Exponente (n)** de la potencia

Si $n = x$, entonces se tiene la Ecuación Exponencial $b^x = p$. Esto implica calcular el exponente de una potencia conociendo su base y su valor, operación que se denomina **Logaritimación**.

Este exponente x es el **Logaritmo de "p" en base "b"**, lo que en símbolos se representa: $\log_b p$

$$x = \log_b p \Rightarrow b^x = p$$

Ejemplo: $x = \log_2 16 \Rightarrow 2^x = 16$
 $2^x = 2^4$

$$x = 4$$

- Por lo tanto, afirmamos que

El logaritmo es el exponente de una potencia

DEFINICIÓN:

Se llama logaritmo en base b de un número p a otro número x , tal que, b elevado a x sea igual a p

Ejemplos:

$$a) \log_2 8 = 3, \text{ pues } 2^3 = 8$$

$$b) \log_3 81 = 4, \text{ pues } 3^4 = 81$$

$$c) \log_3 \frac{1}{9} = -2, \text{ pues } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$d) \log_5 5 = 1, \text{ pues } 5^1 = 5$$

$$e) \log_{-2} (-8) = 3, \text{ pues } (-2)^3 = -8$$

$$f) \log_{-2} 4 = 2, \text{ pues } (-2)^2 = 4$$

CASOS PARTICULARES:

1. El logaritmo de la base es 1

$$\log_b b = 1 \text{ pues } b^1 = b$$

2. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero

$$\log_b 1 = 0 \text{ pues } b^0 = 1$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 39

Ejercicio 1 Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $\log_2 64 =$ b) $\log_2 1/4 =$

c) $\log_3 125 =$ d) $\log_{1/2} 4 =$

Resolución:

Ejercicio 3 Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $\log_2 (-32) =$ b) $\log_8 8 =$

c) $\log_3 25 =$ d) $\log_4 2 =$

Resolución:

Ejercicio 2 Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $\log_3 1/9 =$ b) $\log_3 81 =$

c) $\log_3 1 =$ d) $\log_{1/2} (-1/2) =$

Resolución:

Ejercicio 4 Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $\log_{16} 8 =$ b) $\log_{0.7} 0.49 =$

c) $\log_{4/3} 9/16 =$ d) $\log_{64} 16 =$

Resolución:

- Calculamos "x" en cada una de las siguientes expresiones

a) $\text{Log}_2 64 = x$

Resolución:

Por definición de logaritmo

$$\begin{array}{l} 2^x = 64 \\ \quad \downarrow \\ 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6 \end{array}$$

b) $\text{Log}_x 243 = 5$

Resolución:

Por Definición de logaritmo

$$\begin{array}{l} x^5 = 243 \\ \quad \downarrow \\ x^5 = 3^5 \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

- En la expresión $b^x = p \iff x = \text{Log}_b p$, el número p recibe el nombre de **antilogaritmo**.

Ejemplos: Encontramos el antilogaritmo p en cada uno de los siguientes casos

a) $\text{Log}_3 p = 5$

Resolución:

- Por definición de logaritmo

$$\begin{array}{l} 3^5 = p \\ 243 = p \end{array}$$

b) $\text{Log}_{25} p = 3/2$

Resolución:

- Por definición de logaritmo

$$\begin{array}{l} 25^{3/2} = p \\ (5^2)^{3/2} = p \Rightarrow 125 = p \end{array}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 40

Ejercicio 1 Halla el Antilogaritmo "x" en cada uno de los siguientes casos

a) $\text{Log}_{10} x = 2$

b) $\text{Log}_{10} x = 4$

Resolución:

Ejercicio 2 Hallar el antilogaritmo "x" en cada uno de los siguientes casos

a) $\text{Log}_2 x = 2$

b) $\text{Log}_{0.004} x = 3$

Resolución:

12.1 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1ra. PROPIEDAD: La Logaritmicación no es Cerrada en \mathbb{R} .

Veamos los siguientes casos

a) **Logaritmo de un número negativo y base positiva.**

$$\text{Ejemplo: } \log_2(-4) = n \Rightarrow 2^n = -4$$

Como toda potencia de un número positivo es positiva, ningún valor de n cumple esta condición

Es decir $\text{Log}_2(-4)$ es imposible en \mathbb{R}

En consecuencia no siempre es posible obtener el logaritmo de un número negativo

b) **Logaritmo de cero.**

$$\text{Ejemplo: } \log_5 0 = n \Rightarrow 5^n = 0$$

Ninguna potencia de 5 es Cero

Es decir $\text{Log}_5 0$ es imposible.

Generalizando: $\text{Log}_b 0$ es imposible para $b \neq 0$

PIENSA: ¿Qué ocurre si $b = 0$? $\Rightarrow \text{Log}_0 0$

c) **Logaritmo en base 1.**

$$\text{Ejemplo: } \log_1 5 = n \Rightarrow 1^n = 5$$

Como toda potencia de base 1 es igual a 1, ningún valor de n satisface esta condición

Es decir $\text{Log}_1 5$ es imposible

Generalizando: Log_p es imposible para $p \neq 1$

PIENSA: ¿Qué ocurre si $p = 1$? $\Rightarrow \text{Log}_1 1 =$

Con los ejemplos dados habrás podido observar que

La logaritimación de números positivos y base positiva distinta de 1 siempre es posible

En consecuencia de ahora en adelante nos ocuparemos de analizar las propiedades de los logaritmos de números positivos y base positiva distinta de 1. La logaritimación es cerrada en \mathbb{R}^+ (para $b \neq 1$)

2da. PROPIEDAD La Logaritmicación es UniformeEjemplo: $\text{Log}_4 64 = n \Rightarrow 4^n = 64$

El logaritmo de un número positivo es único

En símbolos $x = y \Rightarrow \text{Log}_b x = \text{Log}_b y$ **3ra. PROPIEDAD** Ley Cancelativa: $\text{Log}_b x = \text{Log}_b y \Rightarrow x = y$ Ejemplo: $\text{Log}_3 x = \text{Log}_3 81 \Rightarrow x = 81$ **4ta. PROPIEDAD** Logaritmo de un ProductoSea por ejemplo $\text{Log}_2 (4 \cdot 8) = \text{Log}_2 32 = 5$ pues $2^5 = 32$ ") $\text{Log}_2 4 = 2$ pues $2^2 = 4$ **) $\text{Log}_2 8 = 3$, pues $2^3 = 8$ Observa: $\text{Log}_2 (4 \cdot 8) = \text{Log}_2 4 + \text{Log}_2 8$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 5 & = & 2 + 3 \end{array}$$

PROPIEDAD: El Logaritmo de un producto, en base b, es igual a la suma de los Logaritmos de los Factores en la misma baseEn Símbolos: $\text{Log}_b (x \cdot y) = \text{Log}_b x + \text{Log}_b y$ **Demostración.**Sea $\text{Log}_b (x \cdot y)$

Designemos "m" y "n" a los respectivos Logaritmos de "x" e "y" en base b

$$\text{Log}_b x = m \Rightarrow b^m = x \quad \textcircled{1} \text{ (Por definición)}$$

$$\text{Log}_b y = n \Rightarrow b^n = y \quad \textcircled{2} \text{ (Por definición)}$$

Multiplicamos miembro a miembro $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$, Obteniendo

$$b^m \cdot b^n = x \cdot y \Rightarrow b^{m+n} = x \cdot y \text{ por definición de logaritmo } \text{Log}_b (x \cdot y) = m + n$$

Sustituyendo m y n, queda: $\text{Log}_b (x \cdot y) = \text{Log}_b x + \text{Log}_b y$

5ta. PROPIEDAD: Logaritmo de un Cociente

Sea por Ejemplo $\log_2 \frac{32}{2} = \log_2 (16) = 4$ pues $2^4 = 16$

$\log_2 32 = 5$ pues $2^5 = 32$) $\log_2 2 = 1$ pues $2 = 2$

Observa $\log_2 \left(\frac{32}{2} \right) = \log_2 32 - \log_2 2$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $4 \qquad \qquad 5 \qquad \qquad 1$

PROPIEDAD: El Logaritmo de un cociente, en base b es igual a la diferencia entre los logaritmos del dividendo y de divisor en la misma base

En símbolos $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$

* Demuestre la propiedad tomando como modelo la demostración de la propiedad anterior

6ta. PROPIEDAD: Logaritmo de una Potencia

Sea por Ejemplo $\log_2 4^3 = \log_2 64 = 6$, pues $2^6 = 64$

) $\log_2 4 = 2$, pues $2^2 = 4$

Observa $\log_2 4^3 = 3 \log_2 4$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $6 \qquad = \qquad 3 \qquad 2$

PROPIEDAD: El Logaritmo de base b de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo en base b de la base de la Potencia $\log_b a^n = n \log_b a$

Demostración.

$$\log_b a^n = x \Rightarrow b^x = a^n \quad \text{por definición}$$

Hacemos

$$\log_b a = y \Rightarrow b^y = a \quad \dots \text{por definición}$$

Elevamos a la "n" ambos miembros de la última igualdad.

$$(b^y)^n = a^n \Rightarrow b^{yn} = a^n ; \text{ por potencia de potencia.}$$

Aplicando la definición de logaritmo en base b , en esta última expresión, obtenemos que

$$\text{Log}_b a^n = n \text{ pero } y = \text{Log}_b a \text{ sustituyendo.}$$

Queda: $\text{Log}_b a^n = n \text{ Log}_b a$

7ma PROPIEDAD Logaritmo de una Raíz

El Logaritmo de una raíz puede reducirse al caso anterior teniendo en cuenta que un radical puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario

$$\text{Log}_b \sqrt[n]{x} = \text{Log}_b x^{1/n} = \frac{1}{n} \text{Log}_b x$$

$$\text{Log}_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \text{Log}_b x$$

PROPIEDAD:

El Logaritmo de una raíz, en base b es igual a Logaritmo del radicando en la misma base, dividido por el índice de la raíz.

8va. PROPIEDAD. El Logaritmo de "N" en base "b" se escribe usualmente $\text{Log}_b N$ de manera que son equivalentes las dos ecuaciones siguientes

$$\text{Log}_b N = x \quad \dots (1)$$

$$\text{Donde: } N = b^x \quad \dots (2)$$

Reemplazamos (2) en (1) $\text{Log}_b b^x = x$ (Logaritmo de una Potencia cuya base es la base del logaritmo es el exponente)

Ejemplos. a) $\text{Log}_2 16 = \text{Log}_2 2^4 = 4$

b) $\text{Log}_3 a^5 = 5$

c) $\text{Log}_a a^5 = 5$

d) $\text{Log}_x \sqrt{x} = \text{Log}_x x^{1/2} = 1/2$

9na. PROPIEDAD: La potencia cuyo exponente es el logaritmo de base igual al de la potencia es el número así

$$b^{\text{Log}_b N} = N$$

Demostración.

Hacemos que $b^x = N \quad \dots (1)$

Tomamos "Log_b" a ambos miembros $\text{Log}_b b^x = \text{Log}_b N$

Donde: $x = \text{Log}_b N \quad \dots (II)$

Reemplazamos (II) en (I)

$$b^{\text{Log}_b N} = N$$

10va. PROPIEDAD

El logaritmo de "N" en base "b" es igual al logaritmo del inverso de "N" en la base inversa de "b" es:

Demostración

Sabemos que $b^{\log_b N} = N$ elevamos ambos miembros a exponente -1

$$\left(b^{\log_b N} \right)^{-1} = N^{-1} \Rightarrow \left(b^{-1} \right)^{\log_b N} = \frac{1}{N}$$

$$\left(\frac{1}{b} \right)^{\log_b N} = \frac{1}{N} \quad \text{tomamos "Log}_{1/b}" \text{ a ambos miembros}$$

$$\text{Log}_{1/b} \left(\frac{1}{b} \right)^{\log_b N} = \text{Log}_{1/b} \frac{1}{N} \Rightarrow \therefore \text{Log}_b N = \text{Log}_{1/b} \frac{1}{N}$$

11va. PROPIEDAD

Cambio de Base El Logaritmo de un número "N" en base "b" es igual a una fracción cuyo numerador es el Logaritmo de N en una base "a" y cuyo denominador es el Logaritmo de "b" en la misma base "a" es:

$$\text{Log}_b N = \frac{\text{Log}_a N}{\text{Log}_a b}$$

Demostración

Sabemos que $b^{\log_b N} = N$ Tomamos "Log_a" a ambos miembros

$$\text{Log}_a b^{\log_b N} = \text{Log}_a N \quad \text{Aplicamos a propiedad } \text{Log}_a a^n = n \cdot \text{Log}_a a$$

$$\text{Log}_b N \cdot \text{Log}_a b = \text{Log}_a N \Rightarrow \therefore \text{Log}_b N = \frac{\text{Log}_a N}{\text{Log}_a b}$$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LOGARITMOS



Ejercicio 1 Reducir: $M = 5 \log_8 36 - 2 \log_{27} 1/9 + 3 \log_8 32$

Resolución

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente

$$M = 5 \log_6 6 - 2 \log_{3^3} 3^2 + 3 \log_{2^5} 2^4$$

$$M = 5 - 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{4}{5}$$

$$M = 10 - \frac{4}{3} + \frac{12}{3} \Rightarrow M = \frac{28}{3} \quad \text{Rpta.}$$

• Aplicamos las Propiedades

$$\bullet \log_a a^m = \frac{m}{n}$$

$$\bullet \log_b b^n = n$$

Otra Forma: Reducir $M = 5 \log_6 36 - 2 \log_{27} 9 + 3 \log_5 32$

Resolución:

• Aplicando a propiedad cambio de base, obtenemos

$$M = 5 \left(\frac{\log 36}{\log 6} \right) - 2 \left(\frac{\log 9}{\log 27} \right) + 3 \left(\frac{\log 32}{\log 5} \right)$$

$$M = 5 \left(\frac{\log 6^2}{\log 6} \right) - 2 \left(\frac{\log 3^2}{\log 3^3} \right) + 3 \left(\frac{\log 2^5}{\log 5} \right)$$

$$M = 5 \left(\frac{2 \log 6}{\log 6} \right) - 2 \left(\frac{2 \log 3}{3 \log 3} \right) + 3 \left(\frac{5 \log 2}{\log 5} \right)$$

$$M = 10 - \frac{4}{3} + \frac{15}{3} \Rightarrow M = \frac{28}{3} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 Reducir $R = 2 \log_3 a^4 - \log_3 \sqrt[3]{a} + 4 \log_3 b - 2 \log_3 b^2$

Resolución:

• En primer lugar aplicamos la propiedad: $n \log_a b = \log_a b^n$

$$R = \log_3 a^{4 \cdot 2} - \log_3 \sqrt[3]{a} + \log_3 b^4 - \log_3 b^{2 \cdot 2}$$

$$R = \log_3 a^8 - \log_3 \sqrt[3]{a} + \log_3 b^4 - \log_3 b^4$$

• En segundo lugar aplicamos la propiedad: $\log_a x - \log_a y = \log_a (x/y)$

$$R = \log_3 \left(\frac{a^8}{\sqrt[3]{a}} \right) = \log_3 a^{\frac{8}{3}} = a^{\frac{8}{3}} = \log_3 a^{\frac{8}{3}} = \log_3 a^{2\frac{2}{3}}$$

$$R = \frac{22}{3} \log_3 a \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3 Reducir $M = \log_{81} 1,3 + 5 \log_7 1 + 6 \log_{7^{10}} 2^3$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente

$$M = \log_{3^4} 3^{-1} + 5 \log_7 7^0 + 6 \log_{7^{10}} 2^3$$

$$M = \frac{1}{4} + 5(0) + 6\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$M = \frac{1}{4} + 0 + 6\left(\frac{9}{10}\right) \Rightarrow M = \frac{215}{4} \quad \text{Rpta.}$$

Recuerda que:

$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$$

$$\log_b b^n = n$$

Ejercicio 4 Expresar $\log \frac{5 \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}}$ como una suma algebraica de logaritmos

Resolución:

• En primer lugar aplicamos la **propiedad** $\log \left(\frac{x}{y} \right) = \log x - \log y$

$$\log \frac{5 \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \log 5 \sqrt[3]{4ab^2} - \log \sqrt{m}$$

• En segundo lugar aplicamos la **propiedad**: $\log x \cdot y = \log x + \log y$

$$\log 5 \sqrt[3]{4ab^2} = \left(\log 5 + \log \sqrt[3]{4ab^2} \right) - \log \sqrt{m}$$

• En tercer lugar aplicamos la **propiedad**: $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$

$$\log \frac{5 \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \left(\log 5 + \frac{1}{3} \log 4ab^2 \right) - \frac{1}{2} \log m$$

$$\begin{aligned} \log \frac{5 \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} &= \log 5 + \frac{1}{3} \left(\log 4 + \log a + \log b^2 \right) - \frac{1}{2} \log m \\ &= \log 5 + \frac{1}{3} \left(\log 2^2 + \log a + 2 \log b \right) - \frac{1}{2} \log m \\ &= \log 5 + \frac{1}{3} (2 \log 2 + \log a + 2 \log b) - \frac{1}{2} \log m \end{aligned}$$

$$\log \frac{5 \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \log 5 + \frac{2}{3} \log 2 + \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b - \frac{1}{2} \log m \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 5 Reducir $E = \frac{\log_5^3 \frac{1}{25}}{\log_3 81} + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 3}$

ACERCA

$$\log_5^3 \frac{1}{25} \text{ Significa } \left(\log_5 \frac{1}{25} \right)^3$$

Resolución

- La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente

$$E = \frac{\left(\log_5 \frac{1}{25} \right)^3}{\log_3 3^4} \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = \frac{\left(\log_5 5^{-2} \right)^3}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)}$$

$$E = \frac{(-2)^3}{4} + 2 = \frac{-8}{4} + 2 \Rightarrow \underline{E=0} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 6 Calcular el valor de $E = \log_{16} \left(\log_{4/9} \left(\log_{\sqrt{8}} \left(\log_{\sqrt{2}} 2 \right) \right) \right)$

Resolución.

$$E = \log_{16} \left(\log_{4/9} \left(\log_{\sqrt{8}} \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2^2} \right) \right) \right) = 2 \sqrt{2^2}$$

$$E = \log_{16} \left(\log_{4/9} \left(\log_{\sqrt{8}} 2 \right) \right) = \sqrt{8} \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$$

$$E = \log_{16} \left(\log_{4/9} \left(\log_{2^{3/2}} 2^1 \right) \right) = \log_{16} \left(\log_{4/9} \frac{1}{3^{1/2}} \right)$$

$$E = \log_{16} \left(\log_{4/9} 2^{1/3} \right) = \log_{16} \left(\log_{(2/3)^2} (2^{1/3})^1 \right)$$

$$E = \log_{16} 1/2 = \log_{2^4} 2^{-1}$$

$$\underline{E = -1/4} \quad \text{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 41

Ejercicio 1 : Expresar el Siguienie Logaritmo como una Suma Algebraica de Logaritmos.

$$\text{Log} \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{m^2}$$

Resolución:

Rpta. $\frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b - 2 \log m - \log n$

Ejercicio 2 Simplificar

$$M = 2 \log_7 3 - \log_7 54 + \log_7 6$$

Resolución:

Rpta. $M = \text{cero}$

Ejercicio 3 . Simplificar

$$R = \log_3 \frac{1}{27} + \log_{32} \frac{1}{4} - 4 \log_{\sqrt{2}} 8$$

Resolución:

Rpta. $R = \frac{-137}{5}$

Ejercicio 4 : Expresar el Siguienie Logaritmo como una Suma Algebraica de Logaritmos.

$$\text{Log} \frac{a \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{m^2}}$$

Resolución:

Rpta. $\text{Log} a + \frac{1}{3} \log b - \frac{1}{3} \log m - 3 \log m$

Ejercicio 5 Reducir

$$M = 2 \log_4 8 - 4 \log_4 \sqrt{3} + \log_4 9$$

Rpta. $M = 3$ **Ejercicio 7** Reducir

$$P = 3 \log_2 5 + 3 \log_2 2 - \log_2 (5/2)^3$$

Resolución.

Rpta. $P = 6$ **Ejercicio 6** Simplificar

$$E = \text{Log} \sqrt{x} + \text{Log} \sqrt[3]{y} - \text{Log} x^3 - \text{Log} y^2$$

Rpta. $E = 5 \log (x^{-2/3} y^{-1/3})$ **Ejercicio 8** Resolver

$$a) \log_2^2 49 - \log_2 16$$

$$b) \left[\log_3 (-8) - \log_3 1/3 \right]^{1/2}$$

Resolución

Rpta. a) cero b) 2

13.2 SISTEMA LOGARÍTMICO DECIMAL

El Sistema Logarítmico Decimal tiene como base el número real 10.

Un logaritmo en base 10 se denota $\text{Log}_{10} x$ o simplemente **Log**, pues por ser el Sistema más usado, se puede omitir la escritura de la base. A estos Logaritmos se le llaman **vulgares** (comunes, decimales (por ser de base 10) o **de Briggs** (Por el nombre de su creador).

13.2.1 LOGARITMOS DECIMALES DE POTENCIAS DE 10.

Calculemos los logaritmos decimales de algunas potencias de 10.

Analicemos la siguiente tabla:

ANTILOGARITMO	POTENCIA	LOGARITMO
1	10^0	$\text{Log } 1 = 0$
10	10^1	$\text{Log } 10 = 1$
100	10^2	$\text{Log } 100 = 2$
1000	10^3	$\text{Log } 1\,000 = 3$
0.1	10^{-1}	$\text{Log } 0.1 = -1$
0.01	10^{-2}	$\text{Log } 0.01 = -2$
0.001	10^{-3}	$\text{Log } 0.001 = -3$
0.0001	10^{-4}	$\text{Log } 0.0001 = -4$

En General: El logaritmo de una potencia de 10 es un número entero

$$\text{Log } 10^n = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

13.2.2 CARACTERÍSTICA y MANTISA: Un número real positivo a , está escrito en notación Científica si se ha expresado en la forma

$$\left[a = K \cdot 10^n, \quad 1 < K < 10, \quad n \in \mathbb{Z} \right]$$

- La característica del logaritmo de un número mayor que 1 se obtiene restando 1 al número de cifras enteras

$$\text{Log } 532 = 2 + \text{mantisa}$$

$$\begin{array}{c} 3 \text{ cifras} \uparrow \\ 3 - 1 = 2 \end{array}$$

$$\text{Log } 5\,496 = 3 + \text{mantisa}$$

$$\begin{array}{c} 4 \text{ cifras} \uparrow \\ 4 - 1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \log 1\,347 &= \log 1\,347 \times 10^{-3} \\
 &= \log 1\,347 + \log 10^{-3} \\
 &= \log 1\,347 + 3 \log 10 \\
 &= \log 1\,347 + 3 \cdot 1 \\
 \log 1\,347 &= 3 + \log 1\,347
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \log 0,072 &= \log 7,2 \times 10^{-2} \\
 &= \log 7,2 + \log 10^{-2} \\
 &= \log 7,2 - 2 \log 10 \\
 &= \log 7,2 - 2 \cdot 1 \\
 \log 0,072 &= 2 + \log 7,2
 \end{aligned}$$

En General: $\log a = \log (K \times 10^n) = \log K + \log 10^n$

$$\begin{aligned}
 &= \log K + n \log 10 \\
 \log a &= n + \log K
 \end{aligned}$$

El número entero n se llama característica del logaritmo de a y $\log K$ es la mantisa del logaritmo de a .

Por lo Tanto: $\log a = \underbrace{n}_{\text{Característica}} + \underbrace{\log K}_{\text{Mantisa}}$

$$\log a = \text{Característica} + \text{Mantisa}$$

Tradicionalmente, la mantisa del logaritmo de un número se buscaba en una tabla de logaritmos y la característica la calculaba el usuario de acuerdo a las siguientes reglas

Pero, ¿Cómo puedes obtener con la calculadora logaritmos en otras bases?

¡Atención!

La calculadora entrega los logaritmos con su característica y mantisa ya sumadas. Para expresar el logaritmo de un número como:

$$\log = \text{Característica} + \text{Mantisa}$$

Al logaritmo obtenido en la calculadora debemos restarle la característica correspondiente

Ejemplo 1: $\log 30 = 1,47712$

$$1,47712 - 1 = 0,47712$$

Calculadora: Carac. Mantisa

Por lo Tanto: $\log 30 = \underbrace{1}_{\text{Característica}} + \underbrace{0,47712}_{\text{Mantisa}}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº (42)

Ejercicio 1 Encuentra con una calculadora científica, los logaritmos de cada uno de los siguientes números:

- a) $49 =$
- b) $75 =$
- c) $86 =$
- d) $124 =$
- e) $1\,024 =$
- f) $1\,348 =$
- g) $175\,520 =$
- h) $1\,324\,762 =$

Ejercicio 3 Obtén los siguientes logaritmos en tu calculadora

- a) $\log 5 =$
- b) $\ln 4 =$
- c) $\log 0,2 =$
- d) $\ln \pi =$
- e) $\log 3,25 =$
- f) $\ln 0,3 =$
- g) $\log 125 =$
- h) $\ln 48 =$

Ejercicio 2 : Encuentra, con una calculadora científica, los logaritmos de cada uno de los siguientes números

- a) $0,5 =$
- b) $0,24 =$
- c) $0,04 =$
- d) $0,245 =$
- e) $0,304 =$
- f) $0,0004 =$
- g) $0,00042 =$
- h) $0,00407 =$

Ejercicio 4 : Resuelve primero mentalmente los siguientes logaritmos y luego verifica los resultados con la calculadora.

- a) $\log_2 64$
- b) $\log_3 1/27$
- c) $\log_4 0,25$

Resolución:

13.2.5 CÁLCULO DEL ANTILOGARITMO

La calculadora científica también permite calcular el valor del antilogaritmo calculando el logaritmo respectivo.

Ejemplo: Calcular el valor de "x" si $\log x = 2.79246$

- 1) Aprieta 2.79146; pulsar la tecla res, en vas



- 2) Pulse la tecla (10^x) y en el visor podrás ver el valor correspondiente al Antilogaritmo que es 620.0975279



TALLER DE EJERCICIOS Nº 43

- Calcular el antilogaritmo (x) de cada uno de los siguientes logaritmos

a) $\log x = -80003$

Resolución:

c) $\log x = 4.65273$

Resolución:

b) $\log x = 1.78032$

Resolución:

d) $\log x = 3.17493$

Resolución:

13.3 ECUACIONES EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la variable figura como exponente

Ejemplos $3^x = 9$, $5^x - 2^x = 21$ $10^x = 0,001$, etc.

Para la resolución de las ecuaciones exponenciales existen dos métodos

(I) Aplicando la siguiente Propiedad de las Potencias.

Si $a^m = a^n$ entonces $m = n$

(II) Aplicando la Definición de Logaritmo

Si $a^m = b$ entonces $m = \log_a b$



EJERCICIOS RESUELTOS APLICANDO EL PRIMER MÉTODO



Ejemplo 1 Resolver la ecuación $9^{x+1} = 81$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir así

$$\begin{aligned} (3^2)^{x+1} &= 3^4 \\ 3^{2(x+1)} &= 3^4 \Rightarrow 2(x+1) = 4 \\ 2x + 2 &= 4 \\ 2x &= 2 \\ x &= \frac{2}{2} = 1 \quad (\text{Raíz de la ecuación}) \end{aligned}$$

Verificación: $9^{x+1} = 81 \Rightarrow 9^{1+1} = 81$

$$9^2 = 81 \Rightarrow 81 = 81 \quad (\text{Proposición verdadera})$$

Luego:

El conjunto solución de: $9^{x+1} = 81$ es: $S = \{1\}$ **Apla.**

Ejemplo 2 Resolver la ecuación $4^x = \frac{1}{8}$

Resolución

La ecuación dada, se puede escribir así

$$4^x = \frac{1}{2^3} \quad \text{por propiedad} \quad \left[\frac{1}{a^n} = a^{-n} \right]$$

$$4^x = 2^{-3} \quad \Rightarrow \quad (2^2)^x = 2^{-3}$$

$$\underbrace{2^{2x}}_{2^{2x}} = 2^{-3} \quad \Rightarrow \quad 2x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \quad (\text{Raíz de la Ecuación})$$

Verificación: $4^x = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$

$$(2^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Luego El conjunto solución de $4^x = \frac{1}{8}$ es $S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

Ejemplo 3 Resolver la ecuación $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \cdot 2^5$

Resolución

La ecuación dada, se puede escribir así $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{225}{100}$ Sacamos 25 avas a cada término del 2º miembro

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4} \quad \text{pero} \quad \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{por propiedad} \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \left(\frac{B}{A}\right)^{-n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad (\text{Raíz de la ecuación})$$

Luego: El conjunto solución de $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \cdot 2^5$ es $S = \{ -2 \}$

Ejemplo 4. Resolver la ecuación $13^{2x+5} = 1$

Resolución:

Sabemos que: $A^0 = 1$, donde $A \neq 0$

La ecuación dada, se puede escribir así

$$13^{2x+5} = 1 \quad \Rightarrow \quad 13^{2x+5} = 13^0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 5 = 0$$

$$2x = -5 \quad \Rightarrow \quad \therefore x = -5/2$$

Luego,

El conjunto solución de $13^{2x+5} = 1$, es $S = \{-5/2\}$

Ejemplo 5 Resolver la ecuación. $9^x + 3^x = 90$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$$(3^2)^x + 3^x = 90; \text{ por propiedad:}$$

$$(A^m)^n = (A^n)^m$$

$$(3^2)^x + 3^x = 90; \text{ hacemos que:}$$

$$3^x = a \quad \dots (a)$$

$$a^2 + a = 90, \quad \text{igualamos a cero la ecuación así:}$$

$$a^2 + a - 90 = 0, \quad \text{factorizamos por el método del aspa.}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow +10 \\ a \\ \searrow -9 \end{array}$$

Donde: $(a + 10)(a - 9) = 0$, igualamos cada factor a cero

$$i) \quad a + 10 = 0 \rightarrow a = -10 \quad ii) \quad a - 9 = 0 \rightarrow a = 9$$

Reemplazamos. $a = -10$, en la expresión (a): $3^x = -10$ (No existe solución)

Reemplazamos. $a = 9$, en la expresión (a)

$$3^x = 9 \quad 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{Raíz de la ecuación})$$

Luego El conjunto solución de $9^x + 3^x = 90$ es $S = \{2\}$

Ejemplo 6 Resolver la ecuación $6^{3x+4} = 36^{2x-3}$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así

$$6^{3x+4} = (6^2)^{2x-3}$$

$$\underbrace{6^{3x+4}}_{6^{2(2x-3)}} \Rightarrow \begin{aligned} 3x+4 &= 2(2x-3) \\ 3x+4 &= 4x-6 \\ x &= 10 \end{aligned} \quad \text{(Raíz de ecuación)}$$

Luego El conjunto solución de $6^{3x+4} = 36^{2x-3}$ es $S = \{10\}$

EJERCICIOS RESUELTOS APLICANDO EL SEGUNDO MÉTODO

Este método se utiliza cuando no es posible transformar la ecuación en una igualdad de potencias de una misma base, veamos:

Ejemplo 1 Resolver la ecuación: $2^{x^2-3} = 5$

Resolución

Por propiedad $\left[a^m \cdot a^n = a^{m+n} \right]$ la ecuación dada se puede escribir así:

$$2^{x^2-3} = 5 \Rightarrow \frac{2^{x^2}}{2^3} = 5 \Rightarrow \frac{2^{x^2}}{8} = 5$$

$$\boxed{2^{x^2} = 40}$$

Aplicando la definición de logaritmos en esta última expresión obtenemos: $x = \log_2 40$

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{\log_2 40\}$

Ejemplo 2 Resolver la ecuación: $5^{3x-2} - 10 = 0$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir así: $5^{3x-2} = 10 \Rightarrow \frac{5^{3x}}{5^2} = 10$

$$\frac{5^{3x}}{25} = 10 \Rightarrow 5^{3x} = 250$$

Por definición de logaritmos, obtenemos

$$3x = \log_5 250$$

$$x = 1/3 \log_5 250$$

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{1/3 \log_5 250\}$

Ejemplo 3 Resolver la ecuación $3^{2x+1} = 2$

Resolución

Por propiedad $a^{m-n} = a^m : a^n$, la ecuación dada se puede escribir así:

$$3^{2x} : 3^1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3^{2x} = \frac{2}{3}$$

Por definición de logaritmos, obtenemos

$$2x = \log_3 \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$\left[x = \frac{1}{2} \log_3 \left(\frac{2}{3} \right) \right]$$

El conjunto solución de la ecuación es $S = \left\{ \frac{1}{2} \log_3 \left(\frac{2}{3} \right) \right\}$



TALLER DE EJERCICIOS N° 44

A Resolver las siguientes ecuaciones aplicando la propiedad de potencias

1) $2^{x+1} = 0,4$

5) $9^{x+1} = 243$

9)

$7^{x^2-4} = 1$

2) $3^x = \frac{1}{81}$

6) $100^{x-2} = 0,001$

10) $9^x - 3^x - 6 = 0$

3) $(\sqrt[3]{2})^x = 16$

7) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = 256$

11) $\left(\frac{25}{4}\right)^{x-3} = 0,16$

4) $2^{4x-1} = 32^{x+1}$

8) $64^x = 0,25$

12) $(9^x)^{x+2} = 3^{4x+2}$

B Resolver las siguientes ecuaciones aplicando la definición de logaritmos

13) $4^x = 3$

15) $5^{3x+2} = 2$

17) $3^x = 0,25$

14) $3^{x+2} = 5^x$

16) $7^{x-1} = 3^{x+2}$

RESPUESTAS TALLER

1) $S = \{5\}$

7) $S = \{-3/2\}$

13) $S = \{\log_4 3\}$

2) $S = \{-3\}$

8) $S = \{-1/3\}$

14) $S = \{\log_{5/3} 9\}$

3) $S = \{12\}$

9) $S = \{2, -2\}$

15) $S = \left(\frac{1}{3} \log_2 2 / 25\right)$

4) $S = \{-6\}$

10) $S = \{1\}$

16) $S = \{\log_{7/3} 63\}$

5) $S = \{-1/2\}$

11) $S = \{2\}$

17) $S = \{\log_3 1/4\}$

6) $S = \{1/2\}$

12) $S = \{1, 1\}$

13.4 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Se denomina ecuación logarítmica a toda aquella que contiene una o más funciones logarítmicas de la variable como por ejemplo.

$$\log_3 x = 2 \quad , \quad \log_2 (2x + 1) - \log_2 (x - 1) = 0 \quad , \quad (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$$

Las raíces de una ecuación logarítmica puede hallarse

- Aplicando la definición de logaritmo
- Aplicando la propiedad: si $\log_b m = \log_b n$ entonces $m = n$
- Introduciendo una nueva variable

A. Resolver las Sigüientes Ecuaciones, Aplicando la Definición de Logaritmo.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación $\log_5 (x - 1)^2 = 2$

Resolución

Por definición de logaritmos. $\log_5 (x - 1)^2 = 2$, obtenemos

$$(x - 1)^2 = 5^2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 25$$

Donde:

$$(x - 1)^2 = \pm \sqrt{25}$$

$$x - 1 = \pm 5 \begin{cases} x - 1 = +5 & \rightarrow x = 6 \\ x - 1 = -5 & \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Verificación.

Para $x = 6$ $\rightarrow \log_5 (6 - 1)^2 = \log_5 5^2 = 2$ (Proposición Verdadera)

Para $x = -4$ $\rightarrow \log_5 (-4 - 1)^2 = \log_5 (-5)^2 = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$ (Proposición verdadera)

El conjunto solución de la ecuación dada es. $S = \{-4, 6\}$

Ejemplo 2 Resolver la ecuación $\log_{(x-3)} (x - 1) = 2$

Resolución

Por definición de logaritmos. $\log_{(x-3)} (x - 1) = 2$ Obtenemos

$$(x - 1) = (x - 3)^2$$

$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 7x + 10$$

Esta última ecuación se puede escribir así:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

factorizamos por el método del aspa:

$$\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & -2 \end{array}$$

Luego $(x - 5)(x - 2) = 0$ igualamos cada factor a cero

$$\text{I) } x - 5 = 0 \rightarrow \boxed{x = 5} \quad \text{II) } x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

Verificación

$$\text{Para } \boxed{x = 5} \rightarrow \log_{15-3}(5-1) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \text{ (Proposición verdadera)}$$

$$\text{Para } \boxed{x = 2} \rightarrow \log_{12-3}(2-1) = \log_1 1 \neq 2 \text{ (Proposición falsa)}$$

El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{5\}$

Ejemplo 3 } Resolver la ecuación $\log_5(x+3) + \log_5(x-1) = 1$

Resolución

Por propiedad $\log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B$ La ecuación se puede escribir así:

$$\log_5(x+3)(x-1) = 1$$

$$(x+3)(x-1) = 5^1$$

$$x^2 + 2x - 3 = 5 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \text{ factorizamos por el método del aspa:}$$

$$\begin{array}{cc} x & -2 \\ x & +4 \end{array}$$

Donde $(x - 2)(x + 4) = 0$ igualamos cada factor a cero

$$\text{I) } x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \quad \text{II) } x + 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = -4}$$

Verificación

$$\text{Para } \boxed{x = 2} \rightarrow \log_5(2+3) + \log_5(2-1) = 1$$

$$\log_5 5 + \log_5 1 = 1 \quad \log_5 5^1 + \log_5 5^0 = 1 \Rightarrow \boxed{1 + 0 = 1} \text{ (Verdadero)}$$

$$\text{Para } \boxed{x = -4} \rightarrow \log_5(-4+3) + \log_5(-4-1) \neq 1 \text{ (Proposición falsa)}$$

Luego El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{2\}$

Ejemplo 4 Resolver la ecuación. $\log_3 x^2 - \log_3 6x = 2$

Resolución

Por propiedad: $\log_b A - \log_b B = \log_b \frac{A}{B}$ La ecuación dada, se puede escribir así:

$$\log_3 \left(\frac{x^2}{6x} \right) = 2 \Rightarrow \log_3 \left(\frac{x}{6} \right) = 2$$

$$\frac{x}{6} = 3^2 \Rightarrow x = 54$$

Luego El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{54\}$

B. Resolver las siguientes Ecuaciones Aplicando la Propiedad

Si: $\log_b m = \log_b n$ Entonces $m = n$

Ejemplo 1 Resolver la ecuación $3 \log x - \log 16 = 2 \log(x/2)$

Resolución

Aplicando las propiedades $n \log A = \log A^n$
 $\log A - \log B = \log \frac{A}{B}$ obtenemos

$$\log x^3 - \log 16 = \log \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$\log \frac{x^3}{16} = \log \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^3}{16} = \frac{x^2}{4} \quad \text{Igualamos a cero dicha expresión}$$

$$\frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{4} = 0 \quad \text{Factorizamos}$$

$$\frac{x^2}{4} \left(\frac{x}{4} - 1 \right) = 0 \quad \text{Igualamos cada factor a cero}$$

$$i) \frac{x^2}{4} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$ii) \frac{x}{4} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x}{4} = 1 \rightarrow x = 4$$

Verificación

Para $x = 0$ $+ 3 \log 0 - \log 16 = 2 \log \frac{0}{2}$ (Proposición falsa)

└ No existe

Para $x = 4$ $+ 3 \log 4 - \log 16 = 2 \log \frac{4}{2}$

$$\log 4^3 - \log 16 = \log \left(\frac{4}{2}\right)^2 \quad + \quad \log \frac{(4)^3}{16} = \log 2^2$$

(Proposición verdadera) \rightarrow $\left[\log 4 = \log 4 \right]$

Luego El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{4\}$

Ejemplo 2 Resolver la ecuación $\log(25 - x^2) - \log(x + 1)^2 = 0$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir así:

$$\log(25 - x^2) = \log(x + 1)^2$$

Donde:

$$(25 - x^2) = (x + 1)^2$$

$$25 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \quad + \quad 24 = 2x^2 + 2x$$

sacamos mitad a cada término

$$12 = x^2 + x$$

, igualamos a cero

$$0 = x^2 + x - 12$$

factorizamos

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x \quad +4 \\ \times \\ x \quad -3 \end{array}$$

Donde: $(x + 4)(x - 3) = 0$

i) $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

ii) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{-4, 3\}$

Ejemplo 3 Resolver la ecuación $\frac{\log 2x}{\log(x - 12)} = 2$

Resolución

La ecuación se puede escribir así: $\log 2x = 2 \log(x - 12)$

$$\log 2x = \log(x - 12)^2$$

Donde: $2x = (x - 12)^2 \rightarrow 2x = x^2 - 24x + 144$

$$0 = x^2 - 26x + 144$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ x & & -18 \\ & \times & \\ x & & -8 \end{array}$$

$$(x - 18)(x - 8) = 0$$

i) $x - 18 = 0 \rightarrow \boxed{x = 18}$

ii) $x - 8 = 0 \rightarrow \boxed{x = 8}$

• Recordar que: $\log_b A = N$ siendo: $A = \text{Número real positivo}$
 $b > 0$ y $b \neq 1$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{18\}$

Ejemplo 4 Resolver la ecuación $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$

Resolución:

Por propiedad: $\sqrt[n]{A} = N \rightarrow A = N^n$, obtenemos que:

$$\log x = (\log \sqrt{x})^2 \quad ; \text{por artificio: } x = \sqrt{x}^2$$

$$\log \sqrt{x}^2 = (\log \sqrt{x})^2 \quad \text{por propiedad} \quad \log A^n = n \log A$$

$$2 \log \sqrt{x} \cdot (\log \sqrt{x})^2 = 0 \quad , \text{igualando a cero}$$

$$2 \log \sqrt{x} \cdot (\log \sqrt{x})^2 = 0 \quad , \text{factorizando "log } \sqrt{x}"$$

$$\log \sqrt{x} (2 \log \sqrt{x})^2 = 0 \quad , \text{igualamos cada factor a cero}$$

i) $\log \sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 10^0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$

ii) $2 \log \sqrt{x} = 0 \rightarrow \log \sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 10^0 \rightarrow x = 1$

El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{1, 10^4\}$

C. Resolver las siguientes Ecuaciones Aplicando la Introducción de una Nueva Variable**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación. $2 \log_2^2 x + 5 \log_2 x = 3$ **Resolución**

La ecuación dada se puede escribir así:

$$2 (\log_2 x)^2 + 5 \log_2 x = 3 \quad \text{hacemos que } \log_2 x = y \quad (I)$$

$$2y^2 + 5y = 3, \quad \text{igualando a cero, obtenemos}$$

$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2y \\ y \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 \\ +3 \end{array} \quad (2y - 1)(y + 3) = 0$$

$$I) \quad 2y - 1 = 0 \rightarrow y = 1/2 \quad II) \quad y + 3 = 0 \rightarrow y = -3$$

Reemplazamos el valor de $y = 1/2$ en (I).

$$\log_2 x = y \rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2^{1/2} \rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\log_2 x = y \rightarrow \log_2 x = -3 \rightarrow x = 2^{-3} \rightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$\underline{\underline{\text{El conjunto solución de la ecuación dada es: } S = \{ \sqrt{2}, 1/8 \}}}$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación. $\log_2^3 x + 4 \log_2^2 x + 3 \log_2 x = 0$ **Resolución**

La ecuación dada, se puede escribir así:

$$(\log_2 x)^3 + 4(\log_2 x)^2 + 3 \log_2 x = 0 \quad \text{hacemos } \log_2 x = a$$

$$a^3 + 4a^2 + 3a = 0 \quad \text{, factorizamos "a"}$$

$$a(a^2 + 4a + 3) = 0 \quad \text{, factorizamos los términos del paréntesis}$$

$$a(a^2 + 4a + 3) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a \\ a \end{array} \right\} \begin{array}{l} +3 \\ +1 \end{array}$$

, aplicando el método del aspa.

Luego $a(a+3)(a+1) = 0$, igualemos cada factor a cero

i) $a = 0$ pero $a = \log_2 x \rightarrow \log_2 x = 0 \rightarrow x = 2^0 \quad x = 1$

ii) $a + 3 = 0 \rightarrow a = -3 \rightarrow \log_2 x = -3 \rightarrow x = 2^{-3} \quad x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

iii) $a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow \log_2 x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} \quad x = 1/2$

Luego El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{1/2, 1/8, 1\}$



OTROS TIPOS DE EJERCICIOS SOBRE ECUACIONES LOGARÍTMICAS



Ejemplo 1 Resolver la ecuación $10^{\log 5x} = 3x + 8$

Resolución

Por propiedad: $\boxed{a^{\log_a K^n} = x^n}$ la ecuación dada, se puede escribir así, ya que la base del logaritmo se sobreentiende que es 10

$$10^{\log_{10} 5x} = 3x + 8 \Rightarrow 5x = 3x + 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Luego El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{4\}$

Ejemplo 2 Resolver la ecuación: $\log_2 10 - \log(x^2 - 2) = 1$

Resolución:

Por propiedad: $\boxed{\log_b A = \frac{\log A}{\log b}}$ la ecuación dada se puede escribir así:

$$\frac{\log 10}{\log 2} - \log(x^2 - 2) = 1 \rightarrow \text{pero } \boxed{\log 10 = 1}$$

$$\frac{1}{\log 2} - \log(x^2 - 2) = 1 \rightarrow \log(x^2 - 2) = \frac{1}{\log 2} - 1$$

Luego, $x^2 - 2 = x$

$x^2 - x - 2 = 0$, factorizamos por el método del aspa.

Donde: $5a^2 = 7 \Leftrightarrow a^2 + 5a^2 + 2a - 7 = 0$, factorizamos por el método del aspa

$$\begin{array}{c} 5a^2 + 2a - 7 = 0 \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ a & & -1 \\ & \downarrow & \\ 5a & & +7 \end{array} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ a & & -1 \\ & \downarrow & \\ 5a & & +7 \end{array}} \right\} (a-1)(5a+7) = 0$$

i) $a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow \log x = 1 \rightarrow \log_{10} x = 1 \rightarrow x = 10^1 = 10$

ii) $5a + 7 = 0 \rightarrow a = -7/5$ (No es solución)

El conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{10\}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 45

Resolver las siguientes ecuaciones

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $\log_3(2x+5) = 2$ | 4. $\log_x(5x-6) - 2 = 0$ |
| 2. $\log_2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ | 5. $\log_3 x^2 \cdot \log_3 4x = 2$ |
| 3. $\log_{1/2}(x+5) = 2$ | 6. $\log 6x + \log(x-3) - \log 3x = 0$ |
| 7. $2 \log x - 3 \log x/2 = \log 4$ | 10. $\log_3(x+2)^2 \cdot \log_3(2x-5) = 2$ |
| 8. $\log_4(x+2) = 1 - \log_4(x-1)$ | 11. $3 \log(5-x) = \log(35-x^3)$ |
| 9. $\log(x+5)^2 - \log(x+5) = \log 2$ | 12. $\log \sqrt[3]{2x+3} + \log \sqrt{7x+4} = 1 + \log 1,5$ |
| 13. $\log_2 2x - 5 \log_4 x + 8 = 0$ | 14. $2 \log_3^2 x + 5 \log_3 x = 3$ |
| 15. $10^{\log x^2 + 3} = x + 1$ | 16. $\log_{1/3} x + \log_{1/9} x + \log_{1/27} x = 7$ |

RESPUESTAS TALLER

- | | | | |
|--------------------|------------------|--------------------|------------------------------|
| 1. $S = \{2\}$ | 5. $S = \{36\}$ | 9. $S = \{-3\}$ | 13. $S = \{16\}$ |
| 2. $S = \{-2, 4\}$ | 6. $S = \{7/2\}$ | 10. $S = \{7\}$ | 14. $S = \{\sqrt{3}, 1/27\}$ |
| 3. $S = \{4\}$ | 7. $S = \{2\}$ | 11. $S = \{2, 3\}$ | 15. $S = \{2\}$ |
| 4. $S = \{2, 3\}$ | 8. $S = \{2\}$ | 12. $S = \{3\}$ | 16. $S = 3^{-4}$ |



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LOGARITMOS

NIVEL 1

Ejercicio 1 Si $\text{Log } 8 = x$, entonces $\text{Log } 10a$, es igual a

- A) $10 + x$ B) $10x$ C) x D) $2x$ E) $1 + x$

Ejercicio 2 Si $\text{Log } p = x$ entonces $\text{Log } \sqrt[3]{p}$ es igual a

- A) \sqrt{x} B) $3x$ C) $x^{1/3}$ D) $x/3$ E) $\frac{1}{3} - x$

Ejercicio 3 Si $\text{Log } a = m$ y $\text{Log } b = n$ entonces $\text{Log } \sqrt{a/b}$ es igual a

- A) $m - n$ B) $\frac{m-n}{2}$ C) $\sqrt{m-n}$
D) m/n E) $\sqrt{m/n}$

Ejercicio 4 $\text{Log } 10^3$ es equivalente a

- A) $1 + 3 \text{Log } x$ B) $\text{Log } x^3$ C) $3 \text{Log } x$
D) 3 E) Ninguna de las Anteriores

Ejercicio 5 Si $\text{Log } \sqrt{x^2} = 0.4$ entonces el valor de $\text{Log } x$, es

- A) $2/5$ B) 1 C) -1 D) 2 E) $-5/2$

Ejercicio 6 Si $\text{Log } p = q$ entonces, $\text{Log } (p/r)$ es

- A) $q/2$ B) $q - \text{Log } r$ C) $q \text{Log } r$
D) $q \cdot r$ E) $\text{Log } p + \text{Log } r$

Ejercicio 7 $\text{Log } x + \text{Log } (1/x^2)$ equivale a

- A) $3 \text{Log } x$ B) 3 C) $-\text{Log } x$
D) $2/3$ E) $2 \text{Log } x$

Ejercicio 8 El $\text{Log}_5 \sqrt[3]{25}$ es igual a

- A) $3/2$ B) $-3/2$ C) $2/3$ D) $2/3$ E) 2

Ejercicio 9 $\text{Log } x - 3$ equivale a

- A) $\frac{\text{Log } x}{1000}$ B) $\text{Log } 3x$ C) $\frac{\text{Log } x}{3}$

- D) $\text{Log } 1000x$ E) $\text{Log} \left(\frac{x}{1000} \right)$

Ejercicio 10 Si $x = \text{Log}_2 a$ el valor de " $x + 1$ " es igual a

- A) $2 \text{Log } a$ B) $\text{Log}_2 a^2$ C) $4 \text{Log } a$
D) $\text{Log}_2 2a$ E) $\text{Log } a/2$

Ejercicio 11 $\text{Log } \sqrt[3]{1000}$ equivale a

- A) $1 + 3 \text{Log } a$ B) $1 + \frac{1}{3} \text{Log } a$ C) $\frac{1}{3} \text{Log } a$

- D) $1 - 3 \text{Log } a$ E) $\frac{1}{3} \text{Log } a$

Ejercicio 12 $\text{Log} (a^2 - 2ab + b^2)$, es igual a $(a - b)$

- A) $a - b$ B) $a + b$ C) a D) b E) 2

Ejercicio 13 En la Ecuación:

$\text{Log}_2 (5x - 3) - \text{Log}_2 x = 1$, el valor de " x " es:

- A) 0 B) 1 C) 10 D) 2 E) 20

Ejercicio 14 En la Ecuación

$\text{Log}_3 (2x + 21) - \text{Log}_3 x = 2$ el valor de " x " es:

- A) 3 B) 8 C) 21 D) $21/2$ E) $21/8$

Ejercicio 1 En la ecuación,
 $\log_4 (2x + 3) \cdot \log_4 (x - 6) = 1$ el valor de "x" es

- A) 21 B) -6 C) 3 D) 27/2 E) 21

Ejercicio 2 El desarrollo de la expresión
 $\log (x^2 - 7x + 10)$ es.

- A) $2 \log x - \log 7 \cdot \log x + \log 10$
 B) $2 \log x - \log 7x + \log 10$
 C) $\log (x - 5) + \log (x - 2)$
 D) $2 \log x - \log 7$
 E) Ninguna de las Anteriores

Ejercicio 3 El desarrollo de la expresión,
 $\log (a^3 - b^2)$, es.

- A) $3 \log a - 3 \log b$
 B) $\log a^3/b^3$
 C) $3 \log (a - b)$
 D) $\log (a - b) + \log (a^2 + ab + b^2)$
 E) $3 \log a/b$

Ejercicio 4 El desarrollo de la expresión
 $\log (x^2 - x)$ es.

- A) $\log x + \log (x - 1)$ B) $2 \log x - 1$
 C) $2 \log x$ D) $2 \log x - \log 1$
 E) $\log x$

Ejercicio 5 El valor de la expresión

$\log 100 + \log_2 128 - \log_5 625$ es

- A) 10 B) 5 C) 10 D) 5 E) 397

Ejercicio 6 El valor de la expresión

$\log 0.01 + \log_{0.3} 0.0081$, es

- A) 20 B) 2 C) 2 D) 1 E) 0.9919

Ejercicio 7 El valor de la expresión

$\log_{21 \sqrt{35}} 216 \sqrt[3]{6^2}$; es

- A) 55 B) 36 C) 55/36 D) 6 E) -6

Ejercicio 8 El valor de la expresión
 $\log_2 0.25 + \log_2 0.125 + \log_2 0.0625$, es

- A) 1 B) 0 C) 2 D) -3 E) -1

Ejercicio 9 El valor de la expresión.

$\log_2 \frac{1}{16} - \log_3 \frac{1}{81} + \log_5 \frac{1}{125}$, es

- A) 4 B) 7 C) 11 D) -3 E) 3

Ejercicio 10 El valor de "x" en la expresión

$\log_{6/5} x = 3$ es

- A) 216 B) 125 C) 91 D) $\frac{216}{125}$ E) 341

Ejercicio 11 El valor de "x" en la expresión

$\log_4 1 \frac{91}{125} = 3 + x$ es

- A) 6 B) 6/5 C) Imposible Determinarlo
 D) 5 E) 1

Ejercicio 12 El valor de "x" en la expresión

$\log_{2/3} x = -2$, es

- A) 2/3 B) 2/3 C) 3/2 D) 3/2 E) 9/4

Ejercicio 13 El valor de "x" en la expresión.

$\log_{0.4} 0.064 = x$, es

- A) 4 B) 16 C) 64 D) 3 E) 60

Ejercicio 14 Si $\log 2 = 0.3$ y $\log 3 = 0.47$ el valor de la expresión.

$\log 6 - \log 108 + \log 48$, es.

- A) 0.9 B) 0.43 C) 1.37 D) 1.07 E) 0.17

Ejercicio 15 Si $\log 3 = 0.47$ y $\log 5 = 0.70$, entonces el valor de la expresión.

$\log 75 - \log 125 + \log 45$, es

- A) 0,47 B) 1,41 C) 0,9 D) 0,94 E) 1,3

Ejercicio 1 Si $\log 2 = 0,30$ y $\log 5 = 0,70$, entonces el valor de la expresión

$$\log_{36} \log_{14} 85$$

- A) 0,70 B) 0,40 C) 1,30
D) 1,60 E) imposible Determinarlo

Clave de Respuestas

1 E	2 D	3 B	4 D	5 B
6 B	7 C	8 D	9 E	10 D
11 B	12 A	13 B	14 A	15 D
16 C	17 D	18 A	19 B	20 C
21 C	22 E	23 D	24 D	25 B
26 E	27 D	28 B	29 B	30 B

NIVEL II

Ejercicio 1 Sin usar tablas de logaritmos

calcular $\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}$

- A) 1/4 B) 1/8 C) 1/2 D) 1/6 E) N.A

Ejercicio 2 Si $\log_2 3 = x$ Hallar $\log_{24} 64$

- A) $\frac{5}{1+x}$ B) $\frac{6}{3+x}$ C) $\frac{6}{x+4}$
D) $\frac{5}{4+x}$ E) $\frac{5}{3+x}$

Ejercicio 3 Calcular el valor numérico de

$$\log_2 3 \log_2 4 \log_4 5 \log_5 6 \log_{1024} 1024$$

- A) 100 B) 10 C) 1 D) 0 E) N.A

Ejercicio 4 $\log a + \log b = \log(a+b)$ si y solo si ($a, b > 1$)

- A) $a=b=0$ B) $a = \frac{b^2}{(1-b)}$ C) $a=b=1$
D) $a = \frac{b}{(b-1)}$ E) $a/b=2$

Ejercicio 5 Si $\sqrt[n]{x+at} : \sqrt[n]{x-ab} = ab$

$$\sqrt{x+ab} + \sqrt{x-ab} = \log y \text{ senalar el valor de } y$$

- A) a B) b C) ab D) a/b E) 100

Ejercicio 6 Al resolver la ecuación Logarítmica.

$\log(2-x) + \log(3-x) = \log 2 + 1$, su conjunto solución es

- A) (7, 2) B) (-7, 2) C) (7) D) (2) E) (-2)

Ejercicio 7 Hallar un valor de \sqrt{x} en

$$\log_2 x - 8 \log_{\frac{1}{2}} 2 = 3$$

- A) 5 B) 6 C) 3 D) 4 E) 2

Ejercicio 8 Indicar la raíz de:

$$\log \sqrt{x-21} = 1 - \frac{1}{2} \log x$$

- A) 25 B) 4 C) 4 D) 22 E) 5

Ejercicio 9 Resolver $x^{\log x} = \left(\frac{10}{\sqrt[5]{x}}\right)^6 = 0$,

e indicar el producto de sus raíces

- A) 10^{-2} B) 10^{-1} C) 10 D) 10^2 E) 1

Ejercicio 1 Resolver

$$x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 72$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 2 Sabiendo que

$$\log \sqrt[3]{a^2 (3 - 2\sqrt{2})} = \frac{4}{3} (1 - b)$$

Calcular $\log_a \sqrt{[a(\sqrt{2} + 1)]^3}$

A) a B) b C) 3a D) -3b E) 0

Ejercicio 3 Resolver para "x"

$$\log(2x - 1)^n + \log(x - 1)^{10 \log n} = n$$

A) n - 5/2

D) 5

B) 3

C) n - 3

E) n - 1

Ejercicio 4 Calcular el producto de las soluciones de

$$\frac{\log_2 x + \log_x 2}{2 - \log_2 2} = \frac{5}{3}$$

A) 4 $\sqrt[3]{2}$

B) 8 $\sqrt[3]{2}$

C) $\sqrt[3]{16}$

D) 8 $\sqrt{3}$

E) N.A.

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. B	4. D	5. E
6. E	7. D	8. A	9. B	10. C
11. D	12. B	13. B		



EXERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

Cesar Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Si $\log_2 (\log_3 (\log_{10} x)) = 1$ Hallar $\log x$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 9

E) 6

Resolución.

Aplicando la propiedad $\log_b A = N \Rightarrow A = b^N$ obtenemos

$$\log_2 (\log_3 x) = 2 \Rightarrow \log_3 (\log_{10} x) = 2 \quad (I)$$

Nuevamente aplicamos la misma propiedad: en (I), obteniendo:

$$\log_{10} x = 3^2 \Rightarrow \log_{10} x = 9 \quad \text{(La base 10 del logaritmo de "x" se sobreentiende)} \quad \log x = 9 \quad \text{Rpta. D}$$

2. Si $x \log a + y \log b = \log(ab)$. Hallar $\frac{\log b}{\log a}$

A) $\frac{1-x}{1+y}$ B) $\frac{x-1}{y-1}$ C) $\frac{x-1}{1-y}$ D) 1 E) $\frac{x+y}{x-y}$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$ obtenemos.

$$x \log a + y \log b = \log a + \log b \quad \text{transponemos términos}$$

$$x \log a - \log a = \log b - y \log b \quad \text{factorizamos en ambos miembros}$$

$$(x-1) \log a = (1-y) \log b \Rightarrow \therefore \frac{x-1}{1-y} = \frac{\log b}{\log a} \quad \text{Rpta. C}$$

3. Hallar "x" si: $\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 = 6$

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) N.A

Resolución:

Aplicando la propiedad $\log_b A = \frac{\log A}{\log b}$, obtenemos

$$\log_2 x + \frac{\log x^2}{\log 4} + \frac{\log x^3}{\log 8} = 6$$

$$\log_2 x + \frac{2 \log x}{\log 2^2} + \frac{3 \log x}{\log 2^3} = 6 \quad \text{Aplicando la propiedad: } \log A^n = n \log A$$

$$\log_2 x + \frac{2 \log x}{2 \log 2} + \frac{3 \log x}{3 \log 2} = 6$$

$$\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 6 \Rightarrow 3 \log_2 x = 6$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2$$

$$\therefore x = 4 \quad \text{Rpta. A}$$

4. Elevar: $S = \log_4 32 + \log_{625} (1/125) + \log_{3^4 \cdot 5} 243 \sqrt[5]{27}$

A) 6,4 B) 6,23 C) 6 D) 5 E) 1

Resolución.

Sabemos que

$$\begin{aligned} 32 &= 2^5 & 1/125 &= 5^{-3} & 625 &= 5^4 \\ 243 \sqrt[5]{27} &= 3^5 \cdot 3^{3/5} = 3^{36/5} & 3 \sqrt[4]{3} &= 3 \cdot 3^{1/4} = 3^{5/4} \end{aligned}$$

Luego $S = \log_{2^2} 2^5 + \log_{5^4} 5^{-3} + \log_{3^{5/4}} 3^{36/5}$. Aplicando la propiedad: $\log_{A^m} A^n = \frac{n}{m}$

$$\text{Obtenemos } S = \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{-3}{4}\right) + \left(\frac{28/5}{5/4}\right) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + \frac{112}{25}$$

$$\text{Damos común denominador, obteniendo: } S = \frac{250}{100} - \frac{75}{100} + \frac{448}{100} = \frac{623}{100} = 6,23$$

Rpta. B

5. $S = 2^{\log_2(2x+3)} + 5^{\log_5(x+7)} = 7^{\log_7(2x+18)}$ Entonces: $\log_{3,5} x$, es

- A) 2 B) 4 C) 8 D) 8 E) N.A

Resolución.

Aplicando la propiedad: $\log_b b^N = N$ obtenemos

$$(2x+3) + (x+7) = (2x+18) \quad \text{Resolviendo dicha ecuación, se obtiene}$$

$$3x+10 = 2x+18 \Rightarrow \therefore x=8$$

$$\text{Luego: } \log_{3,5} x = \log_{3,5} 8 = \log_{2,5} 2^3 = \frac{3}{1/3} = 9 \quad \log_{3,5} x = 9 \quad \text{Rpta. C}$$

6. Sea: $e^x = 2^{\log x}$ Hallar Antilog x

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) 8

Resolución.

Tomamos "log", en ambos miembros.

$$\log e^x = \log 2^{\log x} \quad \text{Por propiedad: } \log A^n = n \log A$$

$$\log e^x = \log e \cdot \log 2 \Rightarrow x \log e = \log e \cdot \log 2 \Rightarrow x = \log 2 \quad (*)$$

$$\text{Luego: } \text{Antilog } x = \text{Antilog } x = 10^x \quad (II)$$

$10 \rightarrow$ se sobreentiende

Reemplazamos (I) en (II)

$$\text{Antilog } x = 10^{\log 2} = 10^{\log_{10} 2} = 2 \Rightarrow \text{Antilog } x = 2 \quad \text{Rpta. B}$$



¿SABÍAS QUE...

En la calculadora hay una tecla x^y que permite elevar un número positivo a cualquier potencia.

Por ejemplo para calcular $(0,95)^2$ hacemos

$0,95 \quad x^y \quad 2 = y$ obtenemos el resultado.

¿Por qué para $(-2)^3$ la calculadora da -8 y para $(-2)^{0,5}$ se encapricha y da error?

La media y la calculadora

Las calculadoras que tienen funciones estadísticas permiten calcular la media de manera muy simple.

En la máquina debe aparecer la notación SD en la parte superior de la pantalla.

Para acumular los datos hacemos.

1er. dato x frecuencia $M+$

2do. dato x frecuencia $M+$

etcétera.

Luego de ingresar todos los datos, apretamos la tecla \bar{x} y obtenemos la media buscada.

Capítulo

14

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

14.1 FUNCIONES

El concepto de función es muy importante en Matemática. En matemáticas elementales una función, establece usualmente una correspondencia entre dos conjuntos de números tales que 2 pares ordenados diferentes no tienen el mismo primer elemento.

Existen muchas maneras de establecer esa correspondencia ya sea por tablas gráficas, fórmulas etc.

- *) El costo del envío de un paquete por correo, está determinado por su peso. Un empleado postal puede estimar el precio del envío mediante el uso de una tabla en la que está indicado el costo para cada peso.
- **) Las gráficas se utilizan para relacionar datos estadísticos como por ejemplo, el número de estudiantes que cursan trigonometría en determinados años.
- ***) La fórmula, $A = \pi R^2$, permite calcular el área de un círculo si se conoce el radio (R).

Note que cada uno de los métodos anteriores establece una correspondencia entre dos conjuntos de números.

UNA FUNCIÓN CONSTA DE TRES PARTES

1. Un conjunto llamado "Dominio" de la función.
2. Un conjunto asociado llamado "Recorrido" de la función cada elemento de ese conjunto es la imagen de cuando menos un elemento del Dominio, pero no puede existir 2 imágenes para un sólo elemento del Dominio todo conjunto que contiene (propio o impropriamente) al recorrido recibe el nombre de Codominio, Contradominio o Rango de la función.
3. En cursos más avanzados una función se define en términos de conjuntos como sigue.

14.1.1 DEFINICIÓN

Una función es un conjunto de pares ordenados tales que para cada primer elemento del par (x, y) existe un segundo elemento determinado en forma única. El conjunto de los primeros elementos se llama **Domnio** y de los segundos **Recorrido o Rango**.

14.1.2 NOTACIÓN

Para las funciones se utilizan notaciones especiales. La regla empleada se designa comúnmente por $f, g, t, \text{sen}, \text{lg}$ y otros símbolos. La letra " x " representa generalmente un elemento arbitrario del dominio de la función y recibe el nombre de variable independiente. La letra " y " se utiliza comúnmente para representar una **imagen** arbitraria y recibe el nombre de variable dependiente.

El símbolo $f(x)$ denota la imagen asignada a " x " por la función f y existe dos maneras de leerlo:

$$("f \text{ en } x" \quad \text{y} \quad "f \text{ de } x")$$

Ejemplo 1) Si tenemos los conjuntos, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Luego, una función de A en B , se escribe como:

$$f = \{ (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8) \}$$

Pares Ordenados.

Nota: Al primero de los conjuntos se le llama "Conjunto de Partida" y al segundo se le llama "Conjunto de Llegada".

14.1.3 DOMINIO DE LA FUNCIÓN " f "

Se le representa como " D_f ", es el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados en una función, siendo estos:

$$D_f = \{1, 3, 5, 7\}$$

14.1.4 RANGO DE LA FUNCIÓN " f "

Se representa como " R_f " es el conjunto de los segundos elementos de los pares ordenados en una función, siendo estos:

$$R_f = \{2, 4, 6, 8\}$$

Ejemplo 2) . Dados los conjuntos, $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{p, q, r, s\}$

Luego, una función A en B , se escribe como $f = \{(a, p), (b, q), (c, r), (d, s)\}$

Domnio f (D_f).

$$D_f = \{a, b, c, d\}$$

Rango de f (R_f).

$$R_f = \{p, q, r, s\}$$

14.1.5 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Como una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) la representación gráfica se hace en el plano cartesiano.

Ejemplo 1 Grficar la función: $y = 2x - 1$, determinar su dominio y rango.

Resolución:

Para construir la gráfica en primer lugar se realiza la tabulación como veremos a continuación.

$$y = 2x - 1$$

Para:	$x = 0$	\rightarrow	$y = 2(0) - 1$	\rightarrow	$y = -1$
	$x = 1$	\rightarrow	$y = 2(1) - 1$	\rightarrow	$y = 1$
	$x = -1$	\rightarrow	$y = 2(-1) - 1$	\rightarrow	$y = -3$
	$x = 2$	\rightarrow	$y = 2(2) - 1$	\rightarrow	$y = 3$
	$x = -2$	\rightarrow	$y = 2(-2) - 1$	\rightarrow	$y = -5$

x	y
0	-1
1	1
-1	-3
2	3
-2	-5

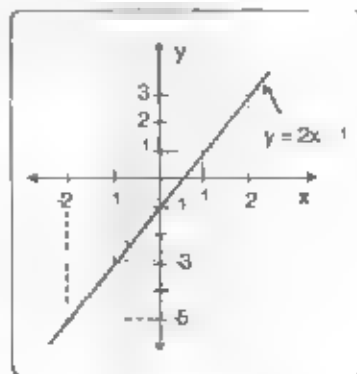
Luego, con los valores obtenidos los ubicamos en el plano cartesiano, veamos:

Domnio: Son todos los valores que puede tomar "x"

$$D_f = \{ \dots, -\infty, +\infty \}$$

Rango: Son todos los valores que puede tomar "y"

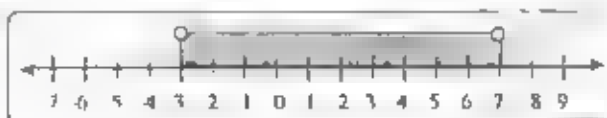
$$R_f = \{ \dots, -\infty, +\infty \}$$



Notas

1) La representación $\langle a, b \rangle$ se llama "intervalo abierta" y significa que se deben considerar a todos los números entre "a" y "b" asea se excluye a los extremos "a" y "b" (mejor dicho no se consideran).

Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in \langle 3, 7 \rangle$



Se deben considerar todos los números entre -3 y 7 pero no a los extremos (-3 y 7). La forma de expresar que los extremos no son parte del conjunto de números, es con dos bolitas vacías tal como se muestra en la figura

ii) La representación (a, b] se llama *intervalo cerrado* y significa que se debe considerar a todos los números desde "a" hasta "b" incluídos estos

Ejemplos 1 Representar gráficamente $x \in [2, 7]$



Las bolitas negreadas significa que en el conjunto de números, se debe considerar a los extremos.

Ejemplo 2: Trazar la gráfica de la función: $f = \{ (x, y) | y = \sqrt{x} \quad x \geq 0 \}$

Determinar su dominio y rango

Resolución

En primer lugar tabulamos dando valores a "x" \geq cero ya que si damos valores menores que cero, resultan imaginarios

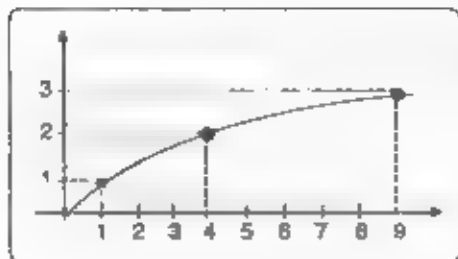
En segundo lugar los valores que le damos a "x", deben ser números que tengan raíz cuadrada exacta

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3

$$y = \sqrt{x}$$

Para.

$$\begin{array}{llll} x=0 & \rightarrow & y=\sqrt{0} & \rightarrow & y=0 \\ x=1 & \rightarrow & y=\sqrt{1} & \rightarrow & y=1 \\ x=4 & \rightarrow & y=\sqrt{4} & \rightarrow & y=2 \\ x=9 & \rightarrow & y=\sqrt{9} & \rightarrow & y=3 \end{array}$$



Luego, los valores obtenidos los ubicamos en el plano cartesiano, veamos:

Domnio

$$D_f = [0, +\infty)$$

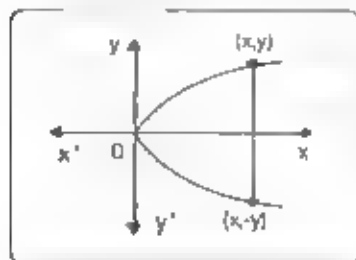
Rango:

$$R_f = [0, +\infty)$$

OBSERVACIONES

- i) En el campo de los números reales la raíz cuadrada sólo tiene valores positivos
- ii) Si tuviéramos un gráfico de la forma que se muestra, ya no sería una función, por tener 2 pares ordenados con el mismo primer elemento. veamos la gráfica, donde los pares ordenados son: (x, y) y $(x, -y)$

Tienen el mismo primer elemento



Propiedad:

La gráfica de toda función tiene la siguiente propiedad, cuando se traza una recta vertical por cualquier punto de su dominio intersecciona a la curva (gráfica) solamente en un punto.

Ejemplo 3: Sea $h((x, y)/y = |x|)$. Hallar el dominio y rango de "h" y dibujar la gráfica de "h"

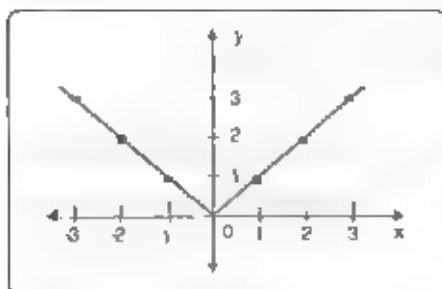
Resolución:

x	y
0	0
± 1	1
± 2	2
± 3	3

Por tabulación, obtenemos:

$y = |x|$ valor absoluto

Para $x = 0 \rightarrow y = |0| \rightarrow y = 0$
 $x = \pm 1 \rightarrow y = |\pm 1| \rightarrow y = 1$
 $x = \pm 2 \rightarrow y = |\pm 2| \rightarrow y = 2$
 $x = \pm 3 \rightarrow y = |\pm 3| \rightarrow y = 3$



Luego, los valores obtenidos los ubicamos en el plano cartesiano.

Domnio

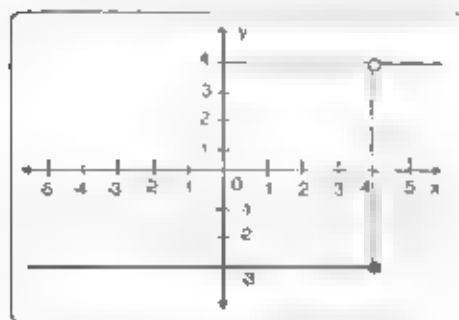
$D_h = \{ -\infty, +\infty \}$

Rango.

$R_h = \{ 0, +\infty \}$

Ejemplo 4: Encontrar el dominio y el rango de la función y trazar la gráfica

$$y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 4 \\ +4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Resolución

- La expresión dada se puede escribir así

$$y = -3; \quad \text{si } x \leq 4$$

$$y = +4; \quad \text{si } x > 4$$

Luego

Dominió:

$$D_f = \langle -\infty, +\infty \rangle = \mathbb{R}$$

Rango:

$$R_f = \{-3, +4\}$$

14.1.6 FUNCIÓN LINEAL

La función lineal es de la forma $f(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} = Numeros Reales). Son funciones lineales (de primer grado), las siguientes:

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = 3x + 5$$

$$h(x) = \frac{1}{3}x + 6 \text{ etc.}$$

La expresión gráfica de la función lineal es una recta. En caso de que una de las variables sea acotada, la gráfica de la función es una parte de una recta.

Para graficar una recta basta conocer dos de sus puntos. Los más apropiados son los interceptos.

Un intercepto con "x" es un punto común a la recta (o curva) y al eje x, para determinarlo en la ecuación dada se iguala a cero la variable "y".

- Un intercepto con "y" es un punto común a la recta (o curva) y al eje y, para determinarlo en la ecuación dada se iguala a cero la variable "x".

Ejemplo 1° Graficar y hallar el dominio y rango de $f(x) = 2x - 3$

Resolución

Como es una función lineal bastará ayudarnos calculando las intersecciones con los ejes

Intersección con el eje "y"

$$\begin{aligned} \text{Si } x = 0 &\rightarrow f(x) = 2x - 3 \\ &y = 2x - 3 \\ &y = 2(0) - 3 \\ &y = -3 \end{aligned}$$

- Intersección con el eje "x"

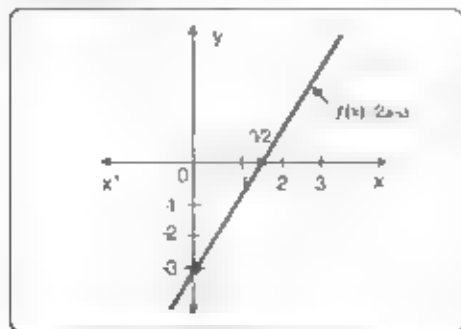
$$\begin{aligned} \text{Si } y = 0 &\rightarrow f(x) = 2x - 3 \\ &y = 2x - 3 \\ &0 = 2x - 3 \\ &x = 3/2 \end{aligned}$$

x	$f(x) = y$
0	3
$3/2$	0

→ (Intercepto con y)

→ (Intercepto con x)

La función pasará por los puntos (0,3) y (3/2,0) y se tendrá



Domínio $= < -\infty, +\infty > = \mathbb{R}$

Rango $= < -\infty, +\infty > = \mathbb{R}$

Ejemplo 2 Graficar y hallar el dominio y rango de $g(x) = 3x + 5 \quad x \in [-2, 4]$

Resolución

En este caso la gráfica de esta función es un segmento ya que la variable "x" es acotada por el intervalo $[-2, 4]$

$$\begin{aligned} & \text{_____ } x < 4 \\ & \text{_____ } x \geq -2 \end{aligned}$$

Ahora hallamos los extremos del segmento así: $y = 3x + 5$

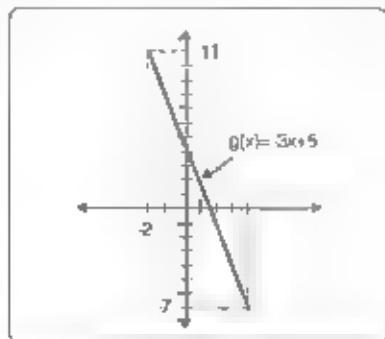
Para: $x = -2 \rightarrow y = 3(-2) + 5 \rightarrow \boxed{y = -1}$

Para: $x = 4 \rightarrow y = 3(4) + 5 \rightarrow \boxed{y = 17}$

x	$y = g(x) = 3x + 5$
$[-2]$	$[-1]$
< 4	$17 >$

Domínio: $Dg = [-2, 4]$

Rango: $Rg = [-1, 17]$



Ejemplo 3 Graficar y hallar el dominio y rango de $h(x) = 3x + 1 \quad 2 \leq x < 5$

Resolución

Trabajando tan igual que el problema anterior obtenemos $h(x) = 3x + 1$ $2 \leq x < 5$

$$\boxed{y = 3x + 1} \quad \begin{cases} i) & x \geq 2 \\ ii) & x < 5 \end{cases}$$

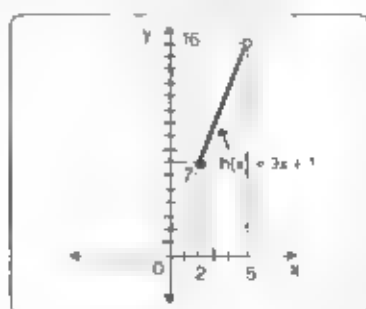
Luego: Para $\boxed{x = 2} \rightarrow y = 3(2) + 1 \rightarrow \boxed{y = 7}$

Para $\boxed{x = 5} \rightarrow y = 3(5) + 1 \rightarrow \boxed{y = 16}$

x	$y = h(x) = 3x + 1$
[2	7]
< 5	16>

Dominio $Dh = [2, 5 >$

Rango $Rh = [7, 16 >$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 46

Graticar y hallar el dominio y rango de las siguientes funciones lineales

1. $f(x) = 2x - 1$	si $x \in [-1, 3]$
2. $f(x) = 5x + 3$	si $x \in [-2, 1]$
3. $g(x) = -3x + 2$	si $x \in [-3, 1]$
4. $g(x) = -4x + 5;$	si $x \in [-1, 3]$
5. $h(x) = \frac{2}{3}x + 2;$	si $x \in [-3, 6 >$
6. $h(x) = \frac{1}{2}x + 3;$	si $x \in [-2, 4 >$

14.1.7 FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a, b, y c \in \mathbb{R}$

Son funciones cuadráticas o de segundo grado las siguientes

$$f(x) = 3x^2 - x \quad \dots \quad g(x) = 9x^2 + 2 \quad \dots \quad h(x) = x^2 + 6x - 1 \quad \dots \quad \text{etc}$$

La representación gráfica de una función cuadrática es una Parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo

La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede ser escrita de la forma $(x - h)^2 = M(y - k)$ Donde el punto (h, k) es vértice de la parábola

En la ecuación $(x - h)^2 = M(y - k)$

Si $M > 0$ entonces la parábola se abre hacia arriba

Si $M < 0$ entonces la parábola se abre hacia abajo

Ejemplo 1 Ubica en el plano cartesiano el vértice $V(h, k)$. Halla el intercepto con el eje y .
Esboza la gráfica de la ecuación

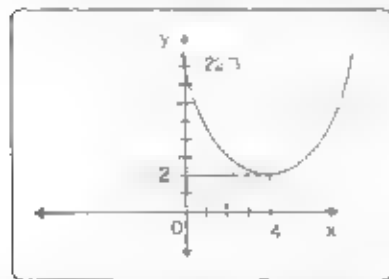
$$(x - 4)^2 = 3(y - 2)$$

Resolución

La ecuación $(x - 4)^2 = 3(y - 2)$ tiene la forma $(x - h)^2 = M(y - k)$

Siendo $h = 4$, $k = 2$ y $M = 3$

Como "M" es mayor que cero, la parábola se abre hacia arriba así



Para hallar el intercepto con "y" hacemos $x = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 &= 3(y - 2) \\ (0 - 4)^2 &= 3(y - 2) \\ 16 &= 3y - 6 \\ 22 &= 3y \\ y &= \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Ubica en el plano cartesiano el vértice $V(h, k)$. Halla el intercepto con el eje "y".
Esboza la gráfica de la ecuación

$$(x + 4)^2 = 2(y + 1)$$

Resolución

La ecuación

$$(x + 4)^2 = -2(y + 1) \quad \text{tiene la forma} \quad (x - h)^2 = M(y - k)$$

Por comparación: $h = -4$ $k = -1$ y $M = -2$

Como $M < 0$ la parábola se abre hacia abajo, veamos

Para hallar el intercepto con "y" hacemos $x = 0$ obteniendo

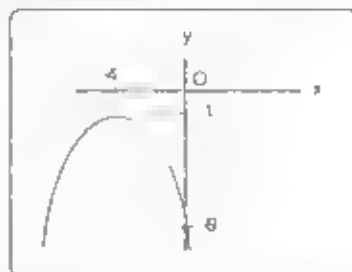
$$(0 + 4)^2 = -2(y + 1)$$

$$(0 + 4)^2 = -2(y + 1)$$

$$16 = -2(y + 1)$$

$$-8 = y + 1$$

$$y = -9$$



Ejemplo 3 Graficar y hallar el dominio y rango de $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Resolución

"Completando Cuadrados" doy a la ecuación

$$y = 3x^2 - 6x + 5, \quad \text{a forma} \quad (x - h)^2 = M(y - k)$$

Para completar cuadrados se aplican los siguientes pasos

- a) El coeficiente de x^2 debe ser 1 para eso dividimos entre 3 a cada término de la ecuación, veamos

$$\frac{y}{3} = \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{3} + \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}y = x^2 - 2x + \frac{5}{3} \quad (1)$$

A, coeficiente de " x " es 2 le sacamos mitad y se eleva al cuadrado así.

$$\text{Coeficiente de "x"} = 2 \quad \text{su mitad} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Elevamos al cuadrado} = 1^2 = 1$$

Luego, le sumamos y le restamos el resultado 1 hallado a la expresión (1). Obteniendo.

$$\frac{1}{3}y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}y = \underbrace{(x-1)^2 - 1 + \frac{5}{3}}_{(x-1)^2 - \frac{1}{3}} = (x-1)^2 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}y = (x - 1)^2 + \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad (x - 1)^2 = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} (x - 1)^2 & = & \frac{1}{3}(y - 2) \\ + & + & + \end{array} \right]$$

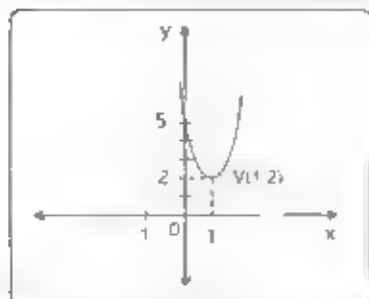
Está expresión tiene la forma: $(x - h)^2 = M(y - k)$

Por comparación: $h = 1$, $k = 2$ y $M = \frac{1}{3}$

- El vértice de la parábola es $V(h, k) = V(1, 2)$

Como $M > 0$ la parábola se abre hacia arriba veamos

Para hallar el intercepto "y" hacemos $x = 0$, obteniendo



$$(x - 1)^2 = \frac{1}{3}(y - 2)$$

$$(0 - 1)^2 = \frac{1}{3}(y - 2) \rightarrow 1 = \frac{1}{3}(y - 2)$$

$$3 = y - 2 \quad + \quad y = 5$$

$$\text{Dominio: } Df = \mathbb{R}$$

$$\text{Rango: } Rf = [2, +\infty)$$

Ejemplo 4. Graficar y hallar el dominio y rango de $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

Resolución

- Completando cuadrados* a la expresión $y = 2x^2 - 12x + 22$ el coeficiente de x^2 debe ser 1. Para conseguirlo dividimos entre 2 a cada término de dicha expresión as

$$\frac{y}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{12x}{2} + \frac{22}{2}$$

$$\frac{1}{2}y = x^2 - 6x + 11 \quad (I)$$

Al coeficiente de "x" le sacamos mitad y luego lo elevamos al cuadrado así:

$$\text{Coeficiente de "x"} = 6$$

$$\text{sacamos mitad} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Elevamos al cuadrado} = 3^2 = 9$$

Luego, le sumamos y le restamos el resultado hallado, a la expresión (I) obteniendo

$$\frac{1}{2}y = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + 9 + 11 \quad + \quad \frac{1}{2}y = \underbrace{x^2 - 2(x)(3) + 3^2}_{(x-3)^2} + 2$$

$$\frac{1}{2}y = (x - 3)^2 + 2 \quad \rightarrow \quad (x - 3)^2 = \frac{1}{2}y - 2$$

$$\boxed{(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y - 4)}$$

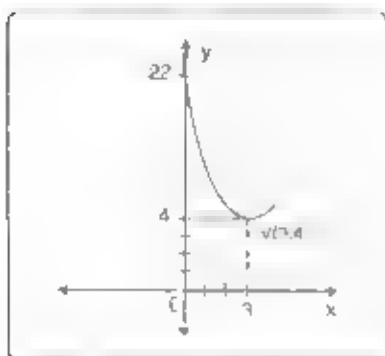
Esta última expresión tiene la forma $(x - h)^2 = M(y - k)$

Por comparación: $h = 3$, $k = 4$ y $M = \frac{1}{2}$

- El vértice de la parábola es $V(h, k) = V(3, 4)$

Como $M > 0$ la parábola se abre hacia arriba veamos

Para hallar el intercepto con "y" hacemos $x = 0$ obteniendo



$$(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y - 4)$$

$$(0 - 3)^2 = \frac{1}{2}(y - 4) \rightarrow 9 = \frac{1}{2}(y - 4)$$

$$18 = y - 4$$

$$y = 22$$

Luego: Dominio: $Df = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Rango: $Rf = [4, +\infty)$

Observación: \mathbb{R} es el conjunto de todos los números reales

Ejemplo 5 Graficar hallar el dominio y el rango de $g(x) = 2x^2 - 16x + 29$ $x \in [1.5, \infty)$

Resolución

*Completando cuadrados a la expresión $y = 2x^2 - 16x + 29$ el coeficiente de x^2 debe ser 1 para conseguirlo dividimos entre 2 a cada término de la expresión es:

$$\frac{y}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{16x}{2} + \frac{29}{2}$$

$$\frac{y}{2} = x^2 - 8x + \frac{29}{2} \quad (1)$$

Luego, al coeficiente de "x" le sacamos mitad y lo elevamos al cuadrado así:

Coeficiente de "x" = 8; sacamos mitad y lo elevamos al cuadrado así:

$$\text{Coeficiente de "x"} = 8 \quad \text{sacamos mitad} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Elevamos al cuadrado} = 4^2 = 16$$

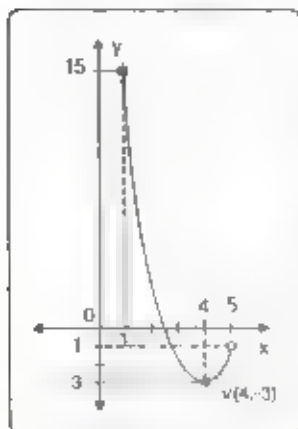
Luego, le sumamos y le restamos el resultado hallado, a la expresión (I) obteniendo:

$$\frac{y}{2} = \frac{x^2 - 8x + 16}{2} + \frac{16 + \frac{29}{2}}{2} \quad + \quad \frac{y}{2} = \frac{x^2 - 2(x)(4) + 4^2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{y}{2} = (x - 4)^2 - \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad (x - 4)^2 = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$

$$(x - 4)^2 = \frac{1}{2}(y + 3)$$

Esta última expresión tiene la forma $(x - h)^2 = M(y - k)$



Por comparación: $h = 4$, $k = -3$ y $M = \frac{1}{2}$

- El vértice de la parábola $V(h, k) = V(4, -3)$

Como $M > 0$, la parábola se abre hacia arriba, veamos

- Como la función $g(x) = 2x^2 - 16x + 29$

Esta definida sólo para $x \in [1, 5]$ hallamos los puntos cuyas primeras componentes son 1 y 5

Tabulando

$$\text{Para } [x = 1] \quad y = 2(1)^2 - 16(1) + 29 \quad \rightarrow \quad y = 15$$

$$\text{Para } [x = 5] \quad y = 2(5)^2 - 16(5) + 29 \quad \rightarrow \quad y = -1$$

Luego Dominio $D_g = [1, 5]$

Rango $R_g = [-1, 15]$

x	y
1	15
5	-1

(Cerrado)

(Abierto)

Ejemplo 6 Graficar hallar el dominio y el rango de $h(x) = x^2 + 10x + 19$ $x \in (-7, 1)$

Resolución

"Completando cuadrados" a la expresión $y = x^2 + 10x + 19$ el coeficiente de x^2 debe ser 1

En este caso ya lo tenemos. Además al coeficiente de "x" se le saca su mitad y luego se le eleva al cuadrado así:

$$\text{Coeficiente de "x"} = 10 \quad \text{sacamos mitad} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{Elevamos al cuadrado} \quad 5^2 = 25$$

Luego le sumamos y le restamos el resultado hallado, a la expresión (x) obteniendo

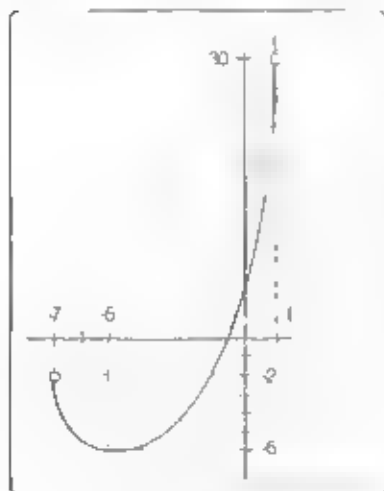
$$y = x^2 + 10x + 25 - 25 + 19 \rightarrow y = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 - 6$$

$$y = (x + 5)^2 - 6 \quad + \quad (x + 5)^2 = y + 6$$

$$\text{Donde} \quad (x + 5)^2 = 1(y + 6)$$

Esta última expresión tiene la forma $(x - h)^2 = M(y + k)$

$$\text{Por comparación:} \quad h = -5 \quad , \quad k = -6 \quad y \quad M = 1$$



- El vértice de la parábola $V(h, k) = V(-5, -6)$

Como $M > 0$, la parábola se abre hacia arriba veamos

- Como la función $h(x) = x^2 + 10x + 19$

Esta definida sólo para $x \in (-7, 1)$ halla los puntos cuyas primeras componentes son: -7, -1

Tabulando

$$\text{Para } x = -7 \rightarrow y = (-7)^2 + 10(-7) + 19 \rightarrow \boxed{y = -2}$$

$$\text{Para } x = -1 \rightarrow y = (-1)^2 + 10(-1) + 19 \rightarrow \boxed{y = 30}$$

x	y
< -7	30
< -1	-2

(Cerrado)

(Abierto)

$$\text{Luego:} \quad \text{Dominio} \quad Dh = (-7, 1)$$

$$\text{Rango} \quad Rh = [-2, 30)$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 47

- A. Ubica en el plano cartesiano el vértice $V(h,k)$, halla el intercepto con el eje y. Esboza la gráfica de las siguientes ecuaciones

1. $(x-3)^2 = 3(y-1)$

2. $(x-5)^2 = \frac{1}{3}(y+3)$

3. $(x+1)^2 = -2(y+4)$

4. $(x+4)^2 = 5y$

5. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}(y-5)$

6. $(x-1)^2 = \frac{1}{2}y$

7. $x^2 = y+1$

8. $(x-5)^2 = -2y$

- B. Para cada función siguiente

- "Completa cuadrados" y date la forma $(x-h)^2 = M(y-k)$
- Halla su intercepto con el eje y. Graficala
- Halla su dominio y su rango

9. $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

10. $f(x) = 2x^2 - 10x + 13$

11. $f(x) = -2x^2 - 4x - 6$

12. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 12$

13. $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{13}{3}$

14. $f(x) = 2x^2 - 6x + 7, x \in [1,4]$

15. $g(x) = -2x^2 - 8x - 5, x \in [3,10]$

16. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2, x \in [-1,4]$

17. $h(x) = 2x^2 + 4x + 11, x \in [-4,1]$

18. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{21}{2}, x \in [-2,6]$

RESPUESTAS TALLER

9. $V(1,5)$

Dominio: $Df = \mathbb{R}$
Rango: $Rf = [5, +\infty)$

10. $V = (5/2, -1/2)$

Dominio: $Df = \mathbb{R}$
Rango: $Rf = [-1/2, +\infty)$

11. $V(-1,-4)$

Dominio: $Df = \mathbb{R}$
Rango: $Rf = [-4, -\infty)$

12. $V(4,4)$

Dominio: $Df = \mathbb{R}$
Rango: $Rg = [4, +\infty)$

13. $V(3, -4/3)$

Dominio: $Dg = \mathbb{R}$
Rango: $Rg = [-4/3, +\infty)$

14. $V\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Dominio: $[1,4]$
Rango: $[, 15]$

15. $V(2, 3)$ Dominio: $[3, 1>$
Rango: $15, \wedge$

16. $V(1, 3/2)$ Dominio: $[-1, 4]$
Rango: $2, 6]$

17. $V(1, 9)$ Dominio: $<-4, 1>$
Rango:

18. $V(3, -6)$ Dominio: $<2, 6]$
Rango:

14.2 OPERACIONES CON FUNCIONES

A continuación estudiaremos la adición, sustracción y multiplicación de funciones

1. La función suma se denota por $(f + g)(x)$ y se define por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in (D_f \cap D_g)$$

2. La función diferencia se denota por $(f - g)(x)$ y se define por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in (D_f \cap D_g)$$

3. La función producto se denota por $(f \cdot g)(x)$ y se define por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in (D_f \cap D_g)$$

Ejemplo 1 Dadas las funciones $f(x) = x + 6, \quad x \in <2, 7];$
 $g(x) = x - 2; \quad x \in [3, 12>$

Definir y graficar la función $f + g$

Resolución

$$\text{Dados } \begin{cases} f(x) = x + 6; & x \in <2, 7] \\ g(x) = x - 2; & x \in [3, 12> \end{cases}$$

$$\text{Luego } (f + g)(x) = 2x + 4 \rightarrow y = 2x + 4 \quad (\text{Nueva función})$$

• El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g



Luego $D(f + g) = [3, 7]$

$$(f + g)(x) = 2x + 4, \quad x \in [3, 7]$$

$$y = 2x + 4, \quad x \in [3, 7]$$

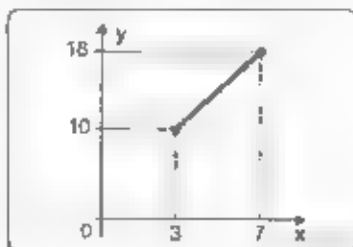
Ahora calculamos el rango de la nueva función: $y = 2x + 4$

Para: $x = 3 \rightarrow y = 2(3) + 4 \rightarrow y = 10$

Para: $x = 7 \rightarrow y = 2(7) + 4 \rightarrow y = 18$ Rango: $R(f + g) = [10, 18]$

La gráfica de la nueva función sería

x	y
3	10
7	18



Ejemplo 2 Determinar $(f - g)(x)$, gráfica, halla su dominio y rango.

$$f(x) = 3x + 2, \quad x \in [-4, 5>$$

$$g(x) = x - 3, \quad x \in [-2, 6]$$

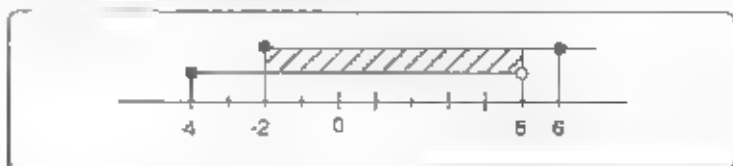
Resolución:

Dados $\begin{cases} f(x) = 3x + 2, & x \in [-4, 5> \\ g(x) = x - 3, & x \in [-2, 6] \end{cases}$

Luego $(f - g)(x) = (3x + 2) - (x - 3) = 3x + 2 - x + 3$

$$y = 2x + 5 \quad (\text{Nueva función})$$

El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g , veamos



Luego: $D(f - g) = [-2, 5>$

$$(f - g)(x) = 2x + 5; \quad x \in [-2, 5>$$

$$y = 2x + 5, \quad x \in [-2, 5]$$

Ahora, calculamos el rango de la nueva función: $y = 2x + 5$

Para $x = -2 \rightarrow y = 2(-2) + 5 \rightarrow y = 1$

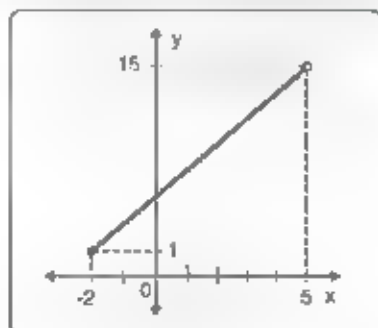
Para: $x = 5 \rightarrow y = 2(5) + 5 \rightarrow y = 15$

Rango

$$R(f \cdot g) = [1, 15]$$

La gráfica de la nueva función sería

x	y
$[-2, 1]$	
< 5	$15 >$



Ejemplo 3] Determinar, $(f \cdot g)(x)$, gráfica, halla su dominio y rango.

$$f(x) = x + 1, \quad x \in [3, 4]$$

$$g(x) = x - 3, \quad x \in [-1, 5]$$

Resolución:

$$\text{Dados } \begin{cases} f(x) = x + 1 & ; & x \in [-3, 4] \\ g(x) = x - 3 & & x \in [-1, 5] \end{cases}$$

Luego: $(f \cdot g)(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (\text{Nueva función})$$

• El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y g , veamos.



Luego: $D(f \cdot g) = [-1, 4]$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 - 2x - 3, \quad x \in [-1, 4]$$

$$y = x^2 - 2x - 3, \quad x \in [-1, 4]$$

Ahora para graficar

A la función: $y = x^2 - 2x - 3$, le damos la forma de $(x - h)^2 = M(y - k)$ "Completando cuadrados"

$$y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3; \quad x \in [-1, 4]$$

$$y = (x - 1)^2 - 4 \quad \rightarrow \quad (x - 1)^2 = 1(y + 4)$$

Por comparación:

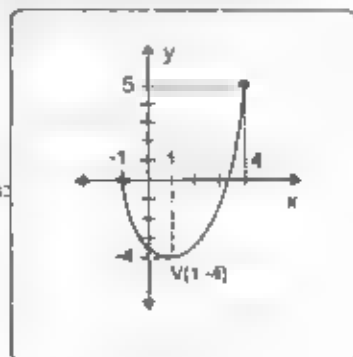
$$\left. \begin{aligned} (x - 1)^2 &= 1(y + 4) \\ (x - h)^2 &= M(y - k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow V(h, k) = V(1, -4)$$

Como $M > 0$, la parábola se abre hacia arriba veamos:

De la función: $y = x^2 - 2x - 3$

Para: $x = -1 \rightarrow y = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$

Para: $x = 4 \rightarrow y = (4)^2 - 2(4) - 3 = 5$



x	y
-1	0
4	5

Luego:

$$\text{Rango } R(f \cap g) = [-4, 5]$$

Ejemplo 4: Dadas las funciones. $f(x) = x + 7$ $x \in [1, 3]$
 $g(x) = x - 3$ $x \in < 1, 6]$

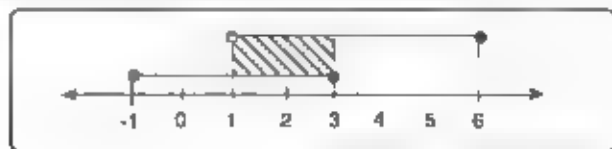
Determinar $(f \cap g)(x)$, graficala. Halla su dominio y su rango.

Resolución:

$$\text{Dados: } \begin{cases} f(x) = x + 7, & x \in [1, 3] \\ g(x) = x - 3, & x \in < 1, 6] \end{cases}$$

Luego: $(f \cap g)(x) = (x + 7) - (x - 3) = 10 \Rightarrow y = 10$ (Nueva función)

* El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g .



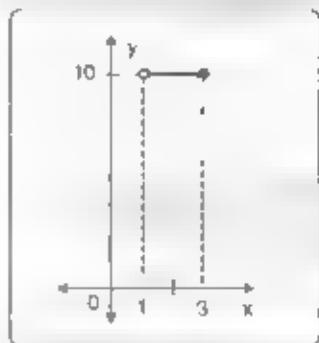
Luego $D(f \cdot g) = (-1, 3]$

$$(f \cdot g)(x) = 10; \quad x \in (-1, 3]$$

$$y = 10 \quad x \in (-1, 3]$$

La gráfica de la nueva función sería

x	y
<1	$10 >$
$[3$	$10]$



Ejemplo 5 Dada las funciones $f(x) = 2x^2 - 1 \quad x \in (-4, 5]$
 $g(x) = x - 2 \quad x \in [1, 6 >$

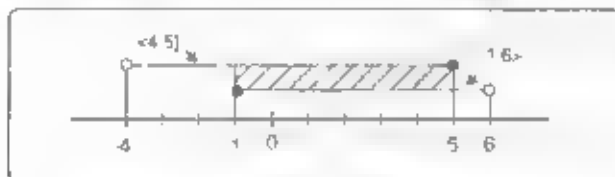
Determinar $(f + g)(x)$ gráficamente. Halla su dominio y su rango

Resolución

$$\text{Dado: } \begin{cases} f(x) = 2x^2 - 1 & x \in (-4, 5] \\ g(x) = x - 2 & x \in [1, 6 > \end{cases}$$

$$\text{Luego } (f + g)(x) = x^2 - 3 \quad + \quad \boxed{y = x^2 - 3} \quad (\text{Nueva función})$$

• El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g



Luego $D(f + g) = [-1, 5]$

$$\therefore (f + g)(x) = x^2 - 3; \quad x \in [-1, 5]$$

$$\boxed{y = x^2 - 3; \quad x \in [-1, 5]}$$

Ahora para graficar a la función $y = x^2 - 3$ le damos la forma de $(x - h)^2 = M(y - k)$ así:

$$y = x^2 - 3 \rightarrow y + 3 = x^2 \rightarrow (y + 3) = (x + 0)^2$$

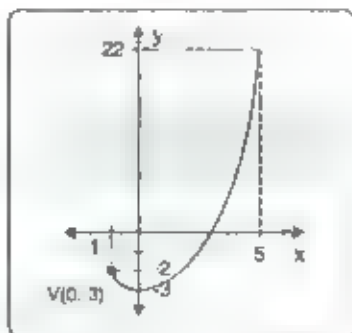
$$(x + 0)^2 = 1(y + 3)$$

Por comparación $h = 0 \quad k = -3 \quad M = 1 \quad + \quad V(h, k) = V(0, -3)$

Como $M > 0$, la parábola se abre hacia arriba, veamos.

Por tabulación

x	$y = x^2 - 3$
-1	-2
5	22



Luego: Dominio: $(f + g)(x) = [-1, 5]$

Rango $(f + g)(x) = [-3, 22]$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 48

1. Dadas las funciones.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, & x &\in [-2, 7], \\ g(x) &= x - 3; & x &\in [-4, 5] \end{aligned}$$

Determinar $(f + g)(x)$ gráficamente, hallar su dominio y su rango.

2. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 3, & x &\in <-1, 3> \\ g(x) &= x - 2; & x &\in <-3, 1> \end{aligned}$$

Determinar $(f + g)(x)$ gráficamente, hallar su dominio y su rango.

3. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x + 3; & x &\in <-4, 3>, \\ g(x) &= 3x - 4; & x &\in [-2, 5] \end{aligned}$$

Determinar $(f + g)(x)$ gráficamente, hallar su dominio y su rango.

4. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 2; & x &\in <-\infty, 2] \\ g(x) &= 2x - 2; & x &\in [2, +\infty) \end{aligned}$$

Determinar $(f - g)(x)$ gráficamente, hallar su dominio y su rango.

5. Dadas las funciones.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 5; & x &\in [-4, 5], \\ g(x) &= x - 2; & x &\in [2, 6] \end{aligned}$$

Determinar $(f - g)(x)$ gráficamente, hallar su dominio y rango.

6. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 2; & x &\in <-5, 3> \\ g(x) &= -2x + 2; & x &\in [-3, 5] \end{aligned}$$

Determinar $(f - g)(x)$, gráficamente, hallar su dominio y rango.

7. Dadas las funciones $f(x) = x + 5$, $x \in [-4, 4>$,
 $g(x) = x - 2$, $x \in <-3, 5]$

Determinar $(f + g)(x)$, graficarlo, hallar su dominio y rango

8. Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $x \in [-3, 6]$,
 $g(x) = x + 1$, $x \in [-4, 2]$

Determinar $(f + g)(x)$, graficarlo, hallar su dominio y rango

9. Dadas las funciones $f(x) = x$, $x \in [-\infty, 2>$,
 $g(x) = 2x$, $x \in <-2, +\infty)$

Determinar $(f + g)(x)$, graficarlo, hallar su dominio y rango

10. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3$, $x \in [-3, 4]$,
 $g(x) = x^2 + 1$, $x \in <-6, 3]$

Determinar $(f + g)(x)$, graficarlo, hallar su dominio y rango

11. Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 + 3$, $x \in [-2, 5>$,
 $g(x) = x^2 - 2$, $x \in [-4, 2]$

Determinar $(f - g)(x)$, graficarlo, hallar su dominio y rango

12. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3$, $x \in [2, 3>$,
 $g(x) = 2x^2 - 3$, $x \in [-4, 1]$

Determinar $(f + g)(x)$, graficarlo, hallar su dominio

RESPUESTAS TALLER

- | | |
|---|---|
| 1. Dominio $(f + g) = [-2, 5]$
Rango $(f + g) = [-6, 8]$ | 7. Dominio $(f + g) = <-3, 4>$
Rango $(f + g) = [-49/5, 18>$ |
| 2. Dominio $(f + g) = <-1, 1>$
Rango $(f + g) = <-2, 4>$ | 8. Dominio $(f + g) = [-3, 2]$
Rango $(f + g) = [-4, 5]$ |
| 3. Dominio $(f + g) = [-2, 3>$
Rango $(f + g) = <-7, 3]$ | 9. Dominio $(f + g) = <-2, 2]$
Rango $(f + g) = [0, 8]$ |
| 4. Dominio $(f + g) = [-2, 2]$
Rango $(f + g) = [-10, 10]$ | 10. Dominio $(f + g) = [-3, 3]$
Rango $(f + g) = [4, 22]$ |
| 5. Dominio $(f - g) = [-2, 5>$
Rango $(f - g) = \{7\}$ | 11. Dominio $(f - g) = [-2, 2]$
Rango $(f - g) = [5, 9]$ |
| 6. Dominio $(f - g) = [-3, 3>$
Rango $(f - g) = <-3, 3]$ | 12. Dominio $(f + g) = [-2, 1]$
Rango $(f + g) = [0, 12]$ |

14.3 FUNCIÓN EXPONENCIAL

Veamos ahora como se define la función exponencial

Sea "a" un número real positivo diferente de 1 la función exponencial de base "a" está definida por

$$f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como quiera que $a > 0$, por la condición, entonces a^x es siempre positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto el rango de la función f está formado por todos los números reales positivos.

Esto significa en consecuencia que el rango de f está formado por el conjunto de todos los reales positivos.

En resumen, la función exponencial de base "a" es:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1$$

$$\text{con: } D_f = \mathbb{R} \quad y \quad R_f = \{0, +\infty\}$$

El rango nos indica que la gráfica de $f(x) = a^x$ se encuentra sobre el eje x

Como ejemplos podemos decir que las funciones definidas por

$$f(x) = 2^x; \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad h(x) = (\pi)^x; \quad k(x) = (0,1)^x$$

son funciones exponenciales, en cambio,

$$f(x) = (-2)^x; \quad g(x) = (1)^x; \quad h(x) = x^2; \quad k(x) = x^2$$

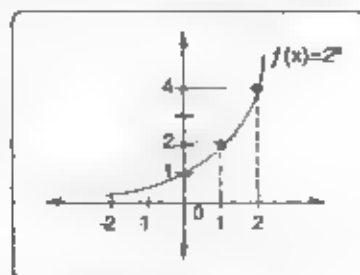
no son funciones exponenciales

Ejemplo 1) Dada la función exponencial por $f(x) = 2^x$, construir su gráfica, hallar el dominio y el rango.

Resolución:

Por tabulación.

x	$y = 2^x$	x	$y = 2^x$
0	$2^0 = 1$	1	$2^1 = 2$
1	$2^1 = 1/2$	2	$2^2 = 4$
-2	$2^{-2} = 1/4$	3	$2^3 = 8$
-3	$2^{-3} = 1/8$		



Domínio. $D_f = \mathbb{R}$

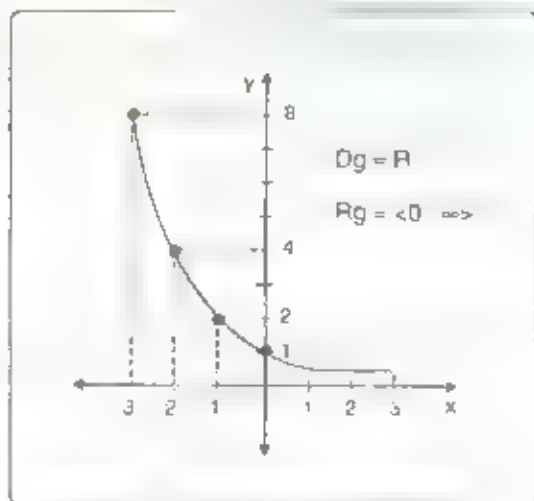
Rango. $R_f = \langle 0, +\infty \rangle$

Ejemplo 2! Construir la gráfica de la función exponencial definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ hallar el dominio y el rango

Resolución

Por tabulación

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	$(1/2)^0 = 1$
1	$(1/2)^1 = 1/2$
2	$(1/2)^2 = 1/4$
3	$(1/2)^3 = 1/8$
-1	$(1/2)^{-1} = 2$
-2	$(1/2)^{-2} = 4$
-3	$(1/2)^{-3} = 8$



Ejemplo 3! Para la siguiente función $f(x) = 2^{x+3}$, $x \in \langle -4, 1 \rangle$

Halla sus extremos y su intercepción con "y" graficala, halla su dominio y su rango

Resolución

Para hallar la intersección con el eje "y" hacemos $x = 0$

Luego $f(x) = 2^{x+3} \rightarrow y = 2^{0+3} = 2^3$

$$[y = 8]$$

x	y
$\langle -4, 1 \rangle$	$[1/2, 8]$
1	16

Por tabulación

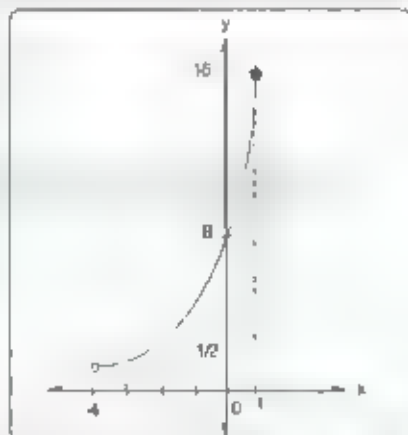
x	$y = 2^{x+3}$	-4	$2^{-4+3} = 1/2$
0	$2^{0+3} = 8$		
1	$2^{1+3} = 4$	1	$2^{-3} = 1/8$
2	$2^{2+3} = 2$	2	$2^{-2+3} = 2$
3	$2^{3+3} = 1$	3	$2^{-1+3} = 4$

Observaciones

1. Si la base " a " es un número positivo menor que 1, $f(x) = a^x$ disminuye a medida que el valor de " x " aumenta, es decir, la función es decreciente.
2. Si la base " a " es un número mayor que 1, $f(x) = a^x$ aumenta a medida que el valor de " x " aumenta, es decir, la función es creciente.

Dominió < -4]

Rango $< 1/2$ 16]



TALLER DE EJERCICIOS Nº 49

- A. Del siguiente grupo de funciones señala, cuáles son y cuáles no son funciones exponenciales e indique por qué

1. $f(x) = (2/1)^x$	2. $f(x) = (1/5)^x$	3. $f(x) = 1^x$
4. $g(x) = x^2$	5. $g(x) = (-3)^x$	

- B. Dadas las siguientes funciones construir sus gráficas

6. $f(x) = 3^x$	7. $f(x) = 2^{x+1}$	8. $f(x) = 10^x$
9. $g(x) = (1/5)^x$	10. $g(x) = 3^{x-1}$	11. $h(x) = (3/2)^{x+1}$

- C. Para cada función siguiente

- a) Halla sus extremos y su intercepción con el eje y
- b) Graficala, halla su dominio y su rango

12. $f(x) = 3^x$, $x \in [1, 3]$	15. $g(x) = (2/5)^x$, $x \in [1, 1]$
13. $f(x) = 2^{x+1}$, $x \in < -4, 3>$	16. $g(x) = (1,5)^{x-2}$, $x \in < -2, 2]$
14. $f(x) = 3(2^x)$, $x \in [-2, 3]$	

- D. Teniendo en cuenta la base de las siguientes funciones, indica si son crecientes o decrecientes

17 $f(x) = (\sqrt{2})^x$

18 $f(x) = (\pi)^x$

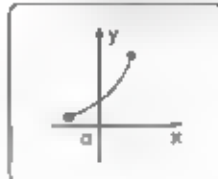
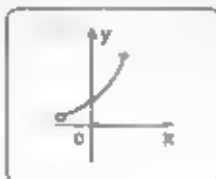
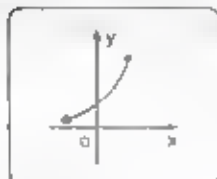
19 $f(x) = (0.5)^x$

20 $g(x) = (0.5)^x$

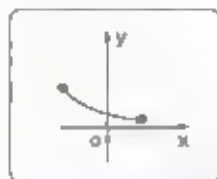
21 $g(x) = (3/\pi)^x$

RESPUESTAS TALLER

1. Sí es función exponencial
 2. Sí es función exponencial
 3. No es función exponencial porque la base debe ser diferente de 1
 4. No es función exponencial porque la base es una variable
 5. No es función exponencial porque la base es un número negativo
12. Dominio: $[-1, 3]$
 Rango: $[1/3, 27]$
13. Dominio: $<-4, 3]$
 Rango: $<1/8, 16]$
14. Dominio: $[-2, 3]$
 Rango: $[3/4, 24]$



15. Dominio: $[-1, 1]$
 Rango: $[2/5, 5/2]$
16. Dominio: $<-2, 2]$
 Rango: $[2/3, 27/8]$



17. Creciente
 18. Creciente
 19. Creciente
 20. Decreciente
 21. Decreciente

14.4 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

A la función inversa de $f(x) = a^x$, $a > 1$, $a > 0$, se le denomina función logarítmica de base "a".

Esta función logarítmica de base "a" es denotada por $\log_a x$.

Es decir:

$$f(x) = \log_a x$$

Por Ejemplo Dada $g(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ su inversa será $f(x) = \log_{4/5} x$

Veamos otros ejemplos

Si $g(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ su inversa será la función $f(x) = \log_{3/7} x$

Si $g(x) = \left(\frac{8}{5}\right)^x$ su inversa será la función $f(x) = \log_{8/5} x$

14.4.1 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

En la función $f(x) = \log_a x$, la variable "x" toma únicamente valores positivos

Ejemplo 1 Hallar el dominio y el rango de $f(x) = \log_2 x$

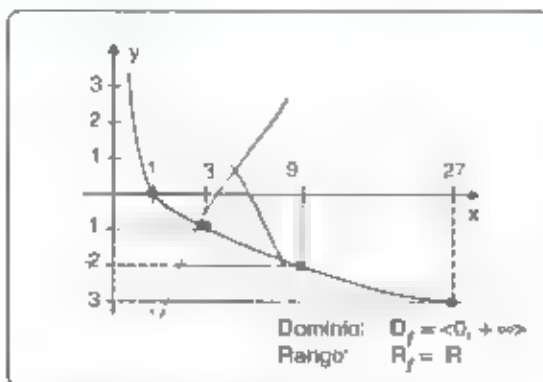
Resolución

Sabemos que: $f(x) = \log_2 x$
 $y = \log_2 x \rightarrow x = 2^y$ (Damos valores a esta expresión)

Recomendación Para este tipo de expresión es recomendable empezar a dar valores a la variable "y", veamos

Por tabulación

y	$x = 2^y$
0	$2^0 = 1$
-1	$2^{-1} = 1/2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$



Ejemplo 2 Hallar el dominio y el rango de $f(x) = \log_{1/3} x$

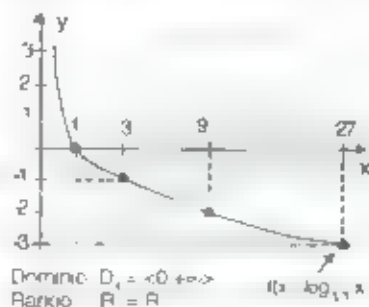
Resolución

Sabemos que: $f(x) = \log_{1/3} x$

$$y = \log_{1/3} x \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

Por tabulación

y	$x = (1/3)^y$
0	$(1/3)^0 = 1$
1	$(1/3)^1 = 3$
2	$(1/3)^2 = 9$
3	$(1/3)^3 = 27$
-1	$(1/3)^{-1} = 3$
-2	$(1/3)^{-2} = 1/9$
-3	$(1/3)^{-3} = 1/27$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 50

Hallar el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes

1. $f(x) = \log_4 x$
2. $y = 2 + \log_2 x$
3. $y = 3 \log_3 x$
4. $f(x) = \log_{3/2} x$
5. $g(x) = 1 + \log_{1/2} x$
6. $g(x) = \log_2 x, x \in [1/3, 27]$

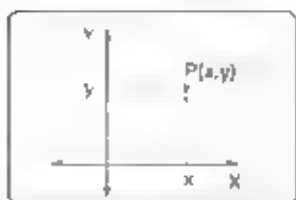
Capítulo

15

GEOMETRÍA
ANALÍTICA

15.1 LA LINEA RECTA

Para determinar la posición de un punto P en un plano se le asocia un par ordenado (x, y) de números reales, que constituyen sus coordenadas respecto de un sistema de ejes cartesianos



x	abscisa de P
y	ordenada de P
(x, y)	coordenadas de P

$$P(x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

15.1.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO

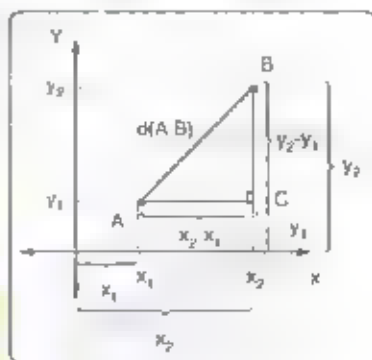
La distancia entre dos puntos A y B del plano se encuentra algebraicamente aplicando el Teorema Particular de Pitágoras en función de las coordenadas de esos puntos

En la figura se han trazado para ellos a los ejes coordenados por A y B respectivamente de modo que se ha formado el triángulo ABC rectángulo en C donde la medida de la hipotenusa AB corresponde a la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la que designamos por $d(A, B)$.

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$[d(A, B)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

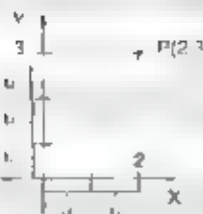
Por lo Tanto: $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



La distancia entre dos puntos se expresa en la **unidad de medida (u)** que se halla utilizado para construir el sistema cartesiano

¡ATENCIÓN!

La unidad de medida (u) que se utiliza para construir el sistema cartesiano es arbitraria



Ten presente que
 $d(A, B) = \text{med}(\overline{AB}) = AB$

Ejemplo 1 Calcular la distancia entre los puntos $A(4, 6)$ y $B(-2, -2)$

Resolución

Sea $(x_1, y_1) = (4, 6)$ $(x_2, y_2) = (-2, -2)$

$$\text{Luego } d(A, B) = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64}$$

$$d(A, B) = \sqrt{100} \Rightarrow \therefore d(A, B) = 10 \text{ u}$$

Ejemplo 2 Hallar la distancia entre los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(3, -2)$

Resolución

Sabemos que $P(-2, 1)$, $Q(3, -2)$

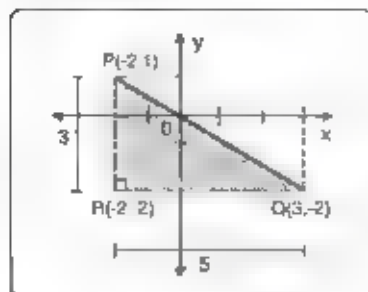


Reemplazamos dichos valores en la fórmula, obteniendo la distancia PQ

$$PQ = \sqrt{[(3) - (-2)]^2 + [(-2) - (1)]^2}$$

$$PQ = \sqrt{[3+2]^2 + [-3]^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \Rightarrow PQ = \sqrt{34}$$

Método Gráfico:



Ubicamos los puntos

$P(-2, 1)$ y $Q(3, -2)$, en el plano cartesiano, vemos

En el $\triangle PRO$ aplicamos el teorema de Pitágoras

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$

$$PQ^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

$$PQ = \sqrt{34}$$

Ejemplo 3 Hallar la distancia entre los puntos A(4, 1) y B(7, 3)

Resolución

Sabemos que



Reemplazamos dichos valores en la fórmula de distancia entre dos puntos obteniendo:

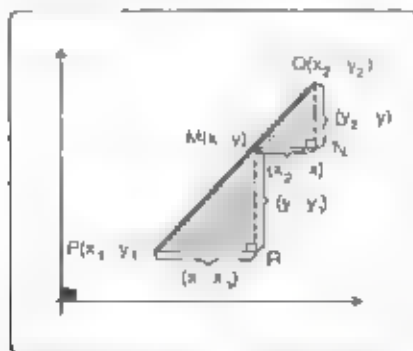
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[(7) - (4)]^2 + [(3) - (1)]^2} = \sqrt{[3]^2 + [2]^2}$$

$$AB = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = 5$$

$$AB = 5$$

15.1.2 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO



Sean los puntos dados P(x₁, y₁) y Q(x₂, y₂)

Debemos hallar las coordenadas del punto medio M(x, y) del segmento PQ debe cumplirse que

$$PM = MQ$$

$$\text{Osea: } \frac{PM}{MQ} = 1 \quad \dots (I)$$

Por semejanza del triángulos

$$\triangle PRM = \triangle MQO$$

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad (II)$$

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad (III)$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \rightarrow \quad x_2 - x = x - x_1$$

$$x_1 + x_2 = 2x$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Reemplazamos (I) en (II) $\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} + y_2 - y = y - y_1$

$$y + y_2 = 2y$$

$$\boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Por lo tanto las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son:

(Fórmulas)	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	(Abscisa del punto medio)	}	$M\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$
	$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	(Ordenada del punto medio)		

Ejemplo Dados los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-4, 5)$ hallar las coordenadas del punto medio del segmento PQ.

Resolución

Aplicando las fórmulas para punto medio de un segmento se tiene:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x = \frac{(2) + (-4)}{2} \rightarrow x = \frac{-2}{2} \quad x = -1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y = \frac{(3) + (5)}{2} \rightarrow y = \frac{8}{2} \quad y = 4$$

Luego, las coordenadas del punto medio del segmento PQ es $M(x, y) = M(-1, 4)$



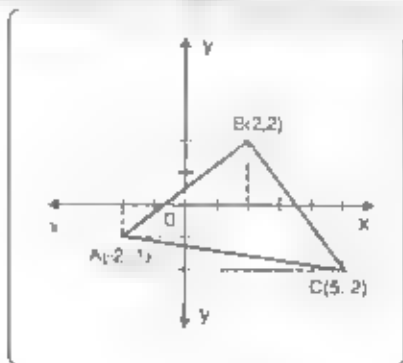
PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DISTANCIA Y PUNTO MEDIO



Problema 1 Demostrar que los puntos $A(-2, -1)$, $B(2, 2)$ y $C(5, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

Resolución

Ubicamos los puntos dados en el plano cartesiano, veamos:



Como se observará los lados AB y BC son iguales a 5, esto quiere decir que el triángulo ABC es isósceles.

Nota: Recordar que un Δ es isósceles, siempre y cuando tenga dos lados iguales.

• Por distancia tenemos

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[(2) - (-2)]^2 + [(2) - (-1)]^2}$$

$$AB = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$AB = 5$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

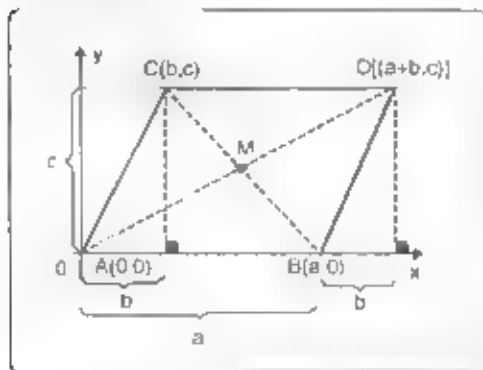
$$BC = \sqrt{[(5) - (2)]^2 + [(2) - (2)]^2}$$

$$BC = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$$

$$BC = 3$$

Problema 2 Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

Resolución:



- Sea el paralelogramo ABCD, como se indica en la figura.
- Las ordenadas de A y B son iguales, las ordenadas de C y D también son iguales.
- La abscisa de B es a, de C es b y de D es (a + b).

Para demostrar que las diagonales AD y CB se dividen mutuamente en partes iguales, determinaremos que los puntos medios de dichas diagonales coinciden.

Punto medio de AD es $M\left[\frac{0 + (a + b)}{2}, \frac{0 + c}{2}\right] = M\left[\frac{a + b}{2}, \frac{c}{2}\right]$ (1)

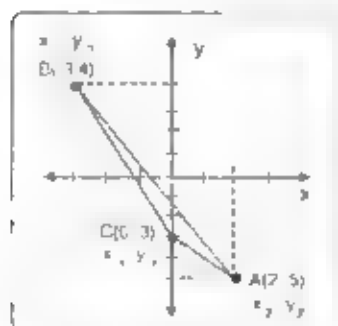
Punto medio de BC es $M\left[\frac{(a + b)}{2}, \frac{0 + c}{2}\right] = M\left[\frac{a + b}{2}, \frac{c}{2}\right]$ (2)

Como las expresiones (1) y (2) son iguales, esto quiere decir que las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

Problema 3 Hallar el perímetro del triángulo, cuyos vértices son los puntos

$$A(2, 5) \quad B(-3, 4) \quad C(0, 3)$$

Resolución



Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos

Cálculo de AB

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (4 - 5)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1}$$

$$AB = \sqrt{26}$$

Cálculo de AC

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AC = \sqrt{(0 - 2)^2 + (3 - 5)^2}$$

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4}$$

$$AC = \sqrt{8}$$

Cálculo de BC

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 3)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9 + 1}$$

$$BC = \sqrt{10}$$

Luego Perímetro $\triangle ABC$ = suma de sus 3 lados

$$\text{Perímetro } \triangle ABC = AB + AC + BC$$

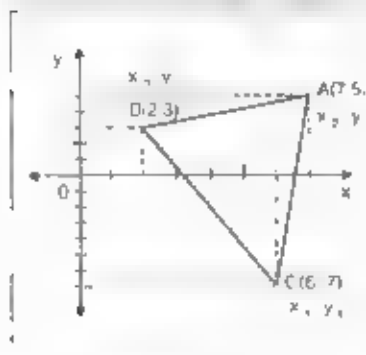
$$= \sqrt{26} + \sqrt{8} + \sqrt{10}$$

$$\text{Perímetro } \triangle ABC = \sqrt{26} + \sqrt{8} + \sqrt{10} \approx 10,7$$

Problema 4 Demostrar que los puntos $A(7, 5)$, $B(2, 3)$, $C(6, 7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Resolución

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos



Cálculo de BC

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$BC = \sqrt{[(2) - (6)]^2 + [(3) - (7)]^2}$$

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16}$$

$$BC = \sqrt{32}$$

Cálculo de AC

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AC = \sqrt{[(7) - (5)]^2 + [(5) - (7)]^2}$$

$$AC = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$$

$$AC = \sqrt{8}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[(2) - (5)]^2 + [(3) - (7)]^2}$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16}$$

$$AB = \sqrt{25}$$

Luego, para que el triángulo ABC sea rectángulo, debe cumplirse el teorema de Pitágoras o sea:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(\sqrt{8})^2 = (\sqrt{25})^2 + (\sqrt{32})^2$$

$$8 = 25 + 32 \rightarrow 8 = 57 \quad \text{(Si cumple)}$$

Problema 5 Halla el punto de abscisa 3, que diste 10 unidades del punto $(3, 6)$

Resolución

Sea $P(x, y)$, el punto pedido donde la abscisa $x = 3 \rightarrow P(3, y) = ?$ (*)

El punto conocido es: $(3, 6)$, al cual lo llamamos $Q(x_2, y_2)$

Por la fórmula de distancia:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PQ = \sqrt{[(3) - (3)]^2 + [6 - (y)]^2} \quad \text{pero } PQ = 10$$

$$10 = \sqrt{(-6)^2 + (6 - y)^2} \quad \text{elevamos ambos miembros al cuadrado}$$

$$(10)^2 = \left(\sqrt{(-6)^2 + (6 - y)^2} \right)^2$$

$$100 = (-6)^2 + (6 - y)^2 \Rightarrow 100 = 36 + (6 - y)^2$$

$$64 = (6 - y)^2$$

$$64 = 6^2 - 2(6)(y) + (y)^2$$

$$64 = 36 - 12y + y^2 \quad + \quad 28 = y^2 - 12y$$

$$0 = y^2 - 12y - 28, \text{ factorizamos por el método del aspa}$$

$$\begin{array}{r} y \quad \quad 14 \\ \quad \times \quad \quad \\ y \quad \quad +2 \end{array}$$

Donde: $(y - 14)(y + 2) = 0$ igualamos cada factor a cero

$$\text{i) } y - 14 = 0 \rightarrow \boxed{y = 14} \quad \text{ii) } y + 2 = 0 \rightarrow \boxed{y = -2}$$

Los valores, hallados para "y" los reemplazamos en (I)

$$P(3, y) = \begin{cases} P(3, 14) \\ P(3, -2) \end{cases}$$

Problema 5. Si A(4, 3), B(5, 2), C(4, 3) y D(3, 4). Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero ABCD.

Resolución

Ubicando los puntos dados en el sistema cartesiano, obtenemos la siguiente figura

Calculamos el punto medio "P" del segmento BD

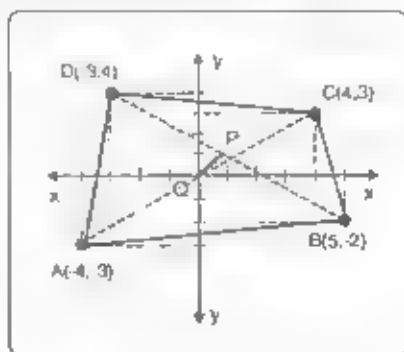
$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{(5) + (3)}{2}, \frac{(-2) + (4)}{2}\right)$$

$$\text{Punto medio de BD} = P(4, 1)$$

Calculamos el punto medio "Q" del segmento AC

$$Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) =$$



$$Q\left(\frac{4+(4)}{2}, \frac{(-3)+(3)}{2}\right)$$

Punto medio de AC = Q(0,0)

Ahora hallamos la longitud del segmento que une los puntos medios P y Q, siendo sus coordenadas, P(1,1) y Q(0,0)

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \underline{PQ = \sqrt{2}}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 51

Ejercicio 1 Representar en el sistema de coordenadas rectangulares, los siguientes puntos

A(2,3),	B(-3,1)	D(0,6)	y	E(5,-4)
---------	---------	--------	---	---------

Ejercicio 2 Representar en el sistema de coordenadas rectangulares, los triángulos de vértices

a) (0,0),	(1,5),	(4,2)
b) (2,3)	(5,7),	(3,4)
c) (3,0),	(-2,-3),	(1,4)

Ejercicio 3 Representar los polígonos de vértices

a) (-3,2)	(1,5),	(5,3),	(1,-2)	
b) (-5,0),	(-3,-4),	(3,-3)	(7,2),	(1,6)

Ejercicio 4 Hallar la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son

a) (4,1)	(3,-2)	c) (2,6),	(2,2)
b) (-7,4)	(1,-11)	d) (-1,5),	(2,3)

Ejercicio 5 Hallar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son

a) $(2, 5)$	$(4, 3)$	$(7, 2)$
b) $(1, 2)$	$(4, 2)$	$(3, 5)$

Ejercicio 6 Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son isósceles

a) $(2, 2)$	$(-3, 1)$	$(1, 6)$
b) $(2, 4)$	$(5, 1)$	$(6, 5)$

Ejercicio 7 Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectangulares

a) $(0, 9)$	$(-4, 1)$	$(3, 2)$
b) $(10, 6)$	$(3, 2)$	$(6, -5)$

Ejercicio 8 Si $A(2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$ y $D(2, -8)$ Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero ABCD

Ejercicio 9 Hallar el punto de abscisa -2 que diste 5 unidades del punto $(2, 1)$

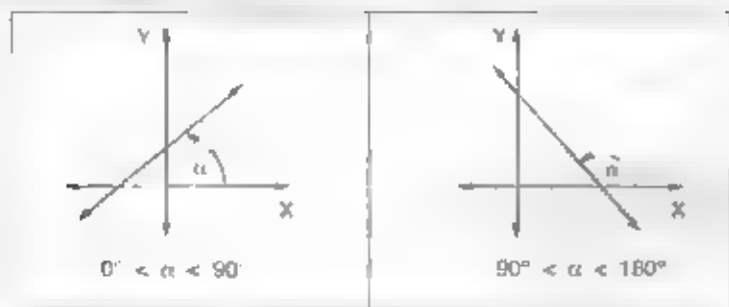
Ejercicio 10 El segmento que une $A(2, 1)$ con $B(3, 3)$ se prolonga hasta C. Sabiendo que $BC = 3AB$, hallar las coordenadas de C

RESPUESTAS TALLER

4. a) $\sqrt{10}$ b) 17 5. a) 23,56 b) 21,30
 c) 4 d) $\sqrt{13}$
6. $\sqrt{5}$ 9. $(-2, 4)$ 10. $(18, 15)$
 $(-2, 2)$

15.1.3 ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

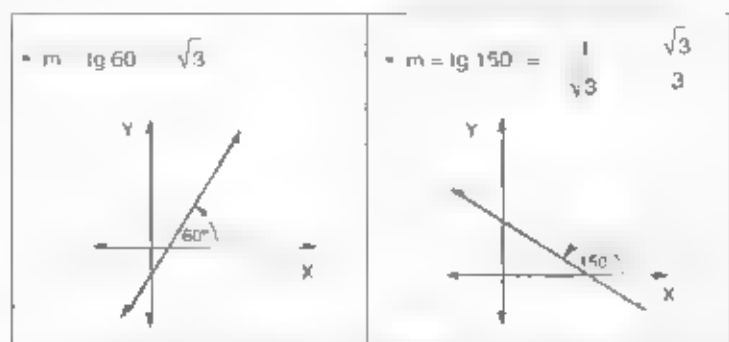
Ángulo de inclinación (α) de una recta es el ángulo que forma la recta con el eje X medido en el sentido positivo y considerando al eje X como lado inicial.



Se llama pendiente (m) de una recta a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

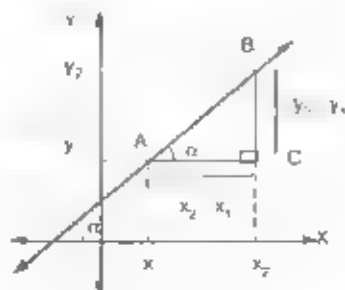
Ejemplos




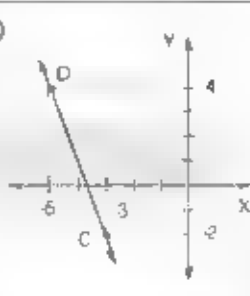
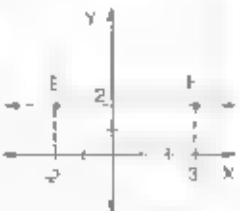
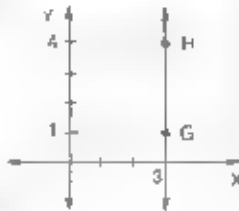
Recordemos que dos puntos diferentes de un plano determinan una recta única

Dada una recta determinada por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, podemos calcular su pendiente (m) mediante la expresión

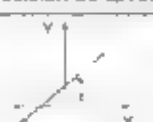

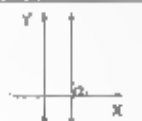
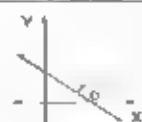
$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ejemplos Calculemos la pendiente de la recta determinada por los puntos dados

<p>• A(4,3) , B(5,5)</p> $m = \frac{5 - 3}{5 - 4}$ $m = \frac{2}{1}$ $m = 2$ 	<p>• C(3, 2) , D(-5,4)</p> $m = \frac{4 - 2}{-5 - 3}$ $m = \frac{2}{-8}$ $m = -\frac{1}{4}$ 
<p>• E(2,2) , F(3,2)</p> $m = \frac{2 - 2}{3 - 2}$ $m = \frac{0}{1}$ $m = 0$ 	<p>• G(3,1) , H(3,4)</p> $m = \frac{4 - 1}{3 - 3}$ $m = \frac{3}{0}$ $m = \text{no existe}$ 

Resumiendo los casos que se pueden presentar

Posición de la recta	α	Valor de m	Signo de $\tan \alpha = m$
	Agudo $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$m > 0$	Positivo (+)
	Nulo $\alpha = 0^\circ$	$m = 0$	
	Recto $\alpha = 90^\circ$	No existe	
	Obtuso $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$m < 0$	Negativo (-)



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE PENDIENTE DE UNA RECTA

Ejercicio 1 Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta L que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 5)$.

Resolución

Por fórmula de pendientes:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Para $(1, 3)$ y $(3, 5)$
 $x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2$

Reemplazamos valores en (1) $m = \frac{(5) - (3)}{(3) - (1)} = \frac{2}{2} = 1$ **Rpta.**

Calculamos el ángulo de inclinación de la recta

Sabemos que: $m = 1$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \text{pero } 1 = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 2 La pendiente de una recta es $7/2$ y pasa por los puntos $(8, 5)$ y $(6, y)$. Hallar y .

Resolución

Sabemos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{reemplazando valores tenemos}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{(-y) - (5)}{(6) - (8)} \quad \rightarrow \quad \frac{7}{2} = \frac{-y - 5}{2}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{-(y + 5)}{2} \quad \rightarrow \quad y = -2 \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3 Una recta tiene una pendiente $-3/4$ y pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(x, -1)$, hallar x .

Resolución

Sabemos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

reemplazando valores, obtenemos

$$\frac{3}{4} = \frac{(-1) - (2)}{(x) - (1)} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{x - 1}$$

Donde $4 = x - 1 \rightarrow x = 5$ **Apta.****Ejercicio 4** Aplicando el concepto de pendiente averiguar si los siguientes puntos son colineales

(0,5), (5,0); (6,-1)

Resolución

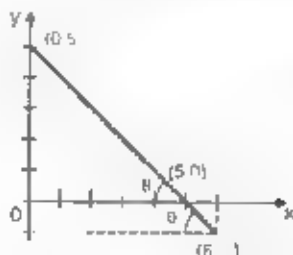
Para que dichos puntos sean colineales sus pendientes para cada par de puntos deben ser iguales, veamos

- Cálculo de la pendiente para el par de puntos (0,5) y (5,0)

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m_1 = \frac{0 - 5}{5 - 0} \rightarrow \boxed{m_1 = -1}$$

- Cálculo de la pendiente para el par de puntos (5,0) y (6,-1)

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m_2 = \frac{(-1) - (0)}{6 - 5} \rightarrow \boxed{m_2 = -1}$$



Como las pendientes han resultado ser iguales, esto quiere decir que los puntos si son colineales

Demostraremos que los puntos son colineales, graficando los puntos dados en el sistema cartesiano, veamos



TALLER DE EJERCICIOS Nº 52

Determinar la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos. Halla el ángulo de inclinación de cada recta (aproximadamente)

1. $(4, 7)$ y $(3, 4)$
2. $(2, 4)$ y $(-3, 2)$
3. $(5, 3)$ y $(0, 1/2)$
4. La pendiente de una recta es 6 y pasa por los puntos $(6, y)$ y $(8, 9)$ hallar "y"
5. La pendiente de una recta es $2/5$ y pasa por los puntos $(x, 4)$ y $(-3, 2)$ hallar "x"
6. Aplicado el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los conjuntos de puntos si fueren son colineales.

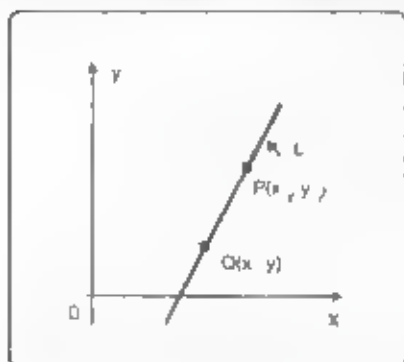
a)	$(2, 3)$		$(-4, 7)$		y		$(5, 8)$
b)	$(4, 1)$		$(5, 2)$		y		$(6, 5)$
c)	$(-1, -4)$		$(2, 5)$		y		$(7, -2)$
d)	$(a, 0)$		$(2a, -b)$		y		$(-a, 2b)$

RESPUESTAS TALLER

1. $m = 2$, $\theta = 63,5^\circ$
2. $m = 2/5$, $\theta = 21,8^\circ$
3. $m = 1/2$, $\theta = 26,5^\circ$
4. $y = -3$
5. $x = 2$
6. a) No b) Si
c) No d) Si

15.1.4 ECUACIÓN DE LA RECTA

A. Ecuación de la Recta Conociendo su Pendiente y las Coordenadas de uno de sus Puntos



Sea "L" la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente "m"

- Sobre la recta "L" tomamos un punto cualquiera $Q(x, y)$, entonces su pendiente es

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Esta igualdad, se puede escribir así

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (\text{Fórmula})$$

- A esta expresión se le denomina **ecuación punto pendiente de la recta**.

Problema 1 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,6) y cuya pendiente es 1

Resolución:

Sabemos que: $P(4,6)$ y $m = 1$

$$x_1 = 4 \quad y_1 = 6$$

Reemplazamos los valores dados en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ Obteniendo:

$$y - 6 = 1(x - 4) \quad \text{desarrollando esta ecuación, obtenemos}$$

$$y - 6 = x - 4$$

$$x - y + 2 = 0 \quad (\text{Denominada ecuación general de la recta})$$

Nota: Toda ecuación punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$, puede ser escrita de la forma $Ax + By + C = 0$, denominada **ecuación general de la recta** y viceversa.

Problema 2 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-5,3) y cuya pendiente es -6/7

Resolución:

Sabemos que: $P(-5,3)$ y $m = -6/7$

$$x_1 = -5 \quad y_1 = 3$$

Reemplazamos los valores dados en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ obteniendo:

$$y - 3 = -6/7(x - 5)$$

$$7(y - 3) = -6(x + 5) \rightarrow 7y - 21 = -6x - 30$$

$$7y + 6x + 9 = 0 \quad (\text{Ec. de la recta})$$

B Ecuación de la Recta Cuyas Coordenadas de Dos de sus Puntos se Conocen

Problema 3 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 3) y (7, 1)

Resolución

Sabemos que:

(1, 3)

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \downarrow \\ y_1 \end{array}$$

y

(7, 1)

$$\begin{array}{c} x_2 \\ \downarrow \\ y_2 \end{array}$$

• Calculamos la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Reemplazando los valores, obtenemos

$$m = \frac{1 - 3}{7 - 1} \quad , \quad m = \frac{-2}{6} \quad , \quad m = -1/3$$

Ahora tomamos cualquiera de los puntos o sea (1, 3) o (7, 1) cuya pendiente $m = -1/3$

• Tomamos el punto (1, 3) y $m = -1/3$

Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 3 = -1/3(x - 1)$$

$$3(y - 3) = -x + 1 \rightarrow x + 3y - 10 = 0 \quad (\text{Ec. de la recta})$$

• Tomamos el punto (7, 1) y $m = -1/3$

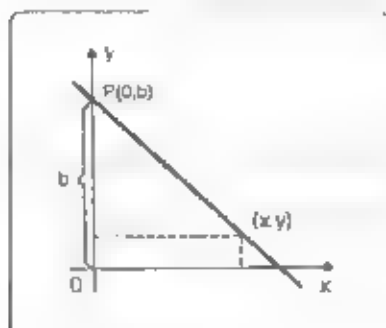
Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = -1/3(x - 7)$$

$$3(y - 1) = -(x - 7) \rightarrow x + 3y - 10 = 0 \quad (\text{Ec. de la recta})$$

Nota Como se observó al tomar cualquiera de los dos puntos y su pendiente la ecuación de la recta es la misma.

- C. Ecuación de la Recta Conocidas su Pendiente y las Coordenadas de su Intersección en el Eje Y.



Sea "m" la pendiente de la recta "r"

"b" la ordenada de la intersección de "r" con el eje "y"

Donde ecuación de la recta. $y - y_1 = m(x - x_1)$

Se transforma en. $y - b = m(x - 0)$

O sea: $y - b = mx$

O también: $y = mx + b$

(Ecuación de la recta)

A esta ecuación se le denomina **ecuación ordinaria de la recta**.

Problema 4 Hallar la ecuación de la recta que tiene por pendiente $2/3$, y que corta al eje "y" en el punto $(0, 4)$

Resolución:

Empleando la fórmula $y = mx + b$, y reemplazando los datos del problema.

$$y = \frac{2}{3}x + (-4)$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4 \quad (\text{Ecuación de la Recta})$$

Problema 5 Hallar la ecuación de la recta que tiene por pendiente -2 y que corta el eje "y" en el punto $(0, 5)$

Resolución

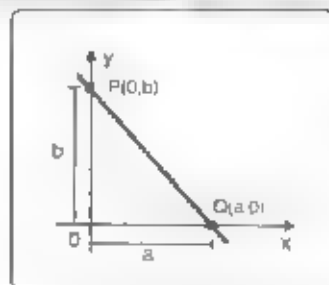
Por fórmula $y = mx + b$, Datos $m = -2$
 $b = 5$

Luego: $y = -2x + 5$ (Ecuación de la recta)

- D. Ecuación de la Recta Conocidas las Coordenadas de sus Intersecciones con los Ejes X e Y

Sea "r" una recta que corta a los ejes x e y como $O(a, 0)$ y $P(0, b)$ son 2 puntos de la recta "r" su pendiente será

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$



Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $y - b = -b/a (x - 0)$

Onde $ay - ab = -bx$
 $bx + ay = ab$

Dividimos cada término entre "ab" obteniendo $\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

A esta ecuación se lo denominará ecuación segmentaria de la recta.

Problema 6: Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son (-4, 0) y B(0, 5)

Resolución

De los datos del problema se deduce que: $a = -4$ $b = 5$

Reemplazando dichos valores en la fórmula: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1$ (Ecuación de la recta)

OTROS TIPOS DE PROBLEMA

Problema 7: Determinar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de las rectas $2x + 3y + 6 = 0$, y $5x + 2y - 7 = 0$; y es paralela a la recta $3x - 7y - 8 = 0$

Resolución

Determinamos el punto P intersectando las rectas dadas

$2x + 3y + 6 = 0$, y $5x + 2y - 7 = 0$, para lo cual resolveremos el sistema

Multiplicamos cada término $\times 2 \rightarrow \begin{matrix} 2x + 3y + 6 = 0 \\ 4x + 6y + 12 = 0 \end{matrix} \dots (I)$

Multiplicamos cada término $\times (-3) \rightarrow \begin{matrix} 5x + 2y - 7 = 0 \\ -15x - 6y + 21 = 0 \end{matrix} \dots (II)$

Sumamos miembro a miembro. (I) y (II)

$$\begin{matrix} 4x + 6y + 12 = 0 \\ -15x - 6y + 21 = 0 \end{matrix}$$

S.M.A.M. $-11x + 33 = 0 \quad + \quad x = 3$

Reemplazamos el valor de "x" en (i)

$$4(3) + 6y + 12 = 0$$

$$6y + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

Luego el punto P(3, -4) es la intersección y por ese punto pasa la recta en cuestión.

Ahora hallamos la pendiente de la recta $3x - 7y - 8 = 0$ despejando "y" obtenemos $3x - 8 = 7y$

$$y = \frac{3}{7}x - \frac{8}{7} \quad (\text{Ecuación ordinaria de la recta})$$

└──────────┘ pendiente

Por lo tanto hallamos la ecuación de la recta pedida conociendo su pendiente $m = 3/7$ y que pasa por el punto P(3, -4) empleando la fórmula

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - (-4) = \frac{3}{7}(x - 3)$$

$$7y + 28 = 3x - 9 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{7}x - \frac{37}{7}$$

Problema 6 { Hallar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de las rectas $x + 3y - 5 = 0$ $2x - y - 3 = 0$ y que es paralela a la recta que pasa por (-3, 1) y (2, 5)

Resolución

Determinamos el punto P intersectando las rectas dadas

$$x + 3y - 5 = 0 \quad (I)$$

$$2x - y - 3 = 0 \quad \text{multiplico cada término } (\times 3)$$

$$x + 3y - 5 = 0$$

$$6x - 3y - 9 = 0$$

$$\Sigma \text{MAM} \quad 7x - 14 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Reemplazamos el valor de "x" en (I) $2 + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

Luego el punto P(2, 1) es la intersección y por ese punto pasa la recta en cuestión

Ahora hallamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-3, 1) y (2, 5)

$$\left[m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \right] \quad \rightarrow \quad m = \frac{(5) - (1)}{(2) - (-3)} \quad \rightarrow \quad \left[m = \frac{4}{5} \right]$$

Por lo tanto hallamos la ecuación de la recta pedida conociendo su pendiente $m = 4/5$ y que pasa por el punto P(2, 1) empleando la fórmula

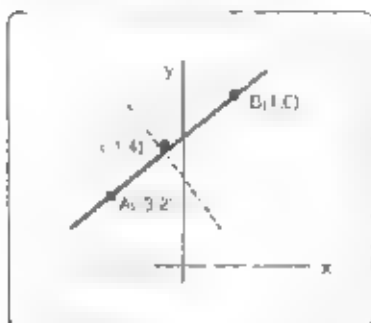
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 4/5 (x - 2)$$

$$5y - 5 = 4x - 8 \Rightarrow y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$$

Problema 9 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento $A_1(3,2)$ $B_1(1,6)$

Resolución:

Recordemos que "Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio"



El punto medio $P(x_0, y_0)$ del segmento AB es

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(-3) + (1)}{2} \Rightarrow x_0 = -1 \\ y_0 &= \frac{(2) + (6)}{2} \Rightarrow y_0 = 4 \end{aligned} \quad P(-1, 4)$$

La pendiente de la recta T es

$$m_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow m = \frac{(6) - (2)}{(1) - (3)} \quad m_1 = 1$$

Por propiedad: $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\text{Luego} \quad 1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -1$$

La ecuación de la mediatriz sería $y - y_0 = m_2(x - x_0)$

$$\text{Donde} \quad y - 4 = -1(x - (-1)) \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

15.1.5 RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

- Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente. Esto es: si la pendiente de L_1 es m_1 y la de L_2 es m_2 entonces

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

- Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1 , esto es: si la pendiente de L_1 es m_1 y la de L_2 es m_2 , entonces

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

O bien:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Problema 10 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -1) y es paralela a una recta con pendiente $2/3$.

Resolución

Sabemos que una de las rectas tiene por pendiente $m = 2/3$ siendo la pendiente de la otra recta $m_2 = 2/3$ por ser paralelas.

Ahora calculamos la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -1)

Por fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\begin{aligned}\text{Donde } y - (-1) &= \frac{2}{3}(x - 3) \quad \rightarrow \quad 3(y + 1) = 2(x - 3) \\ 3y + 3 &= 2x - 6 \quad \rightarrow \quad 2x - 3y - 9 = 0\end{aligned}$$

Problema 11 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -2) y es paralela a la recta cuya ecuación es $3x - 2y + 6 = 0$

Resolución

Hallamos la pendiente de la recta cuya ecuación es $3x - 2y + 6 = 0$ despejando

$$\begin{aligned}\text{Y obtenemos } -3x + 6 &= 2y \quad \rightarrow \quad -\frac{3x}{2} + \frac{6}{2} = y \\ y &= -\frac{3}{2}x + 3\end{aligned}$$

Esta última ecuación tiene la forma $y = mx + b$

Por comparación $m = 3/2$

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -2) empleamos la pendiente calculada $m = 3/2$ puesto que se trata de dos rectas paralelas.

Por fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\begin{aligned}\text{Donde } y - (-2) &= \frac{3}{2}(x - 3) \\ 2y + 4 &= 3x + 9 \quad \rightarrow \quad 2y + 3x - 5 = 0\end{aligned}$$

Problema 12 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2, 1) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $3x + 4y - 5 = 0$

Resolución

Hallamos la pendiente " m " de la recta dada $3x + 4y - 5 = 0$

Despejando " y ", obtenemos $4y = -3x + 5$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \quad , \text{ tiene la forma } y = mx + b$$

pendiente

$$m_1 = -3/4$$

Si llamamos " m_1 " a la pendiente de la recta, cuya ecuación busquemos, podemos escribir

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{por ser perpendiculares} \quad \frac{3}{4} m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$$

Ahora escribimos la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 1)$ y cuya pendiente es $m_2 = 4/3$

Por fórmula $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ $\rightarrow y - 1 = \frac{4}{3} [x - (2)]$

$$\Rightarrow 3y - 3 = 4x + 8 \Rightarrow 3y - 4x - 11 = 0$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 53

A. En cada ejercicio se da la pendiente de una recta y un punto de la misma. Halla la ecuación de cada recta.

- a) En su forma punto-pendiente b) En su forma general
c) En su forma ordinaria

1. $m = 3$ $P(-4, 3)$	3. $m = 2/3$ $P(-\frac{1}{2}, 3)$	5. $m = 5$ $P(2, 5)$
2. $m = 2$ $P(3, 5)$	4. $m = \frac{4}{3}$ $P(0, \frac{3}{4})$	6. $m = 4$ $P(3, 4)$

B. Halla la ecuación general y la ecuación ordinaria de la recta que pasa por

7. $(3, -2)$ y $(1, 4)$	9. $(-5, 1)$ y $(7, 3)$
8. $(-2, 5)$ y $(4, 3)$	10. $(0, 4)$ y $(-3, 2)$

11. Hallar la ecuación de la recta que tiene por pendiente -3 , y que corta al eje " y " en el punto $(0, 5)$

12. Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son $(3,0)$ y $(0,-2)$
13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $2x + y + 5 = 0$, $4x - 3y - 5 = 0$ y que es paralela a la recta $2x - y - 6 = 0$
14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,5)$ y que es paralela a la recta cuya ecuación es $2y - 3x + 4 = 0$
15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4,1)$ y que es perpendicular a la recta cuya ecuación es $3x - 2y - 5 = 0$
16. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $P(6,5)$ y $Q(-2,-3)$
17. Dadas las ecuaciones de las rectas

a) $3x + 4y = 6$	c) $6x - 8y = 7$
b) $4x - 3y = 2$	d) $3x - 4y = 5$

¿Decir que rectas son paralelas y cuáles son perpendiculares?

RESPUESTAS TALLER

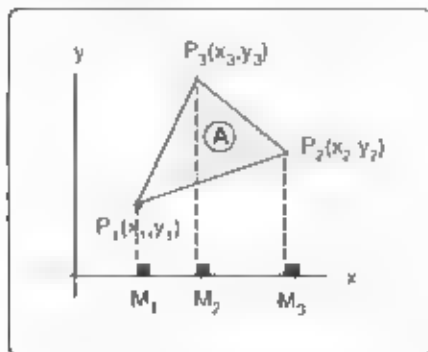
- A) 1. $y + 3 = 3(x + 4)$
 $y - 3x - 15 = 0$
 $y = 3x + 15$
2. $y - 5 = 2(x - 3)$
 $y + 2x - 11 = 0$
 $y = -2x + 11$
3. $y - 3 = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{2})$
 $3y - 2x - 10 = 0$
 $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$
4. $y - \frac{3}{4} = \frac{11}{5}(x - 0)$
 $20y + 15x - 15 = 0$
 $y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{4}$
5. $y + 5 = 5(x + 2)$
 $y - 5x - 5 = 0$
 $y = 5x + 5$
6. $y + 4 = -4(x + 3)$
 $y + 4x + 16 = 0$
 $y = -4x - 16$
- B) 7. $y = 3x + 7$
 $y + 3x - 7 = 0$
8. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$
 $y + \frac{1}{3}x - \frac{13}{3} = 0$
9. $y = \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$
 $y - \frac{1}{6}x - \frac{11}{6} = 0$
10. $y = \frac{2}{3}x + 4$
 $y - \frac{2}{3}x - 4 = 0$
11. $y = 3x + 5$
12. $y = \frac{2}{3}x - 2$
13. $y = 2x - 1$
14. $y = \frac{2}{3}x + 2$
15. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
16. $y = -x + 3$
17. a y b \rightarrow son perpendiculares
 c y d \rightarrow son paralelas

15.1.6 ÁREA DE UN POLÍGONO EN FUNCIÓN DE LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES

Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo. El área A en función de las coordenadas de los vértices viene dada por la expresión:

$$A = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1)$$

Demostración.



Área Δ = Área del trapecio $M_1 P_1 P_3 M_3$ + Área del trapecio $M_3 P_3 P_2 M_2$ + Área del trapecio $M_2 P_2 P_1 M_1$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{2} (y_1 + y_3) (x_3 - x_1) + \frac{1}{2} (y_3 + y_2) (x_2 - x_3) + \frac{1}{2} (y_1 + y_2) (x_2 - x_1)$$

$$A = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1)$$

Este resultado se puede expresar de otra manera más fácil de recordar teniendo en cuenta la notación de determinante:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Otra forma de expresar el área de un triángulo muy útil cuando se trate de hallar áreas de polígonos de más de tres lados es la siguiente:

$$A = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Obsérvese que se ha repeticido la primera fila en la cuarta.

Problema 1: Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $P_1(1, 4)$

$P_2(3, 1)$ y $P_3(2, 5)$

Resolución:

Por fórmula: $\text{Area } \Delta = \frac{1}{2}$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Reemplazando valores obtenemos

$$\text{Area } \Delta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2} [1(1)(1) + (5)(3) + (4)(2) - (1)(5) - (2)(-1) - (3)(-4)]$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2} [1 + 15 + 8 + 5 + 2 + 12] \Rightarrow \text{Área } \Delta = \frac{1}{2} [27] = \frac{27}{2} = 13,5$$

$$\text{Área} \approx 13,5 \mu^2$$

Otro Método: Vértices del triángulo $P_1(1, 4)$, $P_2(3, 1)$ y $P_3(2, 5)$

Resolución:

$$+ \left\{ \begin{array}{ccc} & -1 & -4 \\ 12 \leftarrow & 3 & \rightarrow -1 \rightarrow 1 \\ -2 \leftarrow & 2 & \rightarrow 5 \rightarrow 15 \\ 5 \leftarrow & 1 & \rightarrow -4 \rightarrow -8 \end{array} \right\} +$$

19 8

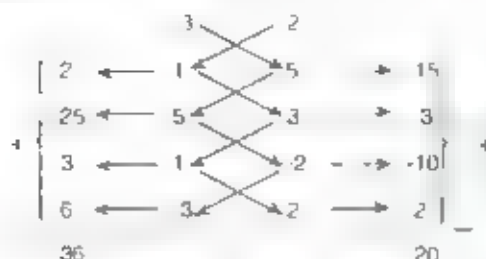
$$\text{Área } \Delta = \frac{\boxed{} \boxed{}}{2} = \frac{8 \cdot (19)}{2} = \frac{27}{2} \Rightarrow \text{Área } \Delta = 13,5 \mu^2$$

Problema 2: Hallar el área del triángulo cuyos vértices son

$P_1(3, -3)$, $P_2(4, -1)$ y $P_3(1, 5)$

Resolución:

Otro Método: Vértices $P_1(3,2)$, $P_2(1,5)$, $P_3(5,3)$ y $P_4(1,-2)$



$$\text{Área} = \frac{36 - 20}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Área = 8 u



TALLER DE EJERCICIOS Nº 54

A. Hallar las áreas de los triángulos cuyos vértices son

1. $(2, -3)$, $(4, 2)$ y $(-5, -2)$

3. $(-8, -2)$, $(-4, -6)$ y $(-1, 5)$

2. $(-3, 4)$, $(6, 2)$ y $(4, 3)$

4. $(0, 4)$, $(8, 0)$ y $(1, 4)$

B. Hallar las áreas de los polígonos cuyos vértices son

5. $(2, 5)$, $(7, 1)$, $(3, 4)$ y $(2, 3)$

7. $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(-3, 1)$, $(2, 3)$ y $(5, 1)$

6. $(0, 4)$, $(1, -6)$, $(-2, 3)$ y $(-4, 2)$

8. $(-3, 4)$, $(-2, 3)$, $(4, 5)$, $(2, 1)$ y $(6, 2)$

RESPUESTAS TALLER

A) 1. 18.5 u^2

3. 28 u^2

2. 24.5 u^2

4. 30 u^2

B) 5. 39.5 u^2

7. 40 u^2

6. 25.5 u^2

8. 42.5 u^2



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LA LINEA RECTA

Ejercicio 1 La recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-3, 1)$ tiene por ecuación:

- A) $x - 4y + 7 = 0$ B) $x + 4y - 9 = 0$
C) $x + 4y + 7 = 0$ D) $x - 4y - 7 = 0$
E) $x - 4y + 7 = 0$

Ejercicio 2 La recta cuya ecuación es $2y - x + 1 = 0$ intersecta el eje x y al eje y en los puntos

- A) $1y - 1$ B) $1y + 1$ C) $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

- D) $1y - 1/2$ E) $-\frac{1}{2}y + 1$

Ejercicio 3 La recta cuya pendiente es -2 y que pasa por el punto $(1, 1)$ tiene por ecuación

- A) $2x + y - 3 = 0$ B) $2x - y + 3 = 0$
C) $2x - y - 3 = 0$ D) $2x + y - 4 = 0$
E) $2x + y + 4 = 0$

Ejercicio 4 De los trios de puntos siguientes son colineales.

- I. $(3, 2), (1, 0), (1, 2)$
II. $(6, 1), (3, 2), (3, 4)$
III. $(3, 1), (4, 3), (5, 7)$

- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo I y II E) Sólo II y III

Ejercicio 5 De las ecuaciones siguientes la que representa una recta paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$ es:

- A) $2y + x + 3 = 0$ B) $2y - x - 6 = 0$
C) $2y + x + 6 = 0$ D) $y + 2x - 3 = 0$
E) $y + 2x + 6 = 0$

Ejercicio 6 Una recta perpendicular a la recta de ecuación $3x - y + 1 = 0$ es la representada por:

- A) $3x + y + 3 = 0$ B) $3y - x - 2 = 0$
C) $3y - x + 2 = 0$ D) $3y + x + 2 = 0$
E) $3x + y - 1 = 0$

Ejercicio 7 En $Kx - x + y + 3 = 0$ el valor de "K" para que la ecuación represente a una recta que pasa por el punto $(1, -3)$ es:

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 1 E) 2

Ejercicio 8 La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3, -5)$ y $(2, 1)$ es:

- A) 4 B) 5 C) 4/5 D) 5/4 E) -4/5

Ejercicio 9 De las siguientes rectas cuáles pasan por el origen.

- I. $x + 2y - 1 = 0$ II. $3x + 2y + 2 = 0$
III. $x - 5y = 0$

- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo II y III
D) Sólo I y II E) I, II y III

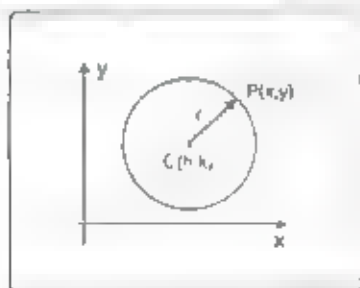
Ejercicio 10 La ecuación de la recta paralela al eje x que pasa por el punto $(4, -1)$ es:

- A) $x - 1 = 0$ B) $x + 1 = 0$ C) $y - 1 = 0$
D) $y + 1 = 0$ E) $x + y = 1$

Clave de Respuestas

1. E	2. D	3. A	4. A	5. B
6. D	7. B	8. C	9. C	10. D

15.2 LA CIRCUNFERENCIA



Es el conjunto de puntos de un plano que están a una misma distancia constante de un punto fijo del mismo plano.

Al punto fijo se le denomina centro (C). A la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se le llama radio (r).

Toda ecuación de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Tiene como gráfica a una circunferencia de centro C(h, k) y radio r.

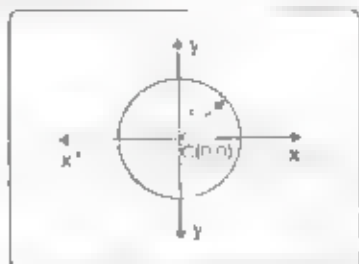
Esta ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Es la llamada forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia.

Si el centro de la circunferencia está en el origen O(0,0), entonces la forma ordinaria se convierte en:

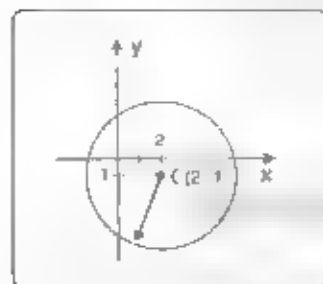
$$x^2 + y^2 = r^2$$

A esta ecuación se le llama Ecuación Canónica de la circunferencia.



Ejemplo 1 Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro (2, -1) y radio 3.

Resolución



En este caso el centro C(2, -1) nos indica que $h = 2$ y $k = -1$ por otro lado $r = 3$.

Reemplazando estos valores en la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 3^2$$

$$\therefore \underline{(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9}$$

Ejemplo 2 ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$$

Resolución

La ecuación dada la comparamos con $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Donde $h = -3$, $k = 4$, $r^2 = 36$, $r = 6$

El centro es el punto $C(-3, 4)$ y el radio mide 6

Ejemplo 3 Hallar la ecuación de la circunferencia de 8 cm de radio cuyo centro está en el origen de coordenadas.

Resolución

Como el origen de coordenadas es el punto $C(0, 0)$, se tiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 8^2 \quad \rightarrow \quad \underline{x^2 + y^2 = 64}$$

15.2.1 FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Desarrollando la ecuación ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ obtenemos

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2 \quad \text{ordenamos términos}$$

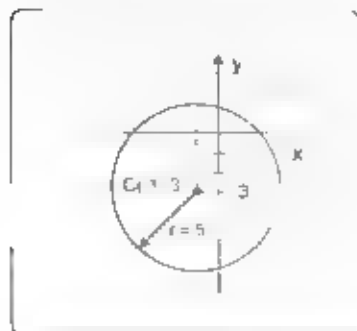
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Esta última ecuación puede escribirse en la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde $D = -2h$, $E = -2k$ esta es la llamada forma general de la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 4 Hallar la ecuación general de la circunferencia de centro $C(-1, 3)$ y radio: 5

Resolución



Reemplazamos valores en la forma ordinaria y desarrollando, obtenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-1)]^2 + [y - (3)]^2 = 5^2$$

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$\underline{x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0}$$

Observaciones

1. Funciones de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$ no representan una circunferencia. Su expresión gráfica es un sólo punto (h, k) .

Ejemplo El único par que satisface a la ecuación,

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0 \quad \text{es } (-2, 5)$$

2. Función de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = \text{Número negativo}$ no representa lugar geométrico alguno.

Ejemplo La ecuación $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -16$ no tiene solución, en consecuencia no tiene representación gráfica.

15.2.2 TRANSFORMACION DE LA FORMA GENERAL A LA FORMA ORDINARIA

Toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y que representa a una circunferencia puede escribirse de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ completando cuadrados para los términos "x", como para los términos en "y".

Ejemplo 5 Graficar la ecuación $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0$

Resolución

Agrupamos términos en "x" y en "y"

$$(x^2 - 10x) + (y^2 + 2y) - 10 = 0 \quad \dots (I)$$

Completamos cuadrados para los términos de "x"

$x^2 - 10x = (\quad)^2$ Abrimos paréntesis y elevamos al cuadrado

sacamos $\frac{1}{2} x^2 = x$

$$x^2 - 10x = \quad + \quad$$

sacamos la mitad 5

fuera del paréntesis escribimos () el cuadrado del segundo término escrito dentro del paréntesis

$$\text{Resultando así: } x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 5^2 \quad \dots (II)$$

De igual manera completamos cuadrados para los términos en "y"

$$\text{es } \sqrt{y^2} = y$$

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1^2 \quad \dots (III)$$

Fuera de () escribimos (-) el cuadrado del 2º término escrito dentro de ()

Reemplazamos (II) y (III) en (I).

$$(x-5)^2 - 5^2 + (y+1)^2 - 1^2 - 10 = 0$$

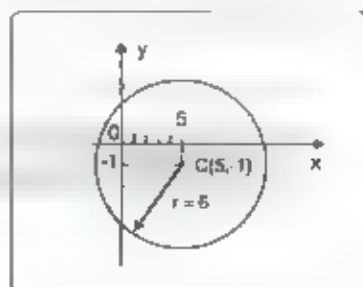
$$(x-5)^2 - 25 + (y+1)^2 - 1 - 10 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 36$$

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 6^2 \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Siendo: $h=5$, $k=-1$ y $r=6$

La gráfica es:



Ejemplo 6: Graficar la ecuación: $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$

Resolución:

Agrupamos términos en "x" y en "y" $(x^2 + 6x) + (y^2 + 4y) - 3 = 0 \dots(I)$

Completamos cuadrados para los términos en "x"

$$x^2 + 6x = (\quad + \quad)^2 \quad \text{Abrimos paréntesis y elevamos al cuadrado.}$$

$$\text{Su } \sqrt{x^2} = x$$

$$x^2 + 6x = (\quad + \quad)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x = (x+3)^2 - 3^2 \quad \dots(II)$$

Su mitad = 3

Completamos cuadrados para los términos en "y"

$$y^2 + 4y = (\quad + \quad)^2$$

$$\text{su } \sqrt{y^2} = y$$

$$y^2 + 4y = (\quad + \quad)^2 \quad \rightarrow \quad y^2 + 4y = (y+2)^2 - 2^2 \quad \dots(III)$$

Su mitad = 2

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

$$(x+3)^2 - 3^2 + (y+2)^2 - 2^2 - 3 = 0$$

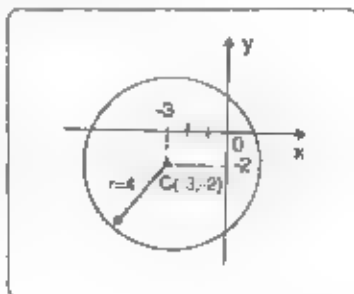
$$(x+3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4^2$$

Siendo: $h= -3$, $k= -2$ y $r= 4$

La gráfica es



Ejemplo 7. Graficar la ecuación $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 3 = 0$

Resolución:

Agrupamos términos en "x" y en "y"

$$(x^2 - 12x) + (y^2 + 10y) - 3 = 0 \quad \dots (I)$$

Completamos cuadrados para los términos en "x"

$$x^2 - 12x = (\quad - \quad)^2$$

$$\text{Su } \sqrt{x^2} = x$$

$$x^2 - 12x = (\quad - \quad)^2 \rightarrow x^2 - 12x = (x - 6)^2 - 6^2 \quad \dots (II)$$

Su mitad = 6

Completamos cuadrados para los términos en "y"

$$y^2 + 10y = (\quad + \quad)^2$$

$$\text{Su } \sqrt{y^2} = y$$

$$y^2 + 10y = (\quad + \quad)^2 \rightarrow y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 5^2 \quad \dots (III)$$

Su mitad = 5

Reemplazamos (II) y (III) en (I)

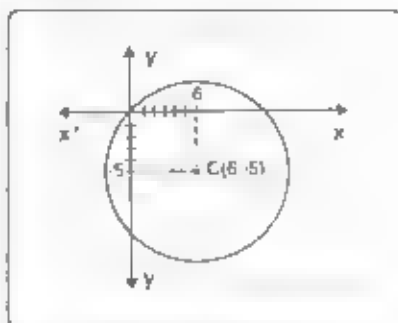
$$(x - 6)^2 - 6^2 + (y + 5)^2 - 5^2 - 3 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + (y + 5)^2 - 25 - 3 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 64$$

$$(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{64})^2$$

La gráfica es



$$(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = (8)^2 \Leftrightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Siendo: $h = 6$, $k = -5$ y $r = 8$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 55

A Grafica cada una de las siguientes ecuaciones

1. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$

2. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$

3. $(x-3)^2 + y^2 = 49$

4. $x^2 + (y+5)^2 = 36$

B En cada ejercicio escribe la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y en su forma general

5. $C(3,4)$ $r=5$

6. $C(2,3)$ $r=4$

7. $C(\frac{1}{2}, 3)$ $r=6$

8. $C(2, 3/2)$ $r=7$

C En cada ejercicio escribe P es un punto de la circunferencia y C es su centro. Escribe su forma ordinaria y su forma general. (Sugerencia aplica la fórmula

$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ distancia entre dos puntos para hallar el radio)

9. $P(2, 2)$, $C(-3, 5)$

10. $P(0,0)$, $C(3,-4)$

11. $P(3, 4)$, $C(7, 9)$

12. $P(1,3)$, $C(-3,-2)$

D Transforma cada ecuación siguiente a su forma ordinaria grálica (si es que tiene expresión gráfica)

13. $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 62 = 0$

14. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

15. $x^2 + y^2 - 2x - by - 22 = 0$

16. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

17. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$

18. $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$

19. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

20. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

21. Escribe la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de sus diámetros son los puntos $(-2, 2)$ y $(6, 4)$

RESPUESTAS TALLER

$$5. \begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + (y-3)^2 = 8^2 \\ 4x^2 + 4y^2 + 4x - 24y + 107 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} (x+2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 7^2 \\ 4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y - 171 = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} (x+3)^2 + (y+5)^2 = \sqrt{34}^2 \\ x^2 + y^2 + 6x + 10y = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} (x+7)^2 + (y+9)^2 = (5\sqrt{5})^2 \\ x^2 + y^2 + 14x + 18y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} (x+3)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{41})^2 \\ x^2 + y^2 + 6x + 4y - 28 = 0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

15.3 LA PARÁBOLA

Cuando estudiamos la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, vimos que la expresión gráfica de estas funciones son parábolas que se abren "Hacia Arriba" o "Hacia Abajo".

Ahora estudiaremos más detenidamente estas curvas de tal manera que el estudiante logre reconocer sus ecuaciones y que sea capaz de graficarlas en el plano cartesiano.

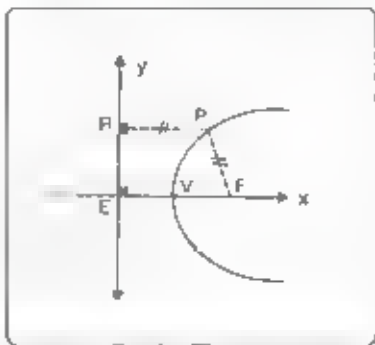
Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la distancia desde cualquiera de estos puntos P a un punto fijo es siempre igual a la distancia de P a una recta fija.

15.3.1 ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

- El punto fijo " F " se llama foco de la parábola.
- La recta fija " RE " es la directriz.

La recta que pasa por " F " y es perpendicular a su directriz, tal que como " FE " se llama eje de la parábola.

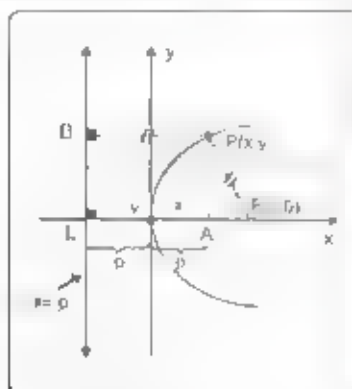
- Por la definición dada, se cumple que $PR = PF$.



"V" es un punto de la parábola por consiguiente también se cumple que $VE = VF$

Al punto "V" se le llama vértice de la parábola

15.3.2 ECUACIÓN DE LA PARABOLA



Ubicamos la parábola en el plano cartesiano (ver figura) de la manera que

1. Su eje coincide con el eje x
2. Su vértice V coincide con el origen de coordenadas
3. Su foco "F" tenga por coordenadas al par $(p, 0)$
4. Como consecuencia $VF = p$
5. La directriz tendrá como ecuación: $x = -p$, por ser una recta paralela al eje y, situada a una distancia "p" a la izquierda del origen
6. Consideremos ahora un punto $P(x, y)$ variable, que está sobre la parábola
7. Trazamos PA perpendicular al eje x

Demostración

1. Por definición de parábola $PF = PB$
2. De la figura $VA = x$, $LV = p$, $PB = LA = LV + VA$
3. $PB = x + p \rightarrow PF = x + p$
4. Aplicamos la fórmula distancia entre los puntos P y F

$$PF = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}$$

$$x + p = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

elevamos al cuadrado los dos miembros

$$(x + p)^2 = \sqrt{((x - p)^2 + y^2)}^2 \rightarrow x^2 + 2xp + p^2 = (x - p)^2 + y^2$$

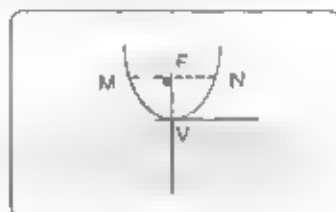
$$\cancel{x^2} + 2xp + \cancel{p^2} = \cancel{p^2} - 2xp + \cancel{p^2} + y^2 \quad , \quad 4xp = y^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{y^2 = 4px}$$

Esta es la llamada forma ordinaria de la ecuación de la parábola de la misma manera pueda obtenerse las formas para los casos en que el foco esté sobre la parte positiva del eje y parte negativa del eje x o sobre la parte negativa del eje y.



En cada caso, $2p$ es la distancia de la directriz al foco, " p " es la distancia entre el vértice y el foco, $4p$ es la longitud del lado recto.

- El segmento de recta perpendicular al eje, que pasa por el foco y está limitado por las intersecciones de esta recta con la parábola, se llama lado recto.



MN = lado recto de la parábola.

Ejemplo 1 } Encontrar el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $x^2 + 12y = 0$, además dibujar la parábola.

Resolución:

La ecuación dada $x^2 + 12y = 0$,
se puede escribir así

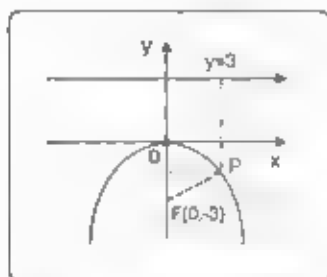
$$x^2 = -12y$$

(Esta ecuación tiene la forma $x^2 = 4py$)

Donde $4p = -12 \rightarrow p = -3$

La gráfica es

- El foco está en el punto $F(0, -3)$
- La directriz es la recta $y = 3$



Ejemplo 2 } Encontrar el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $8x + y^2 = 0$, además dibujar la parábola.

Resolución:

La ecuación dada $8x + y^2 = 0$,
se puede escribir así

$$y^2 = -8x$$

(Esta ecuación tiene la forma $y^2 = 4px$)

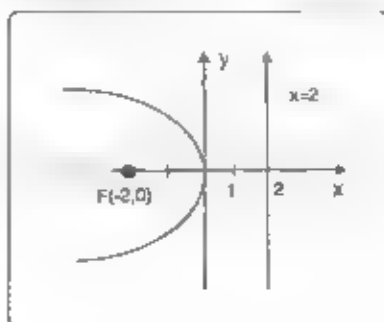
Donde $4p = -8 \rightarrow p = -2$

El foco está en el punto $F(p, 0) = F(-2, 0)$

La directriz es la recta

$x = 2$, o sea: $x - 2 = 0$

su gráfica es.





TALLER DE EJERCICIOS Nº 56

- I Encontrar el foco, la directriz y dibujar la parábola que se representa por las ecuaciones siguientes

1. $x^2 + 16y = 0$

2. $4x + y^2 = 0$

3. $x^2 + y = 0$

4. $x^2 - 8y = 0$

5. $y^2 - 5x = 0$

6. $y^2 + 2x = 0$

- II Encontrar la ecuación de las parábolas siguientes

7 Tiene vértice en el origen, y su directriz es la recta $x = -5$

8 Tiene por directriz $x = 6$ y su vértice está en el origen

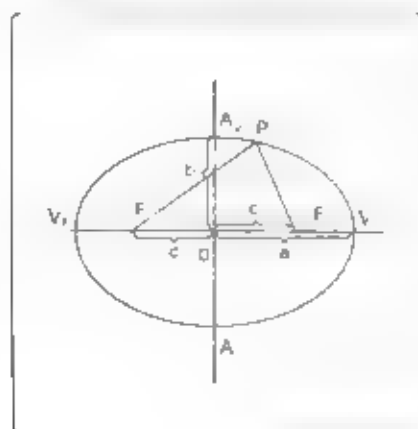
9 Tiene por foco $F(0, 3)$ y por directriz $y + 6 = 0$

10 Tiene por foco $F(0, -4)$ y por directriz $y - 3 = 0$

15.4 LA ELIPSE

Una elipse es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la suma de las distancias desde cualquiera de estos puntos "P" a dos puntos fijos, es constante

15.4.1 COMPONENTES DE LA ELIPSE



De la figura

- A los puntos fijos F y F' se llaman focos
- El punto "O" es el centro de la elipse y es el punto medio de FF'
- A la recta que pasa por los focos se le denomina eje focal
- A los puntos de intersección V_1 y V_2 de la elipse con el eje focal se le llama vértices
- Al segmento V_1V_2 se le denomina eje mayor y mide $2a$
- Al segmento A_1A_2 se le denomina eje menor y mide $2b$

A la recta que pasa por el centro, y es perpendicular al eje loca, se llama eje normal, el cual corta a la elipse en los puntos A_2 y A_1

OF y OF' se le llaman distancias focales, y se representan por " c " por lo tanto:
 $FF' = 2c$

• Valor de la Constante de la Definición (De una Elipse)

De la figura y de acuerdo a la definición de elipse se dice que

$$PF + PF' = V_2F + V_2F' = V_1F + V_1F' = \text{Constante}$$

(siendo V_2, P y V_1 puntos de la elipse)

15.4.2 ECUACIÓN DE LA ELIPSE

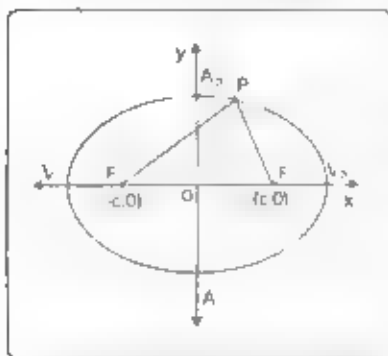
Por definición de elipse: $PF + PF' = 2a$ (constante) (I)

Por fórmula de distancia entre dos puntos hallamos PF y PF'

$$1. PF = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$2. PF' = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Reemplazamos (1) y (2) en (I) $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$



Eliminando radicales, obtenemos

$$a^2y^2 + x^2(a^2 - c^2) = a^2(a^2 - c^2) \quad \dots (II)$$

Por relación Pitagórica en la elipse sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - c^2 = b^2 \quad \dots (III)$$

Reemplazamos (III) en (II)

$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2$$

dividimos cada término entre $a^2b^2 \neq 0$

$$\frac{a^2y^2}{a^2b^2} + \frac{x^2b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

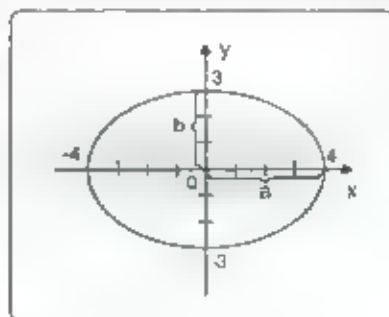
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Es la ecuación normal de la elipse cuando sus focos están sobre el eje x)

Ejemplo 1 La ecuación: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Tiene por gráfica a una elipse con las siguientes características.

- Su centro es el origen (0,0)
- Sus focos están sobre el eje x o también, su eje mayor está sobre el eje x
- La longitud de su semi eje mayor es $a = 4$
- La longitud de su semi eje menor es $b = 3$



15.4.3 ECUACIÓN NORMAL DE LA ELIPSE CUYOS FOCOS ESTÁN SOBRE EL EJE "Y"

Quando los focos están sobre el eje y, con un procedimiento similar al anterior, se puede deducir que la ecuación normal de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

("a" sigue representado al semi eje mayor y "b" al semi eje menor)

Ejemplo 2 La elipse cuya ecuación es $2x^2 + 5y^2 = 10$ puede graficarse fácilmente, conociendo las coordenadas de sus focos y los valores de sus semi ejes.

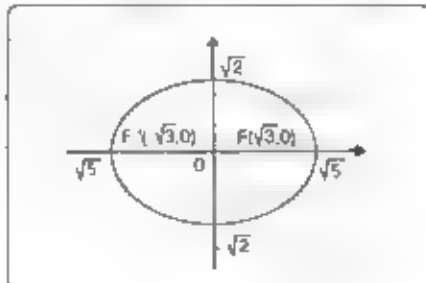
La ecuación dada: $2x^2 + 5y^2 = 10$

Dividimos cada término entre 10

$$\frac{2x^2}{10} + \frac{5y^2}{10} = \frac{10}{10}$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1 < > \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por comparación $\begin{cases} a^2 = 5 & \rightarrow a = \sqrt{5} \\ b^2 = 2 & \rightarrow b = \sqrt{2} \end{cases}$



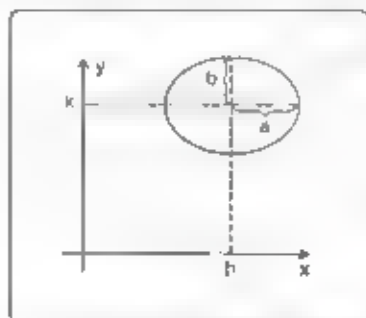
Nota: Deducimos que sus focos están sobre el eje x, porque a la variedad x le corresponde el mayor denominador

Por relación Pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 5 = 2 + c^2 \quad c = \sqrt{3}$

Las coordenadas de los focos son $F(c,0) = F(\sqrt{3},0)$

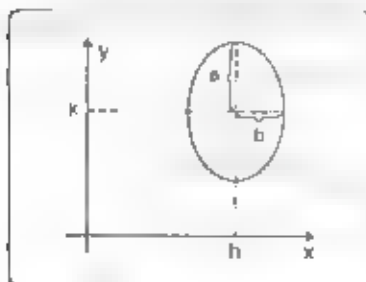
$$F(-c,0) = F(-\sqrt{3},0)$$

15.4.4 ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE



La ecuación de forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Tiene como expresión gráfica a una elipse de centro $C(h, k)$ 

La ecuación de forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Tiene como expresión gráfica a una elipse de centro $C(h, k)$

Ejemplo 3 La ecuación $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Tiene como gráfica a una elipse de centro $C(h, k) = C(-1, 2)$

Sabemos que 16 es mayor que 4

Entonces

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

Para graficar la elipse ubicamos el centro, los vértices y los extremos del eje menor, en un mismo plano

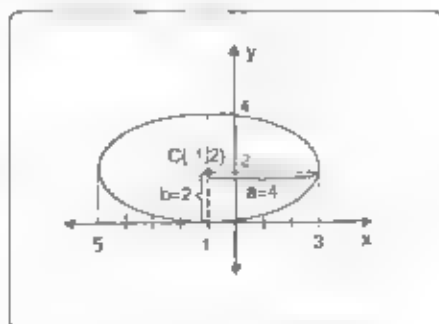
Desarrollando la ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Obtenemos $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 1 = 0$, que pertenece a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad A, C > 0$$

(Denominada forma general de la elipse)

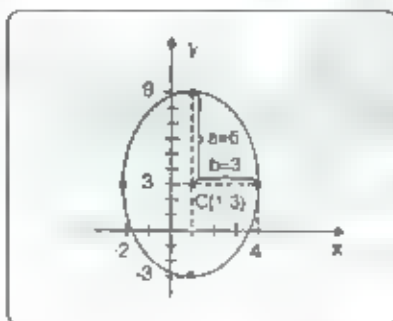


Ejemplo La ecuación $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$ Representa a una elipse de centro $C(1, 3)$

Sabemos que 36 es mayor que 9

Entonces

$$\begin{cases} a^2 = 36 & \rightarrow & a = 6 \\ b^2 = 9 & \rightarrow & b = 3 \end{cases}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 57

A. Grafique las siguientes elipses

1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

3 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

2 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

4 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{36} = 1$

B. Grafique las siguientes elipses

5 $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

8 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

6 $\frac{(x-8)^2}{36} + \frac{(y+5)^2}{1} = 1$

9 $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{49} = 1$

7 $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

10 $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{81} = 1$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA - LA PARABOLA - LA ELIPSE



Ejercicio 1 Determinemos los coeficientes D, E y F de la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto (2; 5) y radio 6

Resolución.

- Sabemos que: $h = 2$, $k = 5$ y $r = 6$

Reemplacemos en la ecuación principal: $(x - h)^2 + (y - K)^2 = r^2$

Obtenemos: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 6^2$

Desarrollemos los cuadrados de los binomios:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 36$; ordenamos y obtenemos la Ecuación general de la circunferencia

$x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$ esta ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Por comparación: $D = -4$, $E = -10$ y $F = -7$ **Rpta**

Ejercicio 2 Determinemos la ecuación general de la circunferencia si uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos A (-5; -1) y B (7; 3)

Resolución.

- Como las coordenadas del centro corresponde a las coordenadas del punto medio de ambos puntos, sus coordenadas son

$$(h, K) = \left(\frac{-5 + 7}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (1, 2)$$

Además, la medida de radio se calcula como la distancia desde el centro a uno de los puntos A o B

$$r = \sqrt{(7 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$$

Reemplacemos las coordenadas del centro y radio en la ecuación principal, desarrollemos los cuadrados del binomio y ordenemos

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{37})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 56 = 0 \quad \text{Rpta}$$

Ejercicio 3: Encontramos la ecuación de la circunferencia que pasa los puntos A(1,0), B(3,-2) y C(1,-4).

Resolución:

- Consideremos la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Cada punto A(1,0), B(3,-2) y C(1,-4) pertenece a la circunferencia, y por lo tanto debe satisfacer su ecuación. Reemplazamos y resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$1 + 0 + D + 1 + E + 0 + F = 0 \Rightarrow 1 + D + F = 0 \quad \dots (1)$$

$$9 + 4 + D + 3 + E + (-2) + F = 0 \Rightarrow 13 + 3D - 2E + F = 0 \quad (2)$$

$$1 + 16 + D + 1 + E + (-4) + F = 0 \Rightarrow 17 + D - 4E + F = 0 \quad (3)$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$D = -2$, $E = 4$ y $F = 1$. Luego estos valores los reemplazamos en la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + (-2)x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0} \quad \text{Rpta.}$$

Ejercicio 3: Consideremos la circunferencia de ecuación $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$. calculemos su radio y las coordenadas del centro.

Resolución:

- Multiplicamos la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ por $1/2$ con el objeto de los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a 1 como lo establece la ecuación general de la circunferencia.

$$x \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y + \frac{3}{2} = 0$$

Agrupamos los términos según las variables.

$$x^2 - 2x + y^2 + 3y + \frac{3}{2} \quad \text{sumamos en ambos miembros de la igualdad el cuadra-}$$

do de la mitad de los coeficientes de x e y

$$\text{Así, sumaremos.} \quad \left(\frac{-2}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Obteniendo ahora} \quad \underline{x^2 - 2x + 1} + \underline{y^2 + 3y + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} + 1 + \frac{9}{4}$$

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{7}{4} \quad \text{que es la ecuación prin-}$$

cipal de la circunferencia
dada

Por lo tanto $C\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ y $r = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ Rpta

Ejercicio 5 Determinemos los elementos de la parábola de ecuación $x^2 = 8y$

Resolución

• Como la ecuación es de la Forma $x^2 = 4py$

Entonces $4p = 8 \Rightarrow p = 2$ como $p > 0$ y el eje focal coincide con el eje y la curva tiene su concavidad hacia arriba.

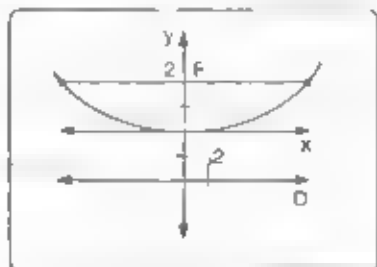
Las coordenadas del foco son $(0, p)$

En este caso $F(0;2)$

La ecuación de la directriz es $y = -p$

Luego $D: y = -2$

El lado recto es $L.R. = |4p| = 8$



Ejercicio 6 Determinemos la ecuación de la parábola de Foco $F(3,0)$ y directriz $x + 3 = 0$

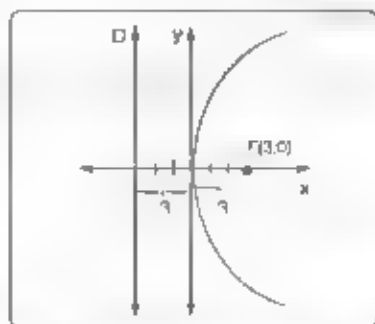
Resolución.

• De las coordenadas del foco, deducimos que el eje focal coincide con el eje x y que $p = 3$

Por lo tanto la curva tiene su concavidad hacia la derecha ($p > 0$)

La ecuación es de la Forma: $y^2 = 4px$

Luego la ecuación pedida es $y^2 = 12x$



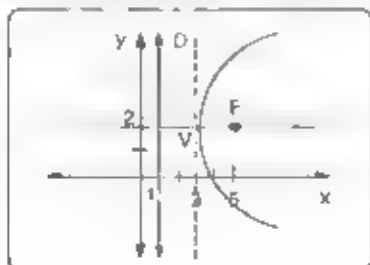
Ejercicio 7 Determinemos los elementos de la parábola de ecuación $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

Resolución.

Ordenamos la ecuación para completar el cuadrado del binomio

$$\begin{aligned} y^2 - 4y - 8x + 28 &= 0 \\ y^2 - 4y + 4 &= (8x - 28 + 4) \\ (y - 2)^2 &= 8x - 24 \\ (y - 2)^2 &= 8(x - 3) \end{aligned}$$

Luego, $h = 3$; $k = 2$ y $p = 2$



Entonces el vértice es el punto $V(3,2)$ y el lado recto es 8

Como esta parábola ha sido trasladada, su eje local también se ha trasladado en $h = 3$ unidades por lo tanto las coordenadas del foco son:

$(3 + p, 2 + 0) = (5,2)$ y la ecuación de la directriz es $D: x = -p + h = -2 + 3 = 1$

$$D: x = 1$$

Ejercicio 9. Determinemos la ecuación de la parábola de foco $F(1,3)$ y vértice $V(2,3)$

Resolución.

Su ecuación es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

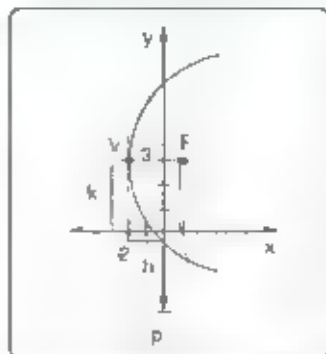
Además $d(V, F) = p = 3$

Remplazando: $(y - 3)^2 = 4 \cdot 3(x + 2)$

$$y^2 - 6y + 9 = 12x + 24$$

Luego de la Parábola es

$$y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$$



Ejercicio 9. Determinemos la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos (x,y) del plano que equidistan del punto $F(2,2)$ y del eje de las abscisas.

Resolución:

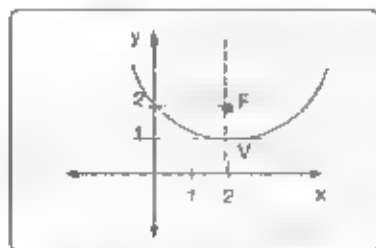
Sabemos que por definición será una parábola con foco en el punto dado y cuya directriz es el eje X

Entonces,

Foco: $F(2,2)$ Directriz: $y = 0$

Para calcular las coordenadas del vértice, determinemos el punto medio entre el foco $(2,2)$ y el punto $(2,0)$, intersección del eje focal con la directriz, que en este caso, es el propio eje X

$$h = \frac{2 + 2}{2} = 2 \quad k = \frac{2 + 0}{2} = 1$$



La ecuación del lugar geométrico pedido es $(x - 2)^2 = 4(y - 1)$

Ejercicio 10. Encontramos los elementos de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$5(x^2 - 16x + 64) + 9(y^2 + 6y + 9) = 221 + 320 + 81$$

$$5(x - 8)^2 + 9(y + 3)^2 = 180 \quad / \quad \frac{1}{180}$$

$$\frac{(x - 8)^2}{36} + \frac{(y + 3)^2}{20} = 1$$

Luego, $h = 8$ y $k = 3$

entonces el centro es el punto $C(8, 3)$

Además, $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

$$b^2 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

Como esta elipse ha sido trasladada con respecto a su posición canónica, su eje focal también se ha trasladado en $h = 8$ unidades, por lo tanto, las coordenadas de los focos son

$$F_1(8 + c, -3) \text{ y } F_2(8 - c, 3),$$

Entonces,

Focos $F_1(12, -3)$ y $F_2(4, 3)$

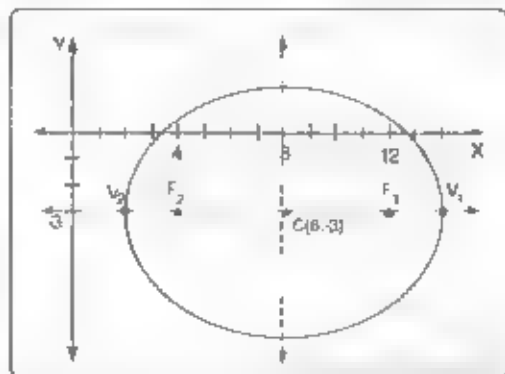
Vértices $V_1(14, 3)$ y $V_2(2, 3)$

Eje mayor $2a = 2 \cdot 6 = 12$

Eje menor $2b = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

Lado recto $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 20}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$

Excentricidad $\frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



Ejercicio 13 Determinemos la ecuación de la elipse con centro en $(3, 1)$ uno de sus vértices $(3, 2)$ y excentricidad $1/3$

Resolución.

Para determinar la ecuación ubicamos en un sistema de ejes cartesianos, el punto centro y el vértice, como se ve en la figura

Como el eje focal es paralelo al eje Y la ecuación es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{con } h = 3 \text{ y } k = 1$$

De la figura, tenemos $a = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Además} \\ e = \frac{1}{3} = \frac{c}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow c = 1$$

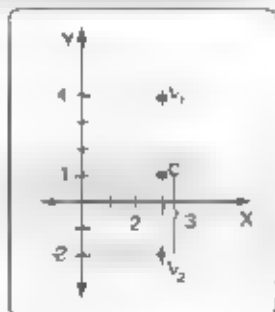
Por propiedad: $b^2 + c^2 = a^2$ obtenemos

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$$

La ecuación pedida en su forma principal es

$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

o su equivalente, en forma general: $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$



Ejercicio 14 • Determinemos la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano, cuya suma de distancias a los puntos fijos $(3, 1)$ y $(-5, 1)$ es 20

Resolución:

Sabemos, por definición, que el lugar geométrico será una elipse con focos en los puntos dados y que

$$2a = 20 \quad , \quad a = 10 \quad , \quad F_1(3, 1) \quad , \quad F_2(-5, 1)$$

Como el centro es el punto medio del segmento que une los focos, entonces

$$h = \frac{3 + (-5)}{2} = -1 \quad , \quad k = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

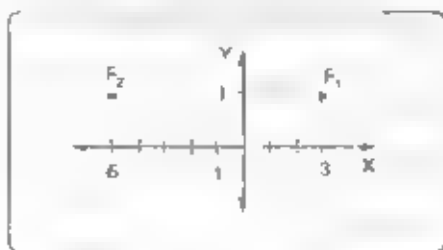
Luego, $C(-1, 1)$

además $d(F_2, C) = d(F_1, C) = c = 4$ y $a = 10$

y como $b^2 + c^2 = a^2$, entonces $b^2 = 84$

El eje focal es paralelo al eje X, entonces la ecuación pedida es $\frac{(x+1)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{84} = 1$

o su equivalente $21x^2 + 25y^2 + 42x - 50y - 2054 = 0$





**EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE
LA LÍNEA RECTA - LA CIRCUNFERENCIA -
LA PARÁBOLA Y LA ELIPSE**

Ejercicio 1 . Calcula el valor de "K" en la recta de ecuación: $3Kx - 5y + 1 = 0$ si su pendiente es $5/3$

- A) 1 B) -1 C) 25/9 D) 10/3 E) 2/5

Ejercicio 2 . ¿Cuál es el valor de "K" si las rectas $L_1: 3x - 2y = 5$ y $L_2: x - Ky = 7$ son paralelas?

- A) 2 B) 3 C) 3/2 D) 2/3 E) 1/15

Ejercicio 3 . La distancia del punto (5, 7) a la recta de ecuación $4x - 3y + 2 = 0$ es

- A) $3/\sqrt{29}$ B) 3/5 C) $\sqrt{29}$ D) 1/4 E) 1/5

Ejercicio 4 . Determina la ecuación de una recta que pasa por el punto (0,0) y es perpendicular a la recta de ecuación $8x + 3y - 2 = 0$

- A) $8x + 3y = 0$ B) $3x + 8y = 0$
C) $3x - 8y = 0$ D) $8x - 3y = 0$
E) Ninguna de las Anteriores

Ejercicio 5 . Determina la ecuación de una recta que pasa por el punto (-3, -2) y forma un ángulo de 45° con el eje X

- A) $y = x + 1$ B) $y = -x + 1$ C) $y = \sqrt{3}x - 3$
D) $y = x + 5$ E) $y = -x + 5$

Ejercicio 6 . ¿Cuál es el valor de "K" en la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + K = 0, \text{ si el radio mide } \sqrt{10/4}?$$

- A) 1 B) -1 C) 1/2 D) 2 E) 3

Ejercicio 7 . Las coordenadas del centro de la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 13 = 0, \text{ son}$$

- A) (2, 1) B) (0, 2) C) (8, 2) D) (1, 2) E) (3, 4)

Ejercicio 8 . En la parábola de ecuación $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$, las coordenadas del foco

- A) (2, 2) B) (3/2, 2) C) (2, 2)
D) (1/2, 2) E) (3, 2)

Ejercicio 9 . Calcula el valor de "K" en la ecuación de la parábola $x^2 = 2xy$, si esta pasa por el punto (3, -2)

- A) 5 B) -5 C) 4/9 D) -9/4 E) 4

Ejercicio 10 . En la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ el lado recto mide}$$

- A) 25/13 B) 50/13 C) 5/13 D) 12 E) 8/17

Ejercicio 11 . Las coordenadas del centro de la elipse de ecuación

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0, \text{ son:}$$

- A) (0, -4) B) (12, 4) C) (5, 6)
D) (1, 2) E) (6, -4)

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. E	4. C	5. A
6. D	7. D	8. D	9. D	10. B
11. E				



IA PRIMERA MATEMÁTICA

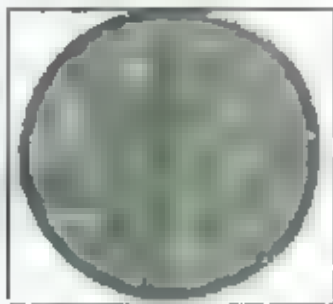
Hypatia (370 - 412)

La primera mujer matemática de reconocimiento vivió en Alejandría, en una época extraordinariamente tempestuosa y violenta.

Hypatia fue hija de Teón, matemático y filósofo neoplatónico. Aunque parece que ella se ocupó más bien de problemas matemáticos y astronómicos, se convirtió en la cabeza de la escuela neoplatónica de Alejandría. Su eloquencia, modestia, belleza e independencia atrajeron a un gran número de seguidores entre ellos, Synesius de Cirene, que más tarde llegó a ser obispo cristiano y de que se conservan varias cartas dirigidas a Hypatia en las que le pide información sobre la construcción de un astrolabio y otros instrumentos astronómicos.

La ciudad de Alejandría fue lugar de enfrentamientos violentos entre la comunidad cristiana y la pagana. Hypatia simboliza para los cristianos el saber y la ciencia de los clásicos griegos identificados por los cristianos de Alejandría con el paganismo y en el año 412 fue horriblemente asesinada por una multitud de fanáticos seguidores de la Iglesia. Su muerte llevó consigo el abandono de la ciudad — muchos intelectuales — que marcó el comienzo de la decadencia de Alejandría como centro cultural del saber clásico.

Hypatia escribió comentarios, hoy perdidos, a la *Arithmética* de Diófanto, a las *Crónicas* de Apolonio y a la obra de Tolomeo.



Astrolabio

Capítulo

16

REPARTO PROPORCIONAL

Antes de pasar a estudiar el reparto proporcional, hablemos primero sobre magnitudes proporcionales.

16.1 MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

“Dos magnitudes se llaman **directamente proporcionales** cuando el cociente de sus valores correspondientes es una cantidad constante”

Ejemplo 1: En el movimiento uniforme, el espacio y el tiempo son magnitudes directamente proporcionales porque el cociente de sus valores correspondientes es, para cada movimiento, una constante llamada **velocidad**.

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES			
Espacio	$e_1 = 20 \text{ Km}$	$e_2 = 40 \text{ Km}$	$e_3 = 60 \text{ Km}$	$e_4 = 80 \text{ Km}$
Tiempo	$t_1 = 2 \text{ h}$	$t_2 = 4 \text{ h}$	$t_3 = 6 \text{ h}$	$t_4 = 8 \text{ h}$

$$\text{Luego } \frac{e_1}{t_1} = \frac{e_2}{t_2} = \frac{e_3}{t_3} = \frac{e_4}{t_4} = \text{Constante} = \text{Velocidad}$$

$$\frac{\text{Espacio (e)}}{\text{Tiempo (t)}} = \text{velocidad (V)}$$

Ejemplo 2: La circunferencia y el diámetro son magnitudes directamente proporcionales porque el cociente de sus valores correspondientes es la constante (π).

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTE									
	$\times 4/3$					$\times 5/4$				
Circunferencia	$2\pi r$	πd	6π	$2\pi r_2 = 2\pi d_2$	6π	$2\pi r$	$2\pi d$	10π		
Radio	1	r_2	r_2	r		r_2	$2/4 = r$	d_2	$2/5 = d$	r_2
				$\times 4$				$\times 5/4$		

Luego
$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \frac{C_3}{d_3} = \text{Constante} = \pi$$

Longitud de la circunferencia (C) = π

Diámetro de la circunferencia (D)

16.2 MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

“Dos magnitudes se llaman **inversamente proporcionales**, cuando el producto de sus valores correspondientes es una constante”

Ejemplo 1 En el movimiento uniforme la velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales porque el producto de sus valores correspondientes es, para cada movimiento, una constante llamada espacio

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES			
Velocidad	$v_1 = 30 \text{ Km/h}$	$v_2 = 60 \text{ Km/h}$	$v_3 = 80 \text{ Km/h}$	$v_4 = 40 \text{ Km/h}$
Tiempo	$t_1 = 8 \text{ h}$	$t_2 = 4 \text{ h}$	$t_3 = 3 \text{ h}$	$t_4 = 6 \text{ h}$

Luego $v_1 t_1 = v_2 t_2 = v_3 t_3 = v_4 t_4 = \text{Constante} = \text{Espacio}$

velocidad (v) tiempo (t) = espacio (e)

En este ejemplo 1, se cumple que a mayor velocidad menor será el tiempo empleado

Nota Importante Las definiciones anteriores son las que se deben aceptar bajo un punto de vista estrictamente matemático. Es corriente decir que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando van de más a más y son **inversamente proporcionales** cuando van de más a menos. Estos son criterios que se deben desear, porque hay magnitudes que van de más a más o van de más a menos y sin embargo no son directa o inversamente proporcionales.

Ejemplo A mayor radio es evidente que se tiene mayor área en el círculo sin embargo el radio y el círculo no son magnitudes directamente proporcionales, como vamos a demostrar

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES	
Círculo	$\pi r^2 = \pi (3)^2 = 9\pi$	$\pi R^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$
Radio	$r = 3$	$r = 4$

Si estas dos magnitudes fueran directamente proporcionales el cociente de sus valores correspondientes debería ser constante lo que no es cierto porque.

$$\left(\frac{\pi r^2}{r} \right) = \frac{\pi (3)^2}{3} = 3\pi$$

$$\left(\frac{\pi R^2}{R} \right) = \frac{\pi (4)^2}{4} = 4\pi$$

(no son iguales)

Propiedad importante en las Magnitudes Directamente Proporcionales

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = K \text{ (Constante)}$$

Verificación

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{4+6+8+12}{2+3+4+6} = 2 \text{ (constante)}$$

16.3 REPARTO PROPORCIONAL

El reparto proporcional es una regla que tiene por objeto repartir una cantidad en partes directa o inversamente proporcional a dos o más números dados

Notación

- S: Número o suma que se debe repartir
- a, b, c: factores de proporcionalidad (pueden ser dos o más)
- x, y, z: partes o sumandos respectivamente proporcionales a a, b y c

Osea:

$$S = x + y + z$$

PROBLEMA GENERAL Repartir el número (S) en tres partes que sean directamente proporcionales a tres números dados a, b, y c.

Resolución

Llamemos x, y, z a las partes buscadas, como estas partes deben ser directamente

proporcionales a los números a , b y c el cociente debe ser constante, de acuerdo con la definición de magnitudes directamente proporcionales

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \text{constante}$$

Por propiedad:

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \text{---(I)}$$

Sabemos que:

$$x+y+z = N \quad \text{---(II)}$$

Hacemos que:

$$a+b+c = S \quad \text{---(III)}$$

Reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$\frac{N}{S} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Donde

Fórmulas por usar

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{S} N \\ y &= \frac{b}{S} N \\ z &= \frac{c}{S} N \end{aligned}$$

Aplicación Dividir el número 1 000 en 3 partes que sean directamente proporcionales a los números 2, 3 y 5

Resolución

Llamemos x , y y z a las partes buscadas. Como estas partes deben ser directamente proporcionales a los números a , b y c el cociente debe ser constante, de acuerdo a la definición de magnitudes directamente proporcionales

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \text{Constante}$$

Por propiedad:

$$\frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \quad \text{pero } x+y+z = 1\,000$$

$$\frac{1\,000}{10} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

Donde:

$$i) \quad 100 = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 200}$$

$$ii) \quad 100 = \frac{y}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 300}$$

$$iii) \quad 100 = \frac{z}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 500}$$

Luego las 3 partes buscadas son 200, 300 y 500 **Rpta.**



Método Práctico: Dividir el número 1 000 en tres partes directamente proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Resolución

Sean las 3 partes pedidas $\begin{array}{l} 2k \\ 3k \\ 5k \end{array}$ (1)

Luego, $2k + 3k + 5k = 1\,000$

$$10k = 1\,000 \quad \rightarrow \quad k = 100$$

Reemplazamos el valor de "k" en (1), obteniendo

$$2k = 2(100) = 200$$

$$3k = 3(100) = 300$$

$$5k = 5(100) = 500$$

Nota: Si los números a , b y c son heterogéneos, habrá que hacerlos previamente homogéneos. Tal es el caso en que los números a , b y c están que unidades heterogéneas. En este caso se da un común denominador a se toman solamente los numeradores.

Ejemplo: Repartir 858 en partes directamente proporcionales a los números $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{5}$

Resolución

Damos común denominador a los quebrados $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$, $\frac{5}{6} = \frac{50}{60}$ y $\frac{4}{5} = \frac{48}{60}$

Tomando sólo los numeradores, obtenemos $\frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48} = \text{constante}$

Por propiedad: $\frac{x+y+z}{45+50+48} = \frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48}$, pero $x+y+z = 858$

Donde

$$\frac{858}{143} = \frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48}$$

$$\text{i) } \frac{858}{143} = \frac{x}{45} \quad \rightarrow \quad x = \frac{858 \times 45}{143} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 270}$$

$$\text{ii) } \frac{858}{143} = \frac{y}{50} \quad \rightarrow \quad y = \frac{858 \times 50}{143} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 300}$$

$$\text{iii) } \frac{858}{143} = \frac{z}{48} \quad \rightarrow \quad z = \frac{858 \times 48}{143} \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 288}$$

Luego, las partes pedidas son 270, 300 y 288 **Rpta.**

Método Práctico:

858

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4}k \\ \frac{5}{6}k \\ \frac{4}{5}k \end{array} \right\}$$

(1)

Donde: $\frac{3}{4}k + \frac{5}{6}k + \frac{4}{5}k = 858$ · Damos común denominador

$$\frac{45k + 50k + 48k}{60} = 858$$

$$143k = 858 \times 60 \rightarrow k = \frac{858 \times 60}{143} \rightarrow \boxed{k = 360}$$

Reemplazamos el valor de "k" en (1), obteniendo:

$$\frac{3}{4}k = \frac{3}{4} \times 360 = 270$$

$$\frac{5}{6}k = \frac{5}{6} \times 360 = 300$$

$$\frac{4}{5}k = \frac{4}{5} \times 360 = 288$$

16.4 REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

PROBLEMA GENERAL. Dividir un número (N) en 3 partes que sean inversamente proporcionales a 3 números dados a, b y c.

Resolución

Llamemos x, y y z las partes buscadas, como estas partes deben ser inversamente proporcionales a los números a, b y c, el producto debe ser constante de acuerdo con la definición de magnitudes inversamente proporcionales.

$$x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c = \text{constante}$$

Estas igualdades pueden escribirse así:

$$\frac{x}{1/a} = \frac{y}{1/b} = \frac{z}{1/c} = \text{constante}$$

Estas igualdades nos indican que las partes x, y y z son directamente proporcionales a las inversas de los números a, b y c. Se tiene entonces la siguiente resolución general.

"Para dividir el número (N) en partes inversamente proporcionales a otros números dados a, b y c se divide el número "N" en partes directamente proporcionales a las inversas de los números a, b y c, es decir a: $1/a$, $1/b$ y $1/c$ "

Aplicación Repartir 360 en 3 partes que sean inversamente proporcionales a los números 3, 4 y 6

Resolución

Tomamos la inversa a los números 3, 4 y 6, obteniendo $1/3$, $1/4$ y $1/6$

Luego, damos común denominador a los quebrados $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} = \frac{4}{12} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{2}{12}$

Tomando sólo los numeradores obtenemos que $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \text{constante}$

Por propiedad: $\frac{x+y+z}{4+3+2} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ Pero, $x+y+z=360$

$$\frac{360}{9} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$



Donde i) $\frac{360}{9} = \frac{x}{4} \rightarrow 40 = \frac{x}{4} \rightarrow \boxed{x = 160}$

ii) $\frac{360}{9} = \frac{y}{3} \rightarrow 40 = \frac{y}{3} \rightarrow \boxed{y = 120}$

iii) $\frac{360}{9} = \frac{z}{2} \rightarrow 40 = \frac{z}{2} \rightarrow \boxed{z = 80}$

Luego, las partes pedidas son 160, 120 y 80 **Rpta.**

Método Práctico:

$$\begin{array}{r} \frac{k}{3} \\ \frac{k}{4} \\ \frac{k}{6} \\ \hline 360 \end{array} \quad \dots \quad (I)$$

Donde: $\frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{6} = 360$ Damos común denominador

$$\frac{4k + 3k + 2k}{12} = 360 \rightarrow 9k = 360 \times 12$$

$$k = 40 \times 12 \rightarrow \boxed{k = 480}$$

Reemplazamos el valor de "k" en (I)

$$\begin{array}{l} \frac{k}{3} = \frac{480}{3} = 160 \\ \frac{k}{4} = \frac{480}{4} = 120 \\ \frac{k}{6} = \frac{480}{6} = 80 \end{array}$$

Ejemplo. Repartir 735 en partes inversamente proporcionales a $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ y 3

Resolución

Se toman los inversos de los factores de proporcionalidad, o sea

La inversa de $\frac{1}{5}$ es $\frac{5}{1} = 5$

La inversa de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$

La inversa de 3 es $1/3$

- Damos común denominador a: $5 \quad \frac{5}{3} \quad \frac{1}{3} = \frac{15}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}$

Se hace el reparto proporcional directo entre los numeradores

Por propiedad $\frac{\frac{x}{15} + \frac{y}{5} + \frac{z}{1}}{15 + 5 + 1} = \frac{x}{15} = \frac{y}{5} = \frac{z}{1} = \text{Constante}$ Pero $x + y + z = 735$

$$\frac{735}{21} = \frac{x}{15} = \frac{y}{5} = \frac{z}{1}$$

Donde

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \frac{735}{21} &= \frac{x}{15} \rightarrow 35 = \frac{x}{15} \rightarrow x = 525 \\ \text{II)} \quad \frac{735}{21} &= \frac{y}{5} \rightarrow 35 = \frac{y}{5} \rightarrow y = 175 \\ \text{III)} \quad \frac{735}{21} &= \frac{z}{1} \rightarrow 35 = z \rightarrow z = 35 \end{aligned}$$

16.4.1 CASOS COMBINADOS DE REPARTO PROPORCIONAL

Ejemplo Repartir 276 en 3 partes directamente proporcionales a 2, 4 y 5 e inversamente proporcionales a 12, 18 y 20

Resolución

- Los factores directos son: 2, 4 y 5

Tomamos la inversa a 12, 18 y 20 $\rightarrow 1/12, 1/18$ y $1/20$

Damos común denominador a $\frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{20} = \frac{15}{180}, \frac{10}{180}, \frac{9}{180}$

1. $1000 \div 5 = 200$ (los tres números se reparten en partes iguales)
 que ambos ya son directos, obteniendo

2	4	5	Sumamos quinta a cada término y lo dividimos entre 5, obteniendo
15	10	9	
2×15	4×10	5×9	
30	40	45	
11	8	9	

Luego el reparto será $\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9} = \text{constante}$

Por propiedad: $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{9} = \frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9}$ pero $x + y + z = 276$

$$\frac{276}{23} = \frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9}$$

$$\frac{276}{23} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 72$$

Donde i) $\frac{276}{23} = \frac{x}{6} \rightarrow 12 = \frac{x}{6} \rightarrow x = 72$

ii) $\frac{276}{23} = \frac{y}{8} \rightarrow 12 = \frac{y}{8} \rightarrow y = 96$

iii) $\frac{276}{23} = \frac{z}{9} \rightarrow 12 = \frac{z}{9} \rightarrow z = 108$

Luego las partes pedidas son $\{ 72, 96 \text{ y } 108 \}$ **Rpta**

Ejemplo. Repartir el número 1560 en tres partes de modo que la primera sea a la tercera como 7 es a 3 y que la primera sea a la segunda como 5 es a 4

Resolución

Sean $x = \text{primera parte}$

$y = \text{segunda parte} \Rightarrow x + y + z = 1560 \quad (1)$

$z = \text{tercera parte}$

Del enunciado, obtenemos

i) $\frac{x}{z} = \frac{7}{3}$ ii) $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$	Como "X" se repite tratamos que sean homogéneos o sea que tomen el mismo valor para eso multiplicamos $\times 5$ a los dos términos de (i), $y \times 7$ a los dos términos de (ii) obteniendo
---	--

$$i) \quad \frac{x}{z} = \frac{7 \times 5}{3 \times 5} \rightarrow \frac{x}{z} = \frac{35}{15}$$

$$x = 35k$$

$$z = 15k$$

$$ii) \quad \frac{x}{y} = \frac{5 \times 7}{4 \times 7} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{35}{28}$$

$$x = 35k$$

$$y = 28k$$

Reemplazamos los valores de x , y y z en (I) $35k + 28k + 15k = 1\,500$

$$78k = 1\,500$$

$$k = 20$$

Reemplazamos el valor de " k " en

$$x = 35k \rightarrow x = 35(20)$$

$$\rightarrow x = 700$$

$$y = 28k \rightarrow y = 28(20)$$

$$\rightarrow y = 560$$

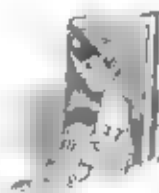
$$z = 15k \rightarrow z = 15(20)$$

$$\rightarrow z = 300$$

Luego las 3 partes pedidas son 700, 560 y 300 **Apta**



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL



Problema 1 . Repartir 288 en partes directamente proporcionales a 3 y 5

Resolución

Sean las dos partes pedidas x e y

$$288 \quad \begin{cases} x = 3k \\ y = 5k \end{cases} \quad \dots (I)$$

$$\text{Luego.} \quad 3k + 5k = 288 \rightarrow 8k = 288 \rightarrow k = \frac{288}{8} \quad \left[k = 36 \right]$$

Reemplazamos el valor de " k " en (I):

$$x = 3k \rightarrow x = 3(36) \rightarrow x = 108$$

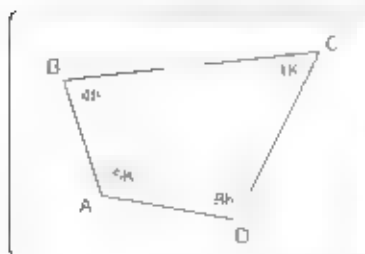
$$y = 5k \rightarrow y = 5(36) \rightarrow y = 180 \quad \text{Apta.}$$

Problema 3 ¿Cuál es la medida de cada ángulo de un cuadrilátero si sus ángulos son directamente proporcionales a 1, 4, 5 y 8 respectivamente?

Resolución

Sabemos que en todo cuadrilátero la suma de sus 4 ángulos internos es igual a 360° veamos:

$$1k + 4k + 5k + 8k = 360^\circ \rightarrow 18k = 360^\circ \therefore k = 20^\circ$$



Luego los ángulos pedidos son:

$$\begin{aligned} A = 5k &\rightarrow A = 5(20^\circ) \rightarrow \hat{A} = 100^\circ \\ B = 4k &\rightarrow B = 4(20^\circ) \rightarrow \hat{B} = 80^\circ \\ C = 1k &\rightarrow C = 1(20^\circ) \rightarrow \hat{C} = 20^\circ \\ D = 8k &\rightarrow D = 8(20^\circ) \rightarrow \hat{D} = 160^\circ \end{aligned} \quad \text{Apta}$$

Problema 4 Vanessa repartió cierta cantidad de dinero entre 3 niños en partes proporcionales a los números 4, 5 y 7 si el tercero recibió 42 dólares más que el primero. ¿Qué cantidad de dinero repartió?

Resolución

Sea C = Cantidad de dinero repartido

$$\left. \begin{array}{l} x = 4k \\ y = 5k \\ z = 7k \end{array} \right\} C = 4k + 5k + 7k$$

$$C = 16k \quad \dots (I)$$

Del enunciado el tercero recibió 42 dólares más que el primero obtenimos:

$$z - x = 42 \text{ dólares}$$

$$7k - 4k = 42 \rightarrow 3k = 42 \therefore k = 14$$

Reemplazamos el valor de "k" en (I)

$$C = 16(14) \therefore C = 224 \text{ dólares} \quad \text{Apta}$$

Problema 4 Repartir 225 en partes inversamente proporcionales a 2, 4 y 7

Resolución

Sean las partes pedidas x , y y z

$$225 = \left\{ \begin{array}{l} x = k \cdot 2 \\ y = k \cdot 4 \end{array} \right. \quad \text{E}$$



Luego

$$x + y + z = 225$$

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{7} = 225$$

Damos común denominador

$$\frac{14k + 7k + 4k}{28} = 225 \rightarrow \frac{25k}{28} = 225$$

$$k = \frac{225 \times 28}{25} \quad \therefore \quad \boxed{k = 252}$$

Reemplazamos el valor de "k" en (i)

$$x = k/2 \rightarrow x = \frac{252}{2} \rightarrow \boxed{x = 126}$$

$$y = k/4 \rightarrow y = \frac{252}{4} \rightarrow \boxed{y = 63}$$

$$z = k/7 \rightarrow z = \frac{252}{7} \rightarrow \boxed{z = 36} \quad \text{Rpta}$$

Problema 5 - Un padre repartió una suma de dinero entre sus tres hijos, uno de 10 años, el otro de 12 años y el otro de 14 años. Si el reparto fue inversamente proporcional a sus edades recibiendo el de mayor edad 420 soles. ¿Cuál es la suma repartida?

Resolución

Sea: "N" = suma repartida

$$N = \left\{ \begin{array}{l} x = k/10 \\ y = k/12 \\ z = k/14 \end{array} \right\} \quad \therefore \quad (I)$$

$$\text{Del enunciado: } \frac{k}{14} = 420 \rightarrow \boxed{k = 420 \times 14}$$

Reemplazamos valores de "k" en (I).

$$x = \frac{k}{10} \rightarrow x = \frac{420 \times 14}{10} \rightarrow \boxed{x = 588 \text{ soles}}$$

$$y = \frac{k}{12} \rightarrow y = \frac{420 \times 14}{12} \rightarrow \boxed{y = 490 \text{ soles}}$$

$$z = \frac{k}{14} \rightarrow z = \frac{420 \times 14}{14} \rightarrow \boxed{z = 420 \text{ soles}}$$

Luego, La suma repartida es: $\boxed{x + y + z = 1\,498} \quad \text{Rpta.}$



TALLER DE PROBLEMAS N° 58

Problema 1 Dividir el número 490 en 4 partes que sea directamente proporcionales a los números 2, 3, 4 y 5. Dar como respuesta la mayor de las partes.

Resolución:

Problema 3 : Repartir 650 en 3 partes directamente proporcionales a 3, 4 y 6 e inversamente proporcionales a 6, 12 y 24. Dar como respuesta la mayor de las partes.

Resolución:

Rpta: 175

Rpta. 300

Problema 2 : Repartir 570 en partes directamente proporcionales a los números $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$. Dar como respuesta la menor de las partes.

Resolución:

Problema 4 Repartir el número 615 en tres partes de modo que la primera sea a la tercera como 9 es a 4 y que la primera sea a la segunda como 6 es a 5. Dar como respuesta la suma de los dos menores.

Resolución:

Rpta: 60

Rpta: 345



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

Problema Repartir 420 en partes directamente proporcionales a 5 y 7. Dar como respuesta la diferencia de dichas partes.

- A) 120 B) 90 C) 70 D) 35 E) 175

Problema Repartir 143 en partes directamente proporcionales a 2,3 y 6. Dar como respuesta la suma de las dos mayores.

- A) 65 B) 117 C) 104 D) 127 E) N.A.

Problema Repartir 740 en partes directamente proporcionales a $2\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{3}$. Dar como respuesta a menor de las partes.

- A) 480 B) 160 C) 80 D) 60 E) N.A.

Problema Repartir 135 en partes directamente proporcionales a 0,3, $\frac{1}{5}$ y 4. Dar como respuesta la mayor de las partes.

- A) 100 B) 60 C) 140 D) 120 E) N.A.

Problema Nataly repartió cierta cantidad de caramelos entre 3 niños, en partes proporcionales a los números 3, 5 y 8, si el tercero recibió 78 más que el segundo. ¿Cuál es la cantidad de caramelos que repartió?

- A) 461 B) 416 C) 641 D) 248 E) 426

Problema Las medidas de los ángulos de un pentágono son directamente proporcionales a 1, 2, 4, 6 y 7. Hallar la medida del mayor de los ángulos.

- A) 198° B) 108° C) 162° D) 189° E) 164°

Problema Una madre reparte un cierto

número de manzanas entre sus dos hijas, en partes proporcionales a los números 3 y 5, si la segunda ha recibido 42 manzanas más que la primera. ¿Cuál es el número total de manzanas que distribuye?

- A) 146 B) 172 C) 186 D) 168 E) 184

Problema Repartir 110 en partes inversamente proporcionales a 3 y 7. Dar como respuesta la diferencia de dichas partes.

- A) 33 B) 44 C) 66 D) 77 E) 22

Problema Repartir 288 en partes inversamente proporcionales a $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{6}$. Dar como respuesta una de las partes.

- A) 26 B) 49 C) 216 D) 84 E) 62

Problema Repartir 455 entre "A", "B" y "C" de modo que lo de "A" sea a lo de "B" como 2 es a 3 y lo de "B" sea a lo de "C" como 4 es a 5. ¿Cuánto le tocó a "C"?

- A) 104 B) 195 C) 158 D) 185 E) N.A.

Problema Las medidas de los ángulos de un triángulo son directamente proporcionales a 2, 5 y 8. Hallar la medida del mayor de dichos ángulos.

- A) 60° B) 84° C) 96° D) 104° E) 98°

Problema Repartir 252 entre A, B y C de modo que lo de "A" sea a lo de "B" como 4 es a 7, y lo de "A" sea a lo de "C" como 2 es a 5. ¿Cuánto le tocó a "A"?

- A) 84 B) 48 C) 120 D) 68 E) 46

Problema 1 Un padre repartió 66 soles entre tres hijos: uno de 8 años, otro de 12 años y el otro de 15 años. Si el reparto fue inversamente proporcional a las edades, ¿Cuánto recibió el de 8 años?

- A) S/ 30 B) S/ 20 C) S/ 6 D) S/ 40 E) N.A.

Problema 2 Repartir 480 en tres partes directamente proporcionales a 3, 4 y 5 e inversamente proporcionales a 6, 12 y 18. Dar como respuesta una de las partes.

- A) 261 B) 144 C) 130 D) 140 E) 117

Problema 3 Repartir 1134 en tres partes cuyos cuadrados sean directamente proporcionales a 8, 50 y 98. Dar la menor parte.

- A) 81 B) 162 C) 324 D) 405 E) 567

Problema 4 Si al repartir 6138 en partes directamente proporcionales a 1, 2, 4, 8; ... 2^n , la mayor de las partes es 3072. ¿Cuál es el valor de "n"?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Problema 5 Se reparte el número 60 directamente proporcional a 5 números consecutivos. Hallar la suma de lo que reciben el 1ro, 3ro y 5to.

- A) 24 B) 36 C) 32 D) 34 E) N.A.

Problema 6 Un tío reparte 75 950 entre sus 4 sobrinos de la forma siguiente: lo que le toca al segundo es a lo que le toca al primero como 5 es a 3; lo del segundo es a lo del tercero como 2 es a 5. ¿Cuánto recibe el que le tocó más?

- A) 25 250 B) 26 750 C) 27 350
D) 26 250 E) 25 750

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. C	4. D	5. B
6. D	7. D	8. B	9. C	10. B
11. C	12. B	13. A	14. B	15. B
16. B	17. B	18. D		

16.5 REGLA DE SOCIEDAD O COMPAÑÍA

16.5.1 OBJETIVO

La regla de sociedad o compañía tiene por objeto repartir las ganancias o pérdidas entre los diversos socios.

16.5.2 CLASES

La regla de sociedad o compañía puede ser simple o compuesta.

16.5.3 REGLA DE SOCIEDAD SIMPLE

Se llama simple en los tres siguientes casos:

- 1° Capitales iguales y tiempos iguales
- 2° Capitales iguales y tiempos desiguales, y
- 3° Tiempos iguales y capitales desiguales

Primer Caso Si los capitales y tiempos son iguales se divide la ganancia o pérdida entre el número de socios.

Ejemplo: Tres socios han formado una compañía aportando cada uno de ellos 500 soles. al cabo de seis meses hay ganancias de 3 000 soles. ¿Cuánto le corresponde de ganancia a cada uno?

Resolución:

A cada socio le corresponde $\frac{3\,000 \text{ soles}}{3} = 1\,000$ soles de ganancia para cada socio

Segundo Caso Si los capitales son iguales y los tiempos diferentes se divide la ganancia o pérdida en partes directamente proporcionales a los tiempos.

Ejemplo: Tres socios forman una compañía. Cada uno de ellos aporta un mismo capital. El primero durante 2 años el segundo durante 3 años y el tercero durante 5 años. Habiendo una ganancia de 7 000 dólares, se desea saber cuánto le corresponde a cada uno.

Resolución

Sean x , y , z la ganancia que le corresponde a cada uno, del enunciado, obtenemos

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \text{Constante}$$

Por propiedad $\frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, pero $x+y+z = 7\,000$

$$\frac{7\,000}{10} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

$$\frac{700}{1} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

Donde: I) $700 = \frac{x}{2} \rightarrow x = 1\,400$ dólares

II) $700 = \frac{y}{3} \rightarrow y = 2\,100$ dólares

III) $700 = \frac{z}{5} \rightarrow z = 3\,500$ dólares **Rpta.**

Tercer Caso Si los tiempos son iguales y capitales diferentes se divide la ganancia o pérdida en partes directamente proporcionales a los capitales

Ejemplo: Tres socios forman una compañía. el primero aporta 2 000 dólares, el segundo aporta 3 000 dólares y el tercero aporta 5 000 dólares. ¿Cuánto corresponde a cada socio si la ganancia es de 20 000 dólares?

Resolución:

Sea: x , y y z , lo que le corresponde a cada socio

Del enunciado, obtenemos:

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{2\,000}{2\,000+3\,000+5\,000} = \frac{y}{2\,000+3\,000+5\,000} = \frac{z}{2\,000+3\,000+5\,000}$$

Por propiedad:

$$\frac{2\,000}{2\,000+3\,000+5\,000} = \frac{x}{2\,000} = \frac{y}{3\,000} = \frac{z}{5\,000}$$

$$\frac{20\,000}{10\,000} = \frac{x}{2\,000} = \frac{y}{3\,000} = \frac{z}{5\,000}$$

Donde I) $2 = \frac{x}{2\,000} \rightarrow x = 4\,000$ dólares

II) $2 = \frac{y}{3\,000} \rightarrow y = 6\,000$ dólares

III) $2 = \frac{z}{5\,000} \rightarrow z = 10\,000$ dólares **Rpta.**

Ejemplo: Sara inicia un negocio con 5 000 dólares. A los 4 meses se asocia con Manuel quien aporta 8 000 dólares, 3 meses después Nataly ingresa al negocio con 6 000 dólares. Al año de iniciado el negocio se efectúa el balance y la ganancia es de 462 000 dólares. ¿Qué parte de esta ganancia le corresponde a cada uno?

Resolución:

Este problema se razona de la siguiente manera:

- Los 5 000 dólares de Sara fueron trabajados 12 meses, correspondiendo:
 $5\,000 \times 12 = 60\,000$ dólares
- Los 8 000 dólares de Manuel fueron trabajados $(12 - 4) = 8$ meses correspondiendo
 $8\,000 \times 8 = 64\,000$ dólares.
- Los 6 000 dólares de Nataly fueron trabajados $(8 - 3) = 5$ meses, correspondiendo
 $6\,000 \times 5 = 30\,000$ dólares

Ahora llamamos x , y , z a las ganancias que le corresponde a cada uno.

Donde

$$\frac{x}{60\,000} = \frac{y}{64\,000} = \frac{z}{30\,000}$$

Por propiedad:

$$\frac{462\,000}{60\,000 + 64\,000 + 30\,000} = \frac{x}{60\,000} = \frac{y}{64\,000} = \frac{z}{30\,000}$$

$$\frac{462\,000}{154\,000} = \frac{x}{60\,000} = \frac{y}{64\,000} = \frac{z}{30\,000}$$

$$3 = \frac{x}{60\,000} = \frac{y}{64\,000} = \frac{z}{30\,000}$$

Donde I) $3 = \frac{x}{60\,000} \rightarrow x = 180\,000 \text{ dólares}$

II) $3 = \frac{y}{64\,000} \rightarrow y = 192\,000 \text{ dólares}$

III) $3 = \frac{z}{30\,000} \rightarrow z = 90\,000 \text{ dólares}$ **Rpta.**



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REGLA DE SOCIEDAD O COMPANÍA

Problema 1: Cinco amigos aportan cada uno 4 550 dólares para efectuar un negocio. Al final de este negocio obtienen una ganancia de 3 550 dólares. ¿Cuánto de esta ganancia le corresponde a cada uno?

- A) 630 dólares B) 710 dólares
C) 810 dólares D) 750 dólares
E) N.A.

Problema 2: Tres amigos aportan cada uno 6 500 dólares para efectuar un negocio. Al final de éste obtienen una pérdida de 3 510 dólares. ¿Cuánto de esta pérdida le corresponde a cada uno?

- A) 1 360 dólares B) 1 270 dólares
C) 1 170 dólares D) 1 400 dólares
E) N.A.

Problema 3: Tres socios han obtenido una ganancia de 4 300 soles. ¿Cuánto le corresponde a uno de ellos, si el primero invirtió en el negocio 4 000 soles, el segundo 6 000 soles, y el tercero 7 200 soles?

- A) S/ 1 200 B) S/ 1 400 C) S/ 1 600
D) S/ 1 500 E) N.A.

Problema 4: Tres socios han tenido una pérdida de 8 800 soles. El primero invirtió en la sociedad 4 000 soles durante 3 años, el segun-

do 7 000 soles durante 2 años, y el tercero 4 500 soles durante 4 años. ¿Cuál es la pérdida que le corresponde a uno de ellos?

- A) S/ 4 200 B) S/ 3 200 C) S/ 2 800
D) S/ 2 600 E) N.A.

Problema 5: Dos socios A y B ganarán 21 000 dólares al final de los 8 meses que duró un negocio. Cada uno aportó 6 000 dólares pero el socio B ingresó al negocio 2 meses después de la iniciación de mismo. ¿Cuánto le corresponde a uno de ellos de la ganancia obtenida?

- A) 11 000 dólares B) 9 000 dólares
C) 8 000 dólares D) 6 000 dólares
E) N.A.

Problema 6: A y B reúnen 850 dólares para un negocio. A aporta 350 dólares y el resto es cubierto por B. Al finalizar el negocio tienen una ganancia de 595 dólares. ¿Qué parte de la ganancia le corresponde a uno de ellos?

- A) 245 dólares B) 265 dólares
C) 350 dólares D) 380 dólares
E) N.A.

Problema 7: Manuel emprende un negocio con un capital de 2 500 dólares. A los 2 meses entra como socio Miguel aportando 2 500 dólares y al cabo de otros dos meses admiten a

Walter aportando también 2 500 dólares. Si después de un año de emprendido el negocio tienen una ganancia de 4 500 dólares ¿Cuánto le toca a uno de ellos?

- A) 1 300 dólares B) 1 400 dólares
C) 1 500 dólares D) 1 700 dólares
E) N.A

Problema 10 Cuatro amigos forman una pequeña empresa. La primera aporta $\frac{2}{5}$ del capital, la segunda $\frac{1}{3}$ del capital, la tercera 400 dólares y la cuarta 300 dólares obteniendo un

beneficio de 2 100 dólares ¿Cuánto le toca a uno de ellos?

- A) 840 dólares B) 600 dólares
C) 360 dólares D) 280 dólares
E) N.A

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. D	4. C
5. B	6. A	7. C	8. A

15.6 PROMEDIOS

15.6.1 PROMEDIO

Se denomina promedio o cantidad media de varias cantidades diferentes a una cantidad inferior a la mayor y superior a la menor.

Sean las cantidades: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Donde: $a_1 \leq p \leq a_n \rightarrow$ Es un promedio

Existen varios tipos de promedios siendo los más importantes

15.6.2 PROMEDIO ARITMÉTICO (P.A.)

Se llama así a la suma de "n" cantidades dividida entre "n"

Sean las cantidades que intervienen: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Luego

$$P.A. = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

Ejemplo Calcular el promedio de 20, 30 y 40

Resolución.

Por definición de promedio aritmético, obtenemos

$$P.A. = \frac{20 + 30 + 40}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

$$P.A. = 30$$

15.6.3 PROMEDIO GEOMÉTRICO (P.G.)

Se llama así a la raíz enésima del producto de "n" factores.

Sean las cantidades que intervienen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Luego

$$\overline{P.G.} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n}$$

Ejemplo. Calcular el promedio geométrico de los números 2, 4 y 8

Resolución

Por definición de P.G., obtenemos

$$\overline{P.G.} = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$\overline{P.G.} = 4$$

15.6.4 PROMEDIO ARMÓNICO (P.H.):

Se denomina promedio armónico de varias cantidades a la inversa del promedio aritmético de los recíprocos de dichas cantidades.

Sean las cantidades que intervienen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sus inversas de dichas cantidades serán:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}$$

Luego,

$$\overline{P.H.} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)}$$

Ejemplo Calcular el promedio armónico de 3, 4 y 5

Resolución

Por definición de P.H., obtenemos

$$\overline{P.H.} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{3} \right)} = \frac{3}{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)}$$

Damos común de denominador

$$\overline{P.H.} = \frac{3}{\left(\frac{20 + 15 + 12}{60} \right)} = \frac{3(60)}{47}$$

$$\overline{P.H.} = \frac{180}{47}$$

PROPIEDAD

Para un conjunto de números desiguales, su promedio aritmético es siempre mayor que su promedio geométrico, y éste a su vez mayor que su promedio armónico

$$\{ P.A. > P.G. > P.H. \}$$



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE PROMEDIOS

Problema 1 El promedio aritmético de 6 números es 5. Si dos de dichos números es 3 y 7. Calcular el promedio de los 4 números restantes.

Resolución:

Sean los números: $a_1, a_2, a_3, a_4, 3, 7$
 No se conocen $\underbrace{\hspace{10em}}$ Se conocen

Por definición de P.A.

$$P.A. = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 3 + 7}{6} \Rightarrow 5 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 10}{6}$$

$$30 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 10 \rightarrow \boxed{20 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \quad (I)$$

Luego, el promedio de 4 números restantes sería

$$\text{Promedio } 4_{\text{ps}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \quad \dots\dots (II)$$

Reemplazamos (I) en (II): $\text{Promedio } 4_{\text{ps}} = \frac{20}{4} = 5$ **Rpta.**

Problema 2 Hallar el promedio aritmético de $\underbrace{4, 4, 4, \dots, 4}_{8 \text{ veces}}$ y $\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{6 \text{ veces}}$

Resolución:

En primer lugar, calculamos las siguientes sumas

$$\underbrace{4, 4, 4, \dots, 4}_{8 \text{ veces}} = \underbrace{4 + 4 + 4 + \dots + 4}_{8 \text{ veces}} = 8(4) = 32$$

$$\underbrace{3, -3, \dots, -3}_{6 \text{ veces}} = \underbrace{(-3) + (-3) + (-3) + \dots}_{6 \text{ veces}} = 6(-3) = -18$$

$$\text{Luego: } \text{Promedio} = \frac{\text{Suma de Cantidades}}{\# \text{ de cantidades}} = \frac{(32) + 18}{8 + 6}$$

$$\text{Promedio} = \frac{14}{14} = 1 \quad \text{Rpta.}$$

Problema 3 El promedio aritmético de 5 números es 25, si el promedio aritmético de 2 de ellos es 20. ¿Cuál es la suma de los 3 números restantes?

Resolución

Sean los 5 números: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

$$\text{Promedio (5 \# s)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$$

$$25 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$$

$$\boxed{125 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} \quad (I)$$

Promedio aritmético de 2 de los números es 20. veamos

$$\text{Promedio (2 \# s)} = \frac{a_4 + a_5}{2}$$

$$\text{— } 20 = \frac{a_4 + a_5}{2} \quad + \quad \boxed{40 = a_4 + a_5} \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I): $125 = a_1 + a_2 + a_3 + \underbrace{a_4 + a_5}_{40}$

$$125 = a_1 + a_2 + a_3 + 40$$

$$\underline{a_1 + a_2 + a_3 = 85} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 4 El promedio de 7 números es 20. Si se agrega un nuevo número el promedio no varía (O sea sigue siendo 20). ¿Cuál es ese nuevo número?

Resolución

Sean los 7 números: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$

$$\text{Promedio (7 \# s)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{7}$$

$$20 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{7}$$

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 140} \quad \dots (I)$$



Sea x = nuevo número que debe agregarse

$$\text{Luego Promedio (8 \# s)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + x}{8}$$

$$20 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + x}{8}$$

Reemplazamos (I) en (II)

$$20 = \frac{140 + x}{8} \rightarrow 160 = 140 + x \quad \underline{x = 20} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 5 El producto entre el promedio aritmético y el promedio armónico de dos números es 4. Calcular el promedio geométrico de dichos números

Resolución

Sean los 2 números a y b

Del enunciado: $P.A \times P.H = 4$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left[\frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)}\right] = 4$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left[\frac{2}{\left(\frac{a+b}{ab}\right)}\right] = 4 \rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\frac{2ab}{a+b}\right] = 4 \quad \boxed{ab = 4} \quad (I)$$

Luego $\boxed{P.G = \sqrt{ab}} \quad (II)$

Reemplazamos (I) en (II) $\boxed{P.G = \sqrt{4} = 2} \quad \text{Rpta.}$

Problema 6 El promedio armónico de 2 números es 0.4 y el promedio aritmético de los mismos es 10. Calcular el producto de dichos números

Resolución

Sean los 2 números pedidos: a y b

Del enunciado $P.H (2 \# s) = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)} = \frac{2ab}{a+b}$

$$0.4 = \frac{2ab}{a+b} + \frac{4}{10} = \frac{2ab}{a+b} + \frac{2}{5} = \frac{2ab}{a+b} \quad (I)$$

Además
$$P.A.(2 \text{ N.ºs}) = \frac{a+b}{2} + 10 = \frac{a+b}{2} \rightarrow \boxed{a+b=20} \quad (11)$$

Reemplazamos (11) en (1)
$$\frac{2}{5} = \frac{2(ab)}{20} \rightarrow \frac{40}{10} = ab \quad \therefore \quad \boxed{ab=4} \quad \text{Rpta}$$



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE PROMEDIOS

Problema A Hallar el promedio aritmético de los siguientes números.

10, 10, 10, 10, 20, 20, 20, 20, 20, 5, 5, 5, 5, 5

8 veces 7 veces 10 veces

A) 10.4 B) 11.8 C) 18.6 D) 10.8 E) N.A

Problema B El promedio de 8 números es 5 y 3 de dichos números son 4, 5 y 6. Calcular el promedio de los 5 números restantes

A) 5.8 B) 6.6 C) 7.2 D) 7.6 E) 8.4

Problema C El promedio aritmético de 10 números es 15, si el promedio aritmético de 4 de ellos es 12. ¿Cuál es la suma de los 6 números restantes?

A) 108 B) 106 C) 102 D) 94 E) 86

Problema D Hallar el promedio de los siguientes números

$a, a, a, a, a, 2a, 2a, 2a, 2a, 3a, 3a, 3a, \dots, 3a$

"2n" veces "3n" veces "n" veces

A) $\frac{6}{5}a$ B) $\frac{5a}{6}$ C) $\frac{4}{3}a$ D) $\frac{4}{5}a$ E) N.A

Problema E El promedio de 15 números es

B Si se agrega un nuevo número el promedio no varía (o sea sigue siendo B). ¿Cuál es ese nuevo número?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 5 E) 4

Problema F El promedio aritmético de 8 números consecutivos es 13.5. Hallar dos números consecutivos que se debe quitar para que el promedio aritmético de los números restantes sea 13.5.

A) 12 y 13 B) 13 y 14 C) 15 y 16
D) 16 y 17 E) 18 y 9

Problema G El promedio geométrico de 2 números es 4 y el promedio armónico de los mismos es 3. Hallar el promedio aritmético de dichos números

A) 19/3 B) 15/4 C) 16/3 D) 8/3 E) N.A

Problema H El promedio aritmético de 2 números es m y el promedio geométrico de los mismos es n. Hallar el promedio armónico de dichos números

A) n^2/m^2 B) nm C) nm^2 D) n^2/m E) m^2n

Problema I Hallar un número entero sabiendo que el promedio armónico de su mitad y su quinta parte es 16. Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número

A) 12 B) 11 C) 13 D) 15 E) N.A

Problema Sean a y b dos números enteros, si el producto del promedio aritmético con su promedio armónico es igual doble de su promedio geométrico, entonces el menor valor de " $a + b$ " es

A) 6 B) 5 C) 4 D) 8 E) 9

Clave de Respuestas

1 D	2 B	3 C	4 B	5 B
6 B	7 C	8 D	9 B	10 B

16.7 REGLA DE MEZCLA

Se llama mezcla o aligación a la unión de varias sustancias conservando cada una de ellas su propia naturaleza

En el comercio se acostumbra mezclar diversas clases de una mercadería con el objeto de poder venderlas a un precio promedio. Se llama precio de una mercadería al costo de la unidad y valor al costo total de la mercadería

Si 10 kilos de arroz cuesta 32 soles, el precio de esta mercancía es 3,20 soles y su valor es 32 soles

EN GENERAL

Si llamamos (V) al valor de una mercadería, (p) a su precio y (q) al número de unidades que tiene

$$V = qp$$

16.7.1 REGLA DE MEZCLA DIRECTA

Tiene por objeto determinar el precio promedio de una mezcla. Bastará para esto dividir el valor total de la mezcla entre el número total de unidades de la mezcla

Ejemplo: Se ha mezclado 200 litros de aguardiente de precio S/ 5 con 300 litros de precio S. 7 y con 500 litros de precio S/ 9. ¿Cuál es el promedio de la mezcla?

Resolución:

	Nº litros	Costo	
{ (+)	200 litros	$200 \times S/ 5 = S/ 1\,000$	{ (+)
	300 litros	$300 \times S/ 7 = S/ 2\,100$	
	500 litros	$500 \times S/ 9 = S/ 4\,500$	
	<u>1 000 litros</u>	<u>S/ 7 600</u>	

Luego Precio promedio = $\frac{S/ 7\,600}{1\,000} = S/ 7,60$

Demostración. El precio obtenido S/ 7.60 se llama precio promedio de la mezcla porque es una cantidad promedio entre precios dados S/ 5 S/ 7 S/ 9

En efecto

$$P = \frac{V}{H}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } S/5 &= \frac{S/1\,000}{200} \quad \text{primer precio} & S/7 &= \frac{S/2\,100}{300} = \text{segundo precio} \\ & & S/9 &= \frac{S/4\,500}{500} = \text{tercer precio} \end{aligned}$$

Ya hemos visto que la suma de los numeradores dividida entre la suma de los denominadores, constituye una cantidad promedio.

$$\frac{1\,000 + 2\,100 + 4\,500}{200 + 300 + 500} = \frac{7\,600}{1\,000} = 7,60 \text{ (precio promedio)}$$

Notese que $S/7,60$ es un precio promedio que es muy diferente al promedio aritmético de los tres precios dados cuyo valor es

$$\frac{S/5 + S/7 + S/9}{3} = \frac{S/21}{3} = S/7$$

Problema 1 Se mezclan 100 litros de aceite de 12 soles con 400 litros de aceite de 15 soles el litro. ¿Cuál es el precio promedio de la mezcla?

Resolución

Disponemos los datos de la siguiente manera

Nº de litros	Costo
100	$100 \times S/12 = S/1\,200$
400	$400 \times S/15 = S/6\,000$
500	$S/7\,200$
1	x

Por regla de tres $x = \frac{S/7\,200}{500} = S/14,40$

El precio promedio de un litro de la mezcla es de 14,40 soles.

Problema 2 ¿A qué precio se debe vender el kg de una mezcla para ganar el 20% del costo sabiendo que en ella se han empleado 50 kg de un producto P de S. 32 el kg, 30 kg de un producto Q de S/ 45 el kg, y 20 kg de un producto R de S. 26 el kg.

Resolución.

Primero hallamos el precio promedio de la mezcla.

Nº de kg	Costo
50	$50 \times S/\ 32 = S/\ 1\ 600$
30	$30 \times S/\ 45 = S/\ 1\ 350$
20	$20 \times S/\ 25 = S/\ 520$
<u>100</u>	<u>S/\ 3\ 470</u>
1	x
Por regla de tres $x = \frac{S/\ 3\ 470}{100} = S/\ 34,70$	

El precio promedio es de 34,70 soles. El 20% de 34,70 soles es

$$\frac{20}{100} \times S/\ 34,70 = S/\ 6,94$$

El kg de la mezcla se debe vender en $S/\ 34,70 + S/\ 6,94 = S/\ 41,64$ para ganar el 20% del costo.

16.7.2 REGLA DE MEZCLA INVERSA

Tiene por objeto determinar el número que se debe tomar de diversas clases de una mercadería para obtener una mezcla de precio promedio dado.

CASOS DE UNA MEZCLA DE DOS CLASES.

PROBLEMA GENERAL

Se tiene una clase de precio superior (s) y otra clase de precio inferior (i). ¿Cuántas unidades hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de precio promedio (m)?

Resolución

Designamos con la letra (x) el número que hay que tomar de la clase (s) y con la letra (y) el número de unidades de la clase (i).

Como la mezcla tendrá (x + y) unidades y su precio es (m) su valor será (x + y)m.

Es evidente que este valor de la mezcla debe ser igual a la suma de los valores parciales de las dos clases, que son (s x) e (i y) podemos pues escribir

$$s x + i y = (x + y)m$$

$$s x + i y = x m + y m$$

$$s x - x m = y m - i y$$

$$x(s - m) = y(m - i) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{y} = \frac{m - i}{s - m}$$

(Fórmula)

Esta es una fórmula general por aplicar como se observa a fórmula da simplemente a relación de las incógnitas (x e y). Para determinar los valores de (x) e (y) será necesario saber el número total de unidades ($x + y$) que ha de tener la mezcla o alguna otra relación entre dichas incógnitas.

APLICACIÓN

Un comerciante tiene dos clases de arroz. El precio de la primera clase es S/ 3,40 y el precio de la segunda clase es S. 2,80 ¿Cuántos kilos debe tomar de cada clase para obtener una mezcla de 1 200 kilos de precio promedio S/ 3,00

Resolución

Aplicando la fórmula tenemos $\frac{x}{y} = \frac{m - 1}{n - m} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3,00 - 2,80}{3,40 - 3,00} = \frac{0,20}{0,40} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Luego

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Esto nos indica que la mezcla debe ser hecha en la proporción de 1 parte de la primera clase y 2 partes de la segunda clase. Como la mezcla debe tener 1 200 kilos, bastará repartir 1 200 kilos en dos partes directamente proporcionales a los números 1 y 2 tenemos así

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2}$$

Por propiedad

$$\frac{x+y}{1+2} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2} \text{ pero}$$

$$x + y = 1\,200 \text{ kilos}$$

$$\frac{1\,200}{3} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2}$$

Donde

$$\frac{x}{1} = \frac{1\,200}{3} = 400 \text{ kilos}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{1\,200}{3} \rightarrow y = 800 \text{ kilos}$$

De cada clase deben tomarse 400 y 800 kilos

COMPROBACIÓN

Si mezclamos 400 kilos de precio S/ 3,40 con 800 kilos de precio S/ 2,80 tenemos como precio promedio S/ 3,00

$$\begin{array}{rcl} (*) & \left\{ \begin{array}{l} 400 \text{ kilos} \times \text{S/ } 3,40 = \text{S/ } 1\,360 \\ 800 \text{ kilos} \times \text{S/ } 2,80 = \text{S/ } 2\,240 \end{array} \right. & (+) \\ \hline & 1\,200 \text{ kilos} & \text{S/ } 3\,600 \end{array}$$

$$\text{Precio promedio} = \frac{\text{S/. } 3.600}{1.200} = \text{S/. } 3,00$$

Otro Método:

$$\text{Aplicando la fórmula} \quad \text{Precio promedio} = \frac{C_1 \times P_1 + C_2 \times P_2}{C_1 + C_2} \quad (\text{Fórmula})$$

Donde C_1, C_2 = Cantidad de arroz de cada clase

P_1, P_2 = Precios de cada clase de arroz

$$\text{Reemplazamos valores, obtenemos} \quad \text{S/. } 3,00 = \frac{x(\text{S/. } 3,40) + y(\text{S/. } 2,80)}{x + y}$$

$$3(x + y) = 3,4x + 2,8y$$

$$0,2y = 0,4x \rightarrow \boxed{y = 2x} \quad (I)$$

$$\text{Por dato: } x + y = 1.200 \quad \dots (II)$$

$$\text{Reemplazamos (I) en (II): } x + 2x = 1.200 \rightarrow \boxed{x = 400 \text{ kilos}}$$

$$\text{De (I): } y = 2(400 \text{ kilos}) \rightarrow \boxed{y = 800 \text{ kilos}}$$

Problema 1 | ¿Cuántos kg de hanna de S/ 10 el kg y cuántos kg de S/ 20 el kg serán necesarios para obtener una mezcla cuyo precio promedio sea de S/ 18?

Resolución:

Sea $x = \#$ de kg que hay que tomar del de mayor precio (S/ 20)

$y = \#$ de kg que hay que tomar del de menor precio (S/ 10)

Por fórmula

$$\frac{x}{y} = \frac{m - i}{s - m}$$

Donde: m = Precio promedio (S/ 18)

s = Precio superior (S/ 20)

i = Precio inferior (S/ 10)

$$\text{Luego} \quad \frac{x}{y} = \frac{18 - 10}{20 - 18} \rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{8}{2}}$$

Esta última relación significa que por 2 kg de S/ 10 se toman 8 kg de S/ 20

Observación No voy a pensar que es la única solución para que sepas existen otras soluciones como el que te mostrare

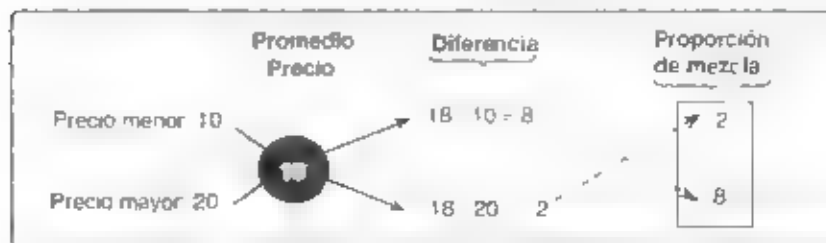
De la relación $\frac{x}{y} = \frac{8}{2}$ sacamos mitad a cada término obteniendo $\Rightarrow \left[\frac{x}{y} = \frac{4}{1} \right]$

Esta última relación significa que por 1 kg de S/ 10 se toman 4 kg de S/ 20

De la relación $\frac{x}{y} = \frac{8}{2}$ multiplicamos por 2 ó por 3, etc a cada término, obteniendo $\Rightarrow \left[\frac{x}{y} = \frac{16}{4} \right]$

Esta última relación significa que por 4 kg de S/ 10 se toman 16 kg de S/ 20

Otro Método: Distribuimos datos de la siguiente manera



La proporción de mezcla significa que Por 2 kg de S/ 10, se toman 8 kg de S/ 20

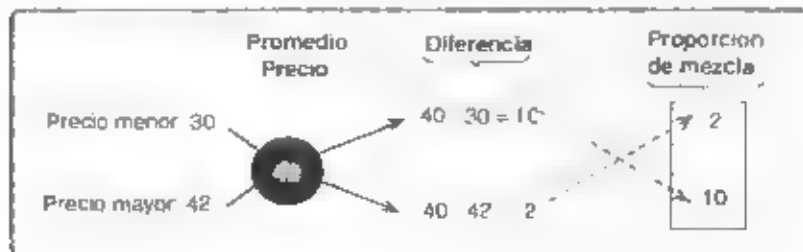
Nota: También se puede aplicar la fórmula del problema anterior

Problema 2 ¿ Cuántos kg de semilla de S/ 30 e kg deben mezclarse con otra semilla de S/ 42 y de S/ 45 el kg para obtener semillas de S/ 40 el kilogramo?

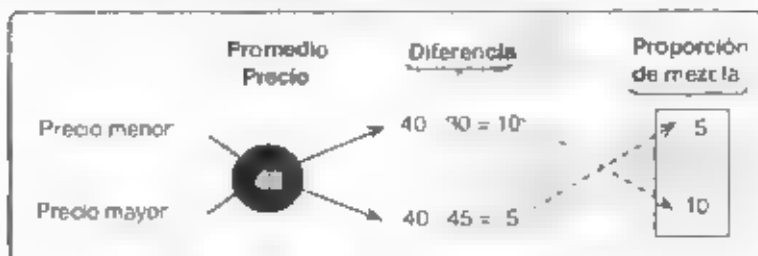
Resolución

Distribuimos los datos de la siguiente manera

a) Comparando los precios S/ 42 y S/ 30 con el promedio S/ 40



- b) Comparando los precios S/ 45 y S/ 30 con el precio promedio S/ 40



De las proporciones, obtenemos que

2 kg de 30 soles

5 kg de 30 soles

7 kg de 30 soles

Además

10 kg de 42 soles

10 kg de 45 soles

Para obtener semillas de 40 soles el kg debemos mezclar 7 kg de 30 soles con 10 kg de 42 soles y con 10 kg de 45 soles el kilogramo

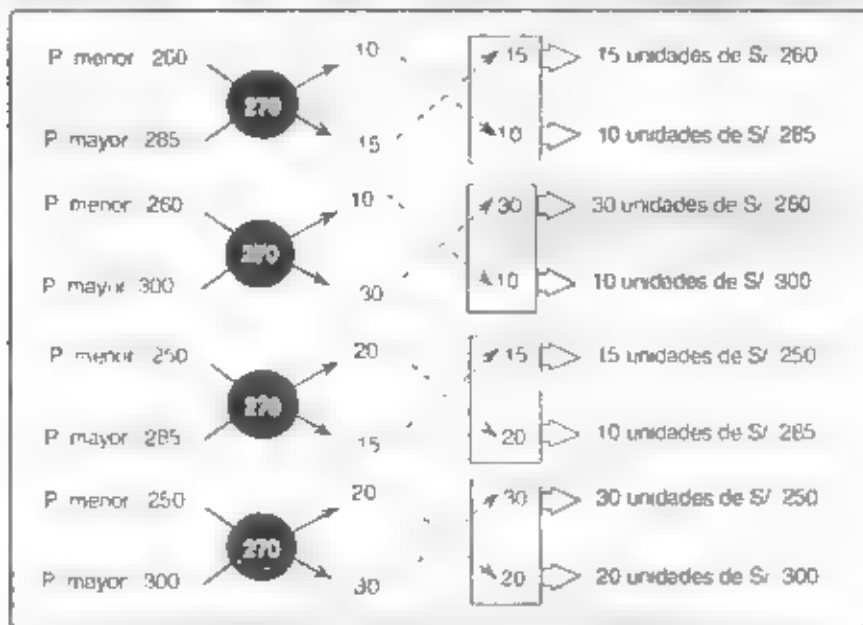
Comprobación

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 7 \times \text{S/ } 30 = \text{S/ } 210 \\
 10 \times \text{S/ } 42 = \text{S/ } 420 \\
 10 \times \text{S/ } 45 = \text{S/ } 450
 \end{array} \right\} + \text{Precio promedio} = \frac{\text{S/ } 1\,080}{27} = \text{S/ } 40 \\
 \hline
 27 \text{ kg} \quad \text{S/ } 1\,080
 \end{array}$$

Problema 3 Si tiene cuatro clases de una mercadería cuyos precios son S/ 260, S/ 285, S/ 300 y S/ 250 ¿Cuántas unidades hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de 3 000 unidades de precio promedio S/ 270

Resolución:

- a) Hallamos las proporciones de mezcla de las mercaderías



Sumamos los litros de las proporciones (1) (2) (3) y (4) obteniendo

$$(15 + 30) = 45 \text{ unidades de S/ } 260$$

$$(10 + 20) = 30 \text{ unidades de S/ } 285$$

$$(15 + 30) = 45 \text{ unidades de S/ } 250$$

$$(10 + 20) = 30 \text{ unidades de S/ } 300$$

Total: 150 unidades

b) Como necesitamos 3.000 unidades de mezcla repartimos proporcionalmente las 3.000 unidades entre números 45, 30, 45, 30: luego

$$\frac{x}{45} = \frac{y}{30} = \frac{n}{45} = \frac{m}{30}$$

Por propiedad

$$\frac{x+y+n+m}{45+30+45+30} = \frac{x}{45} = \frac{y}{30} = \frac{n}{45} = \frac{m}{30}$$

Pero

$$x + y + n + m = 3.000$$

$$\frac{3.000}{150} = \frac{x}{45} = \frac{y}{30} = \frac{n}{45} = \frac{m}{30}$$

$$20 = \frac{x}{45} = \frac{y}{30} = \frac{n}{45} = \frac{m}{30}$$

Donde

$$x = 400 \text{ y } 600 \text{ o } 500 \text{ o } = 600$$

Para obtener 3 000 unidades de mezcla de 270 soles, necesitamos mezclar 900 unidades de 260 soles, 600 unidades de 285 soles, 900 unidades de 250 soles y 600 unidades de 300 soles.

Nota: Los problemas de este tipo no tienen una sola solución.

Problema 4 ¿Cuántos galones de aceite de S/ 80 el galón se debe añadir a la mezcla en la que se han utilizado 14 galones de S/ 60 y 28 galones de S/ 70 para que el precio promedio de un galón sea de S/ 70?

Resolución

Por fórmula

$$\text{Precio promedio} = \frac{C_1 \times P_1 + C_2 \times P_2 + C_3 \times P_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Donde

C_1, C_2, C_3 = Cantidad de galones

P_1, P_2, P_3 = Precios por galón

Reemplazando valores, obtenemos

$$S/ 70 = \frac{x(S/ 80) + 14(S/ 60) + 28(S/ 70)}{x + 14 + 28}$$

$$70 = \frac{80x + 840 + 1960}{(42 + x)}$$

$$7(42 + x) = 8x + 280 \rightarrow 294 + 7x = 8x + 280$$

$$x = 14$$

Se necesitan 14 galones de aceite de S/ 80



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REGLA DE MEZCLA

Problema ¿Cuál es el precio promedio de un kilogramo de una mezcla en la que se ha utilizado 8 kg de arroz de S/ 0,50 el kg y 12 kg de arroz de S/ 0,80 el kg?

Problema ¿A qué precio se debe vender el litro de una mezcla para ganar el 30% de costo, sabiendo que en ella se ha empleado 13 litros de un líquido "P" de S/ 32 el litro, 21 litros de un líquido "Q" a S/ 28 el litro, y 25 litros de un líquido "R" a S/ 18 el litro?

Problema ¿Cuántos kg de una sustancia "M" de S/ 38 el kg y cuántos kg de una sustancia "N" de S/ 42 el kg serán necesarios para obtener una mezcla cuyo precio promedio, por kg sea de 39?

Problema ¿Cuántos litros de aceite de 8 soles se debe añadir a una mezcla, en la que se ha utilizado 14 litros de 6 soles y 28 litros de 7 soles, para que el precio promedio, de un litro sea de 7 soles?

Problema Un comerciante tiene detergente de S/ 6 el kg y de S/ 9 el kg. ¿Cuántos kilogramos de cada clase debe mezclar para obtener 630 kilogramos que resulten a S/ 7 el kg?

Problema Se mezclan 5 kg de té de S/

12 el kg con 8 kg de té de S/ 14 el kg. ¿Cuánto vale el kg de mezcla?

Problema Un comerciante de vino mezcla 12 litros de vino de S/ 5 el litro con 10 litros de S/ 8 el litro y con 4 litros de S/ 10 el litro. ¿A cuánto resultan los 5 litros de esa mezcla?

Problema Un comerciante prepara una mezcla en la que utiliza materias de una misma especie pero de calidades diferentes, cuyos precios por kilogramos son S/ 30, S/ 32, S/ 37 y S/ 40, respectivamente. ¿Qué cantidad de cada clase debe utilizar para obtener 580 kg de una mezcla cuyo precio promedio sea de S/ 34 el kilogramo?

Clave de Respuestas

- | | |
|---|--------------|
| 1. S/ 0,72 | 2. S/ 32,03 |
| 3. 3 kg de S/ 38
1 kg de S/ 42 | 4. 14 litros |
| 5. 210 kg de S/ 6
420 kg de S/ 9 | 6. S/ 13,23 |
| 7. S/ 34,61 | |
| 8. 18 kg de S/ 30, 16 kg de S/ 32
12 kg de S/ 37, 12 kg de S/ 40 | |

16.8 INTERÉS COMPUESTO

DEFINICIÓN Es el interés ganado por el capital original (o) que no se hace efectivo al propietario, si no que es agregado a su capital, formando un nuevo capital, es decir los intereses se capitalizan o convierten en capital, y consecuentemente ganará intereses en adelante.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE.

AÑOS	MONTO EN EFECTIVO DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE		
Año 1	Capital original	+ (Interés del Capital inicial)	$= (C + Ci) = C(1 + i)$
Año 2	(Capital al final del año 1)	+ (Interés del capital al final del año 1,	$= C(1 + i) + C(1 + i) = C(1 + i)^2$
Año 3	(Capital al final del año 2)	+ (Interés del capital al final del año 2)	$= C(1 + i)^2 + C(1 + i) = C(1 + i)^3$
Año n	(Capital al final de año n-1)	+ (Interés del capital al final del año (n-1))	$= C(1 + i)^{n-1} + C(1 + i) = C(1 + i)^n$
<p>En general los elementos que intervienen en el cálculo del capital final (C) o monto de efectivo:</p> $C = C(1 + i)^n \quad \text{(Fórmula 1)}$			

Donde C = capital final, c = capital inicial o principal
 i = tasa de interés por periodo (año, semestre, trimestre o mes)
 n = tiempo (años, semestres, trimestres o meses)

La fórmula (1) es la fundamental del interés compuesto y permite resolver los siguientes problemas

15.6.1 PROBLEMAS SOBRE INTERÉS COMPUESTO

1º **Cálculo del Capital Final** Se obtiene con la fórmula (1) que cuando "n" es un poco grande se puede calcular por logaritmos

Existen unas tablas (Tablas Financieras) en las que viene calculado $1 + i)^n$ para distintos valores de i y de "n" con diez cifras decimales, con el uso de estas tablas el cálculo del capital final se reduce a la multiplicación del capital inicial por el término $(1 + i)^n$ correspondiente al problema que lo dá la tabla

Problema 1: Un industrial tomó un préstamo la suma de 100 000 dólares para adquirir una máquina y concreto que al final de 3 años pagará el capital inicial más los intereses capitalizados a fin del tercer año a la tasa de 45% anual. Calcular el monto a pagar

Resolución

[Datos]	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Préstamo } c = \$ 100\,000 \text{ tasa interés anual } i = 45\% = 0.45 \\ \text{Tiempo } n = 3 \text{ años} \end{array} \right.$
-----------	--

Reemplazando valores en la fórmula $C = c(1 + i)^n$ se tiene

$$C = \$ 100\,000 (1 + 0,45)^3$$

$$C = \$ 100\,000 (1,45)^3 = \$ 100\,000 (3,048\,625)$$

$$C = \$ 304\,862,50$$

Respuesta El monto a pagar es de 304 862 50 dólares

Problema 2 Encontrar cuál será el monto a pagar en el anterior si los intereses se capitalizan trimestralmente

Resolución

Datos

Préstamo: $c = \$ 100\,000$

Tasa de interés anual = 0,45 \Rightarrow tasa de interés trimestralmente $0,45 : 4 = 0,1125$

Tiempo 3 años, pero el año tiene 4 trimestres, entonces $n = 3 \times 4 = 12$

Reemplazando valores en la fórmula, $C = c (1 + i)^n$ se tiene

$$C = \$ 100\,000 (1 + 0,1125)^{12}$$

$$C = \$ 100\,000 (1,1125)^{12} \text{ tomamos "log" a ambos miembros}$$

$$\log C = \log [\$ 100\,000 (1,1125)^{12}]$$

$$\log C = \log 100\,000 + \log (1,1125)^{12}$$

$$\log C = 5 + 12 \log (1,1125)$$

$$\log C = 5 + 12 (0,046\,3) = 5 + 0,555\,6 = 5,555\,6$$

$$\log C = 5,555\,6 \Rightarrow C = \text{antilog}_{10} 5,555\,6 = 10^{5,555\,6}$$

$$C = \$ 359\,418,15$$

Recorda que:

$$\log A \times B = \log A + \log B$$

$$\log B^n = n \log B$$

Observación Comparando este problema con el anterior vemos la diferencia en el resultado proviene únicamente del hecho que en el problema (2) los intereses se capitalizan trimestralmente y en el problema (1) anualmente

2º Cálculo del Capital Inicial

De la fórmula (1) $C = c (1 + i)^n$ despejamos "c" obteniendo

$$c = \frac{C}{(1+i)^n} \quad \text{(Fórmula 2)}$$

Problema Un niño tiene 8 años. Su padre quiere colocar una cantidad "c" en un banco a nombre del niño para que cuando cumpla 20 años disponga de \$ 20 000. El interés que paga el banco es del 8% anual. ¿Que cantidad deberá colocar el padre?

Resolución

Datos

Capital final: $C = \$ 20\,000$
Tasa de interés anual: $i = 8\% = 0.08$
Tiempo: $n = 20 - 8 = 12$
Capital inicial: $c = ?$

Reemplazamos valores en la fórmula: $C = \frac{C}{(1+i)^n}$ Se tiene

$$c = \frac{20\,000}{(1+0.08)^{12}} = \frac{20\,000}{(1.08)^{12}} \Rightarrow c = \frac{20\,000}{2.518\,170} = 7\,942.257\,2$$

Respuesta. La cantidad de dinero que debe colocar el padre es de 7 942,257 2 dólares.

3° Cálculo del Tanto Por Ciento.

De la fórmula (1) $C = c(1+i)^n$ despejamos "i", obteniendo

$$i = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 1 \quad (\text{Fórmula 9})$$

Problema A qué tanto por ciento fue colocado un capital de \$ 1 000 que en 10 años se convirtió en \$ 2 500?

Resolución

Datos

Capital inicial: $c = \$ 1\,000$
Capital final: $C = \$ 2\,500$
Tiempo: $n = 10$ años
Interés: $i = ?$

Reemplazando valores en la fórmula: $i = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 1$ se tiene

$$\sqrt[10]{\frac{2\,500}{1\,000}} - 1 = \sqrt[10]{2.5} - 1 \Rightarrow i + 1 = \sqrt[10]{2.5}$$

$$i + 1 = \sqrt[10]{2.5} \quad , \text{ tomamos "log" a ambos miembros}$$

$$\log(i + 1) = \log \sqrt[10]{2.5}$$

$$\log(i + 1) = \frac{1}{10} \log 2.5$$

$$\log(i + 1) = \frac{1}{10} (0.397\,94) = 0.039\,794$$

Recuerda que:

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A$$

$$+ 1 = 10^{0.0959582} = 1.0959582$$

$$i = 1.0959582 - 1 = 0.0959582$$

$i = 0.1$ aproximadamente pero

$$n \cdot i = \frac{10}{100} = 10\%$$

$$i = 10\%$$

Respuesta *Es tanto por ciento al que fue colocado el capital de 1 000 dólares es del 10%*

4° Cálculo del Número de Años (n)

El cálculo de "n" exige emplear logaritmos, pues la ecuación (1) es una ecuación exponencial en "n"

De la fórmula (1) $C = c(1+i)^n$ tomamos "log" a ambos miembros

$$\log C = \log [c(1+i)^n]$$

$$\log C = \log c + \log (1+i)^n$$

$$\log C = \log c + n \log (1+i) \quad \text{despejando "n" se tiene:}$$

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log (1+i)} \quad \text{(Fórmula 4)}$$

Problema ¿Cuánto tiempo se necesitará para que un capital c quede duplicado al 8%?

Resolución

Datos	Capital inicial = c
	Capital final $C = 2c$
	Interés = 8% = 0.08
	Tiempo $n = ?$

Reemplazando valores en la fórmula $n = \frac{\log C - \log c}{\log (1+i)}$ se tiene

$$n = \frac{\log 2c - \log c}{\log (1+0.08)}$$

$$n = \frac{(\log 2 + \log c) - \log c}{\log (1.08)} = \frac{\log 2}{\log 1.08} = \frac{0.30103}{0.0334237}$$

$$n = 9 \text{ años}$$

Respuesta *El tiempo que se necesita para que su capital c quede duplicado al 8% es de 9 años*



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE INTERÉS COMPUESTO

Problema 1 Hallar el capital final correspondiente a \$ 2 000 colocados al 10% durante 15 años.

Problema 2 Una persona dejó una herencia de \$ 3 000 colocados en un banco a 9% con la condición de que el beneficiario no los retire hasta cumplir 30 años. ¿Qué capital se obtendrá después de los 30 años?

Problema 3 Hallar el capital inicial que colocado al 6% durante 20 años se convierte en \$ 12 500.

Problema 4 ¿A qué tanto por ciento se colocó un capital de \$ 3 500 que en 12 años se convirtió en \$ 8 200?

Problema 5 Un capital de \$ 30 000 se convirtió en 5 años en \$ 42 000. ¿Cuál fue el tanto por ciento de interés?

Problema 6 ¿En cuántos años se convierten \$ 300 al 10% después de 10 años?

Problema 7 Suponiendo que el aumento de población en una ciudad es del 10% anual. ¿En cuántos años se duplicará la población?

Problema 8 Hallar el capital necesario para que a la vuelta de 10 años colocado al 10% se nos convierta en \$ 40 000.

Problema 9 Si se colocó mis ahorros de \$ 4 000 al 12% de interés compuesto durante 25 años, ¿Qué capital recogeré al final?

Problema 10 ¿En cuántos años \$ 12 000 colocados al 8% de interés compuesto se transforman en \$ 25 000?

Clave de Respuestas

- | | |
|-------------------|------------------|
| 1. \$ 4 354 491.4 | 2. \$ 39 803.037 |
| 3. \$ 3 697,559 | 4. 7% |
| 5. 6% | 6. \$ 778,122.75 |
| 7. 7 años | 8. \$ 15 421.731 |
| 9. \$ 48 231.46 | 10. 9 años |

16.9 ANUALIDADES

DEFINICIÓN Se llama anualidad a la cantidad fija que se impone todos los años para formar un capital (anualidad de capitalización) o para amortizar una deuda (anualidad de amortización).

16.9.1 ANUALIDAD DE CAPITALIZACIÓN

(I) Si los pagos se hacen al final de cada periodo se genera lo siguiente:

Supongamos periodos de 1 año durante n años.

La última anualidad no ganará intereses	\rightarrow	a
La penúltima ganará intereses de 1 año	\rightarrow	$a(1 + i)$
La antepenúltima ganará intereses de 2 años	\rightarrow	$a(1 + i)^2$

La tercera ganaría intereses de $(n - 3)$ años	\rightarrow	$a(1 + i)^3$
La segunda ganaría intereses de $(n - 2)$ años	\rightarrow	$a(1 + i)^2$
La primera ganaría intereses de $(n - 1)$ años	\rightarrow	$a(1 + i)^1$

Sumando todas las anualidades con sus intereses, es decir todos los valores finales obtenidos para las anualidades, la suma debe ser igual al capital C que se desea formar o sea:

$$C = a + a(1 + i) + a(1 + i)^2 + \dots + a(1 + i)^{n-3} + a(1 + i)^{n-2} + a(1 + i)^{n-1}$$

Esta última suma es una progresión geométrica de razón $(1 + i)$ y primer término " a " aplicando la fórmula de una progresión geométrica

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Donde: $\begin{cases} a_n = \text{último término} \\ r = \text{razón} \\ a_1 = \text{primer término} \end{cases}$

Reemplazando valores en esta fórmula, se tiene:

$$S_n : C = \frac{a(1+i)^{n-1}(1+i) - a}{(1+i) - 1} = \frac{a(1+i)^{n+1} - a}{1}$$

$$C = \frac{a[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$C = a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad \text{(Fórmula)}$$

De donde $\begin{cases} a = \text{sería la anualidad a pagar} \\ c = \text{el monto a capitalizar} \\ i = \text{interés} \\ n = \text{número de años} \end{cases}$

ii) Si los pagos se hacen al comienzo de cada periodo, entonces:

La última anualidad ganaría intereses de 1 año	\rightarrow	$a(1 + i)$
La penúltima anualidad ganaría intereses de 2 años	\rightarrow	$a(1 + i)^2$
La antepenúltima anualidad ganaría intereses de 3 años	\rightarrow	$a(1 + i)^3$

La tercera anualidad ganaría intereses de $(n - 2)$ años	\rightarrow	$a(1 + i)^{n-2}$
La segunda anualidad ganaría intereses de $(n - 1)$ años	\rightarrow	$a(1 + i)^{n-1}$
La primera anualidad ganaría intereses de n años	\rightarrow	$a(1 + i)^n$

Sumando todas las anualidades con sus intereses, es decir todos los valores finales obtenidos para las anualidades, la suma debe ser igual al capital C que se desea formar, o sea:

$$C = a(1 + i) + a(1 + i)^2 + a(1 + i)^3 + \dots + a(1 + i)^{n-2} + a(1 + i)^{n-1} + a(1 + i)^n$$

Esta última suma es una progresión geométrica de razón $(1 + i)$ y primer término " $a(1 + i)$ " aplicando la fórmula de una progresión geométrica.

$$S_n = \frac{a_n - r \cdot a}{r - 1}$$

Donde a_n = último término
 r = razón
 a_1 = primer término

Reemplazando valores en esta fórmula, se tiene

$$S_n = C = \frac{a(1+i)^n - a(1+i)}{(1+i) - 1} = \frac{a(1+i)^n - a(1+i)}{i} = a(1+i)$$

$$C = a(1+i) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (\text{Fórmula})$$

Problema 1 Manuel decide el 1° de enero de 1981 que para fines de 1983 debe reunir el capital de \$ 150 000. ¿Qué anualidad debe imponer a partir de ese año al final de cada año al 10% de interés

Resolución

Como los pagos se hacen al final de cada período, se aplicará la siguiente fórmula

$$C = a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

En donde: $\begin{cases} C = \$ 150\,000, i = 10\% \text{ anual} = 0,10 \\ n = (1983 - 1981) + 1 = 3 \text{ años} \end{cases}$

Reemplazando valores en la fórmula, se tiene

$$150\,000 = a \left[\frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} \right] = a \left[\frac{(1,1)^3 - 1}{0,1} \right]$$

$$150\,000 = a \left[\frac{0,331}{0,1} \right] = a [3,31]$$

$$\frac{150\,000}{3,31} = a \Rightarrow a = \$ 45\,317,22$$

Respuesta La anualidad que debe imponerse a partir del 1° de enero de 1981 al final de 1983 al 10% de interés anual es de \$ 45 317,22

Problema 2 Cuál debería ser el valor de la anualidad del problema (1), si los pagos se hubiesen efectuado a comienzos de cada año comenzando por el 1° de enero de 1981

Resolución

Como los pagos se hacen al comienzo de cada período se aplicará la fórmula

$$C = a(1+i) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad \text{Donde} \quad \begin{cases} C = \$ 150\,000, i = 10\% \text{ anual} = 0.1 \\ n = 3 \text{ años}, a = ? \end{cases}$$

Reemplazando valores en la fórmula, se tiene

$$150\,000 = a(1+0.1) \left[\frac{(1+0.1)^3 - 1}{0.1} \right]$$

$$150\,000 = a(1.1) \left[\frac{0.331}{0.1} \right] = a(3.641)$$

$$\frac{150\,000}{3.641} = a \quad \Rightarrow \quad a = \$ 41\,197.473$$

Respuesta Si los pagos se hubiesen efectuado a comienzos de cada año la anualidad sería de \$41 197.473

16.9.2 ANUALIDAD DE AMORTIZACIÓN

A. Si los pagos se hacen al final de cada periodo se tendrá (supongamos tiempo = “n” años)

La última anualidad no pagaría intereses $\rightarrow a$

La penúltima, pagaría un año de intereses $\rightarrow a(1+i)$

La antepenúltima pagaría dos años de intereses. $\rightarrow a(1+i)^2$

⋮

La tercera pagaría (n - 3) años de intereses $\rightarrow a(1+i)^{n-3}$

La segunda pagaría (n - 2) años de intereses $\rightarrow a(1+i)^{n-2}$

La primera pagaría (n - 1) años de intereses $\rightarrow a(1+i)^{n-1}$

Luego, al final del año “n” El valor de la deuda incluyendo los intereses.

$D(1+i)^n$ debe ser igual a la suma de las anualidades o sea

$$D(1+i)^n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + \dots + a(1+i)^{n-1}$$

$$D(1+i)^n = a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \right] = a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$D = a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] = a \left[\frac{\cancel{(1+i)^n} - 1}{\cancel{(1+i)^n} i} \right]$$

$$D = a \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

En donde "D" es la deuda a amortizar y "a" la anualidad a pagar

- B. Si los pagos se hacen al comienzo de cada periodo, se puede hacer un análisis similar y se llegará a

$$D = a(1+i) \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \quad (\text{Fórmula})$$

Problema 1 Nataly pidió prestado \$ 2 000 000. Al 10% anual amortizable en 5 años. Calcular la cantidad fija que debe poner a final de cada año para cancelar el préstamo más sus intereses.

Resolución

Como los pagos se hacen al final del periodo, se tiene

$$D = a \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \quad \text{Donde: } \begin{cases} D = \$ 2\,000\,000 \\ i = 10\% = 0.1 \\ n = 5 \text{ años} \end{cases}$$

Reemplazando valores, se tiene

$$\$ 2\,000\,000 = a \left[\frac{1 - (1 + 0.1)^{-5}}{0.1} \right] = a \left[\frac{1 - (1.1)^{-5}}{0.1} \right]$$

$$\$ 2\,000\,000 = a \left[\frac{1 - 0.620\,921\,3}{0.1} \right] = a [3.790\,787]$$

$$\frac{\$ 2\,000\,000}{3.790\,787} = a \Rightarrow a = \$ 527\,594.92$$

Problema 2 Calcular la cantidad fija que debe cancelar al comienzo de cada año para cancelar la deuda más los intereses del problema (1)

Resolución

Reemplazando valores en la fórmula:
$$D = a(1+i) \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Se obtiene:
$$\$ 2\,000\,000 = a(1 + 0.1) \left[\frac{1 - (1 + 0.1)^{-5}}{i} \right]$$

$$\$ 2\,000\,000 = a(1.1) [3.790\,787]$$

$$\frac{\$ 2\,000\,000}{4\,169\,865.7} = a \Rightarrow a = \$ 479\,511.75$$



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ANUALIDAD DE AMORTIZACIÓN

Problema 1 ¿Cuál será el capital que se formará con 12 anualidades de \$ 500 cada una al 10% de interés anual? (los pagos se hacen al final de cada año)

Problema 2 ¿Qué anualidad habrá que imponer al principio de cada año para que, cumplidos 30 años, se haya formado un capital de \$ 40 000 si el interés es de 8% anual?

Problema 3 Hallar el capital que se forma con 10 anualidades de \$ 800 cada una, al 12% anual (los pagos se hacen al final de cada año).

Problema 4 ¿Qué anualidad debe depositar un padre al principio de cada año, en un banco que paga el 10% de interés compuesto, para que a cabo de 20 años su hijo que acaba de nacer tenga formado un capital de \$ 50 000?

Problema 5 ¿Durante cuántos años debe imponerse una anualidad de \$ 50, para formar un capital de \$ 1 176, siendo el interés del 10% anual? (los pagos se hacen al final de cada año)

Problema 6 ¿Durante cuántos años debe imponerse una anualidad de \$ 60 para formar un capital de \$ 1 500, siendo el interés del 8% anual? (los pagos se hacen al final de cada año)

Problema 7 ¿Qué anualidad debemos pagar al final de cada año para que pagados 15 años vayamos amortizando una deuda de \$ 30 000, siendo el interés del 6% anual?

Problema 8 ¿Qué deuda se puede amortizar en diez años con una anualidad a = \$ 80, siendo el interés del 6% anual? (los pagos se hacen al comienzo de cada año)

Problema 9 ¿Qué anualidad habrá que pagar para extinguir en 8 años una deuda de \$ 25 000, al 6%? (los pagos se hacen al final de cada año)

Problema 10 ¿Qué deuda podremos amortizar abonando cada año una anualidad de \$ 500, durante 12 años si el interés es del 8%? (los pagos se hacen al comienzo de cada año)

Clave de Respuestas

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $C = \$ 10\,692,142$ | 2) $a = \$ 326,941$ |
| 3) $C = \$ 14\,038,988$ | 4) $a = \$ 793,6193$ |
| 5) $n = 13$ años | 6) $n = 14$ años |
| 7) $a = \$ 3\,088,8825$ | 8) $D = \$ 624,135$ |
| 9) $a = \$ 4\,025,897$ | 10) $D = \$ 4\,089,482$ |

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ											
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ				
6 00'	1047	1045	9.547	1051	9.514	1.006	1.045	1.4861	84 00'		
10	070	174	9.109	080	9.115	000	947	617	50		
20	105	103	9.745	110	9.610	006	939	603	40		
30	1134	1132	8.834	1139	8.777	1.006	9936	1.4571	30		
40	164	161	8.14	165	8.550	007	932	544	20		
50	193	190	8.405	98	8.345	007	929	515	10		
7 00'	1222	1219	8.106	1228	8.144	1.008	9924	1.4461	83 00'		
10	251	248	8.116	257	7.943	008	925	457	50		
20	260	271	7.834	287	7.770	008	918	428	40		
30	1109	1305	7.661	137	7.594	1.008	914	1.4395	30		
40	338	334	7.496	346	7.429	009	911	370	20		
50	347	363	7.137	36	7.069	009	907	341	10		
8 00'	1191	1192	7.85	1405	7.15	1.010	900.3	1.431	82 00'		
10	425	421	7.540	435	6.968	010	899	263	50		
20	441	449	6.700	465	6.827	011	894	254	40		
30	1484	148	6.765	1495	6.691	1.011	9890	1.4224	30		
40	515	507	6.136	524	6.561	012	887	195	20		
50	547	548	6.51	554	6.435	012	881	166	10		
9 00'	1521	1564	6.792	1584	6.314	1.012	9877	1.4137	81 00'		
10	500	593	277	614	157	013	87	108	50		
20	629	627	166	644	084	013	868	079	40		
30	1658	1650	6.054	1673	5.976	1.014	9803	1.4050	30		
40	687	679	5.955	703	871	014	858	1.4021	20		
50	716	708	855	733	769	015	853	992	10		
10 00'	1745	1736	5.750	1763	5.671	1.015	9848	1.3963	80 00'		
10	774	765	665	733	574	016	84	934	50		
20	804	794	575	823	485	016	838	904	40		
30	1833	1822	5.487	1853	5.396	1.017	9833	1.3875	30		
40	882	851	403	883	309	018	827	846	20		
50	895	880	320	914	226	018	822	817	10		
11 00'	1920	1906	5.241	944	5.145	1.019	9816	1.3788	79 00'		
10	949	937	164	974	406	019	811	759	50		
20	978	965	089	1004	4.989	020	805	730	40		
30	2007	1994	5.016	1035	4.915	1.020	9799	1.3701	30		
40	036	2022	4.945	065	843	021	793	672	20		
50	085	051	870	095	773	022	787	643	10		
12 00'	2094	2079	4.810	2120	4.705	1.022	9781	1.3614	78 00'		
10	123	108	745	156	638	023	775	584	50		
20	153	138	682	186	574	024	769	555	40		
30	2182	2164	4.620	2217	4.511	1.024	9763	1.3526	30		
40	211	193	560	247	449	025	757	497	20		
50	240	221	502	278	390	026	750	468	10		
13 00'	2263	2250	4.445	2309	4.331	1.026	9744	1.3439	77 00'		
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados		
								Angulo θ			

TABLE 1 (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ		
13 00'	2268	2250	4.445	2309	4.331	1.026	9.744	1.3439	77° 00'
10	298	278	390	339	275	027	717	410	50
20	327	306	336	170	219	028	730	38	40
30	2358	2334	4.784	2401	4.165	1.028	9724	1.3352	30
40	385	363	232	432	113	029	717	323	20
50	414	391	182	452	061	030	710	294	10
14 00'	2441	2414	4.134	2493	4.011	1.031	9703	1.1265	75 00'
10	473	447	086	524	3.982	031	606	235	50
20	502	476	039	555	914	032	689	206	40
30	2571	2504	3.994	2587	3.867	1.033	9681	1.3177	30
40	550	532	950	5.7	8.1	034	674	148	20
50	589	560	906	648	776	034	667	119	10
15 00'	2618	2588	3.864	2679	3.732	1.035	9650	1.3090	75 00'
10	647	616	822	711	689	036	652	061	50
20	676	644	782	742	647	037	644	032	40
30	2705	2677	3.742	2.713	3.606	1.038	9636	1.3003	30
40	734	700	703	805	566	039	628	974	20
50	763	728	665	836	526	039	621	945	0
16 00'	2.31	2756	3.028	2967	3.487	040	9613	1.2915	74 00'
10	822	784	592	839	450	041	606	886	50
20	851	812	556	931	4.2	042	596	857	40
30	2880	2840	3.521	2962	3.376	1.043	9588	1.2828	30
40	909	868	487	994	340	044	586	799	20
50	938	896	453	1026	305	045	572	770	10
17 00'	2907	2869	3.420	3057	3.211	1.046	9563	1.274	73 00'
10	296	952	388	083	237	047	555	712	50
20	3025	979	357	121	204	048	546	683	40
30	3054	3007	3.326	3153	1.72	1.048	9537	1.2654	30
40	083	035	295	185	140	049	528	625	20
50	113	082	265	217	108	050	520	585	0
18 00'	3142	3000	3.238	3248	3.018	1.051	95	1.2468	72 00'
10	171	116	207	281	047	05	502	537	50
20	200	145	179	314	018	053	492	508	40
30	3229	3.73	1.52	334	2.989	1.054	9463	1.2479	30
40	258	201	124	378	960	056	474	450	20
50	287	225	098	411	932	057	465	42	10
19 00'	3316	3.246	1.02	3441	2.894	058	455	1.2382	71 00'
10	405	283	046	476	077	059	446	46	50
20	374	311	021	508	850	060	436	334	40
30	3403	3348	2.906	154	2.644	1.061	9426	2.705	30
40	452	365	92	574	798	062	41	75	20
50	462	392	347	607	77	063	407	245	10
20 00'	349	3446	2.924	154	2.747	1.06	9497	2.217	70 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes, Grados	
Angulo θ									

Tables

TABLA I (Continuación)

Angulo C									
Grados		Radiales	sen B	csc B	tan	cot B	sec C	cos B	
20	00	3471	3471	2924	354	4	1	979	70 00
1	3471	446	446	224	446	224	446	188	50
20	545	475	475	224	475	224	475	177	40
30	3528	507	507	224	507	224	507	171	30
40	547	521	521	224	521	224	521	165	20
50	547	535	535	224	535	224	535	159	10
21	00	3584	3584	274	3584	274	1	973	69 00
10	3584	414	414	274	414	274	414	184	50
20	547	430	430	274	430	274	430	178	40
30	547	444	444	274	444	274	444	172	30
40	547	458	458	274	458	274	458	166	20
50	547	472	472	274	472	274	472	160	10
22	00	367	367	274	367	274	1	966	68 00
1	367	414	414	274	414	274	414	184	50
20	547	430	430	274	430	274	430	178	40
30	547	444	444	274	444	274	444	172	30
40	547	458	458	274	458	274	458	166	20
50	547	472	472	274	472	274	472	160	10
23	00	376	376	274	376	274	1	959	67 00
1	376	414	414	274	414	274	414	184	50
20	547	430	430	274	430	274	430	178	40
30	547	444	444	274	444	274	444	172	30
40	547	458	458	274	458	274	458	166	20
50	547	472	472	274	472	274	472	160	10
24	00	385	385	274	385	274	1	952	66 00
1	385	414	414	274	414	274	414	184	50
20	547	430	430	274	430	274	430	178	40
30	547	444	444	274	444	274	444	172	30
40	547	458	458	274	458	274	458	166	20
50	547	472	472	274	472	274	472	160	10
25	00	394	394	274	394	274	1	945	65 00
1	394	414	414	274	414	274	414	184	50
20	547	430	430	274	430	274	430	178	40
30	547	444	444	274	444	274	444	172	30
40	547	458	458	274	458	274	458	166	20
50	547	472	472	274	472	274	472	160	10
26	00	403	403	274	403	274	1	938	64 00
1	403	414	414	274	414	274	414	184	50
20	547	430	430	274	430	274	430	178	40
30	547	444	444	274	444	274	444	172	30
40	547	458	458	274	458	274	458	166	20
50	547	472	472	274	472	274	472	160	1

Tables

TABLE I (Continuation)

Ángulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
27 00'	4712	4540	2.203	5095	1.963	1.12	.89	1.094	63 00'
10	741	566	195	32	949	124	897	366	50
20	771	592	178	169	935	126	884	337	40
30	4090	4+17	2.166	5206	1.921	1.127	8870	1.0908	30
40	829	543	154	243	907	129	857	879	20
50	858	669	142	280	894	131	843	850	10
28 00'	4887	4645	2.130	5317	1.881	1.133	8829	1.0821	62 00'
10	916	720	118	354	868	134	816	792	50
20	945	746	107	392	855	136	802	763	40
30	4974	4772	2.096	5430	1.842	1.138	8788	1.0734	30
40	5003	797	085	467	829	140	774	705	20
50	532	823	074	505	816	142	760	676	10
29 00'	5061	4848	2.063	5543	1.804	1.143	8744	1.064	61 00'
10	931	874	352	381	792	145	732	617	50
20	120	899	041	619	780	147	716	588	40
30	5149	4924	2.031	5658	1.767	1.149	8704	1.0559	30
40	176	950	020	695	756	151	689	530	20
50	207	975	010	735	744	153	675	501	10
30 00'	5256	5000	2.000	5774	1.732	1.155	8640	1.0472	60 00'
10	265	025	1.990	817	720	157	646	443	50
20	294	050	980	851	709	159	631	414	40
30	5.123	5075	1.970	5890	1.698	1.161	8616	1.0385	30
40	352	100	961	930	686	163	601	356	20
50	381	125	951	969	675	165	581	327	10
31 00'	5411	5156	1.942	6009	1.664	1.167	8572	1.0297	59 00'
10	440	175	932	043	653	169	557	268	50
20	469	200	923	068	643	171	542	239	40
30	5498	5225	1.914	6128	1.632	1.173	8526	1.0210	30
40	527	250	905	108	621	175	511	181	20
50	556	275	896	209	611	177	496	152	10
32 00'	5585	5293	1.887	6249	1.600	1.179	8480	1.0123	58 00'
10	674	324	878	289	590	181	485	194	50
20	643	348	870	330	580	184	454	064	40
30	5672	5373	1.861	6371	1.570	1.186	8434	1.0036	30
40	701	398	853	412	568	188	418	1.0007	20
50	730	422	844	453	550	190	403	977	10
33 00'	5766	5446	1.836	6494	1.546	1.192	8387	9948	57 00'
10	789	471	828	536	530	195	371	919	50
20	818	495	820	577	520	197	355	890	40
30	5847	5519	1.812	6619	1.511	1.199	8339	9861	30
40	876	544	804	661	501	202	323	832	20
50	905	569	795	703	1.492	204	307	803	10
34 00'	5934	5592	1.788	6745	1.483	1.206	8256	974	56 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
Ángulo θ									

Tablas

TABLA I (Continuación)

Ángulo θ										
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ			
34 00'	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.974	56 00'	
10	.963	.616	1.781	.787	1.473	1.205	.874	.745	50	
20	.992	.640	1.773	.830	1.464	1.211	.958	.716	40	
30	.6021	.5664	1.766	.873	1.455	1.213	.8241	.9687	30	
40	.650	.688	1.758	.916	1.446	1.210	.825	.857	20	
50	.680	.712	1.751	.959	1.437	1.218	.808	.828	10	
35 00'	.6109	.5716	1.743	.7002	1.428	1.221	.8172	.9599	55 00'	
10	1.38	.760	1.736	.646	1.419	1.22	.875	.510	50	
20	1.67	.783	1.729	.689	1.411	1.220	.858	.541	40	
30	.6196	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	.9512	30	
40	.625	.831	1.715	.717	1.393	1.231	.824	.883	20	
50	.654	.854	1.708	.721	1.385	1.233	.807	.854	10	
36 00'	.6283	.5879	1.701	.726	1.376	1.238	.8030	.9425	54 00'	
10	.312	.901	1.694	.71	1.368	1.239	.875	.896	50	
20	.341	.925	1.688	.735	1.361	1.241	.850	.867	40	
30	.6370	.5918	1.681	.7400	1.351	1.244	.8035	.9338	30	
40	.400	.972	1.675	.745	1.343	1.247	.821	.808	20	
50	.424	.995	1.668	.750	1.335	1.249	.804	.879	10	
37 00'	.6458	.6018	1.661	.7516	1.327	1.252	.7985	.9254	53 00'	
10	.487	.041	1.655	.781	1.319	1.255	.969	.821	50	
20	.516	.065	1.649	.827	1.311	1.258	.857	.892	40	
30	.6545	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7834	.9163	30	
40	.574	.111	1.636	.726	1.295	1.263	.916	.84	20	
50	.603	.136	1.630	.766	1.288	1.266	.898	.805	10	
38 00'	.6532	.6157	1.624	.7613	1.280	1.269	.7880	.9075	52 00'	
10	.661	.180	1.618	.860	1.272	1.275	.862	.847	50	
20	.690	.207	1.612	.907	1.265	1.275	.844	.9015	40	
30	.6720	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7820	.8908	30	
40	.789	.248	1.601	.8002	1.250	1.281	.808	.950	20	
50	.778	.271	1.595	.850	1.242	1.284	.790	.936	10	
39 00'	.6807	.6293	1.589	.8008	1.235	1.287	.7771	.8801	51 00'	
10	.816	.316	1.583	.816	1.228	1.290	.753	.872	50	
20	.845	.338	1.578	.816	1.220	1.291	.815	.843	40	
30	.6894	.6361	1.572	.8743	1.211	1.295	.7716	.8814	30	
40	.923	.383	1.566	.826	1.206	1.299	.698	.785	20	
50	.952	.406	1.561	.84	1.199	1.302	.679	.756	10	
40 00'	.6981	.6428	1.556	.8191	1.192	1.305	.7660	.8727	50 00'	
10	.7010	.450	1.551	.841	1.185	1.309	.642	.698	50	
20	.739	.472	1.545	.891	1.178	1.312	.623	.668	40	
30	.7069	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604	.8639	30	
40	.098	.571	1.535	.891	1.164	1.318	.585	.610	20	
50	.127	.539	1.529	.942	1.157	1.322	.560	.581	10	
41 00'	.7156	.6561	1.524	.8692	1.150	1.325	.54	.652	49 00'	
		cos θ	csc θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados	
								Ángulo θ		

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	col θ	sec θ	cos θ		
41° 00'	,7158	,6561	1,524	,8693	1,150	1,325	,7547	,8552	49° 00'
10	185	583	519	744	144	328	528	523	50
20	214	604	514	796	137	332	509	494	40
30	,7243	,6826	1,509	,8847	1,130	1,335	,7490	,8465	30
40	,732	,648	504	,899	124	339	470	436	20
50	301	,670	499	952	117	342	451	407	10
42° 00'	,7330	,6891	1,494	,9004	1,111	1,346	,7431	,8378	48° 00'
10	359	713	490	,957	104	349	412	348	50
20	389	734	485	110	,998	353	392	319	40
30	,7418	,6758	1,480	,9163	1,091	1,356	,7373	,8290	30
40	447	777	476	217	,985	360	353	261	20
50	476	799	471	271	,979	364	333	232	10
43° 00'	,7505	,6820	1,486	,9325	1,072	1,367	,7314	,8203	47° 00'
10	534	841	462	,360	,966	371	294	174	50
20	563	862	457	436	,980	375	274	145	40
30	,7592	,6884	1,453	,9490	1,054	1,379	,7254	,8116	30
40	621	905	448	545	,948	382	234	087	20
50	650	926	444	601	,942	386	214	058	10
44° 00'	,7679	,6947	1,440	,9557	1,036	1,390	,7193	,8029	46° 00'
10	709	967	435	713	,930	394	173	,7999	50
20	738	988	431	770	,924	398	153	970	40
30	,7767	,7009	1,427	,9827	1,018	1,402	,7133	,7941	30
40	796	930	423	864	,912	405	112	912	20
50	825	950	418	942	,906	410	092	883	10
45° 00'	,7854	,7071	1,414	1,000	1,000	1,414	,7071	,7854	45° 00'
		cos θ	sec θ	col θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
									Angulo θ

TABLA II

Logaritmos de los números del 1 al 10 con cuatro cifras decimales para valores mayores escriba el número N en la forma $N = n \times 10^c$, $1 \leq n < 10$, c un número entero y úsese $\log N = \log n + c$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	+0.0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	.0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	.0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	.1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	.1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	.1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	.2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	.2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	.2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	.2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	.3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	.3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	.3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	.3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	.3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	.3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	.4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	.4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	.4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	.4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	.4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	.4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	.5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	.5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	.5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	.5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	.5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	.5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	.5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	.5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	.6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	.6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	.6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	.6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	.6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	.6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	.6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	.6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	.6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	.6902	6911	6920	6929	6937	6946	6955	6964	6972	6981

Tablas

TABLA II (Conclusión)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.0	6998	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7161	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7992	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9629	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9822	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Se terminó de Imprimir en Febrero de 1997
en los Talleres Gráficos de

EDITORIAL COVENAS E.I.R.Ltda.

RUC N° 29534659

Jr. Las Verdolagas N° 199 - Urb. Micaela Bastidas
Los Olivos - Lima/Perú

Telfs. 486-7957 • 521-0949